前　言

本书是根据我们在1982年编写的《解析几何》(江苏师范学院数学系《解析几何》编写组编，高等教育出版社出版）修改而成的，它的适用范围将更广泛，它不仅可作为师范院校数学专业本科的教材，也可供师范专科学校、教育学院、函授师范大学等选作教材或参考书.

修改本保持了原书的结构，与原书基本一致. 它对原书的难点部分，难度较大的习题作了适当的处理，并且精简了一些内容(例如极坐标，欧拉角等)，增加了一些例题. 修改本把原教材的坐标变换这一章的有关内容安插在二次曲线与二次曲面的一般理论中，不再另立一章.

修改本每章末增加了“结束语”，它既是该章的小结，又能帮助读者进一步理解与认识该章的主要精神以及教材的处理手法，也可扩大读者的视野，但是初读者可以暂时不读. 修改本的书末增加了“习题答案、提示与解答”，其中个别习题的解答，可以把它看作本书例题的补充，但是由于一题往往有多种解法，因此希望读者不要受这些提示与解答的束缚，独立思考，这部分内容仅供读者参考.

书中带有 * 号的章节，各校可根据实际情况进行取舍

限于编者的水平，难免有不妥与错误，欢迎广大读者批评指正.

吕林根　许子道

1986年11月于苏州大学数学系

目　　录

第一章　矢量与坐标

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何，为了把代数运算引到几何中来，最根本的做法就是设法把空间的几何结构有系统的代数化，数量化．因此在这里我们首先在空间引进矢量以及它的运算，并且通过矢量来建立坐标系，这是本章要讨论的主要课题，它也是解析几何的基础．利用矢量，有时可使得某些几何问题更简捷地得到解决．矢量在其他一些学科，例如力学，物理学和工程技术中也是解决问题的有力工具．

§1.1　矢量的概念

在力学、物理学以及日常生活中，我们经常遇到许多的量，例如象温度、时间、质量、密度、功、长度、面积与体积等，这些量在规定的单位下，都可以由一个数来完全确定，这种只有大小的量叫做数量．另外还有一些比较复杂的量，例如象位移、力、速度、加速度等，它们不但有大小，而且还有方向，这种量就是矢量．

定义1.1.1　既有大小又有方向的量叫做矢量，或称向量，简称矢．

我们用有向线段来表示矢量，有向线段的始点与终点分别叫做矢量的始点与终点，有向线段的方向表示矢量的方向，而有向线段的长度代表矢量的大小．始点是

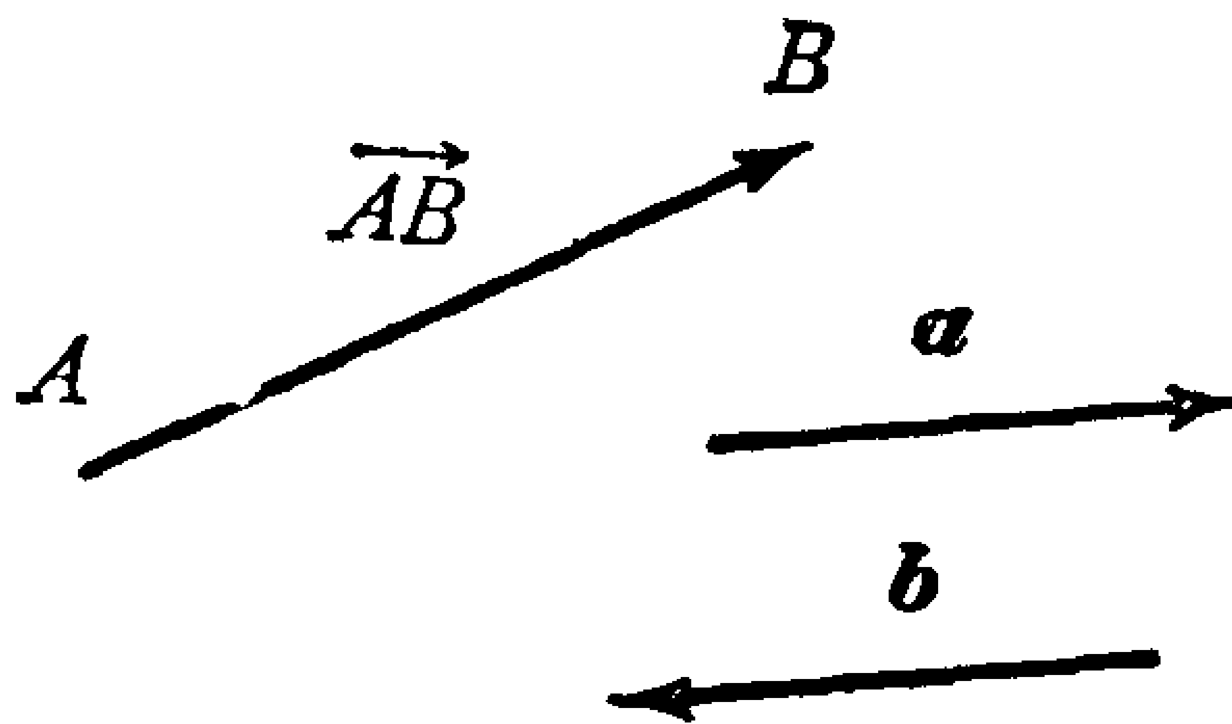


图　1-1

A，终点是 B 的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$，有时用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, ⋯ 或用黑体字母

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \cdots$ 来记矢量(图 1-1).

矢量的大小叫做矢量的模，也称矢量的长度. 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记做 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的矢量叫做**单位矢量**，与矢量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位矢量叫做**矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量**，常用 $\boldsymbol{a}^0$ 来表示.

模等于 0 的矢量叫做**零矢量**，记做 $\mathbf{0}$，它是起点与终点重合的矢量，零矢量的方向不定. 不是零矢量的矢量叫做**非零矢量**.

由于在几何中，我们把矢量看成是一个有向线段，因此象对待线段一样，下面说到矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，意思就是它们所在的直线相互平行，并记做 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$，类似地我们可以说一个矢量与一条直线或一个平面平行等.

定义 1.1.2 如果两个矢量的模相等且方向相同，那么叫做**相等矢量**，所有的零矢量都相等. 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

根据定义 1.1.2，对于不在一直线上的两个相等的非零矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$，如果用两线段分别连结它们的一对起点 A 与 A'，一对终点 B 与 B'，那么显然得到一个平行四边形 $ABB'A'$ (图 1-2)；反过来，如果用这种作图法从两个矢量得到一个平行四边形时，那么这两矢量就相等.

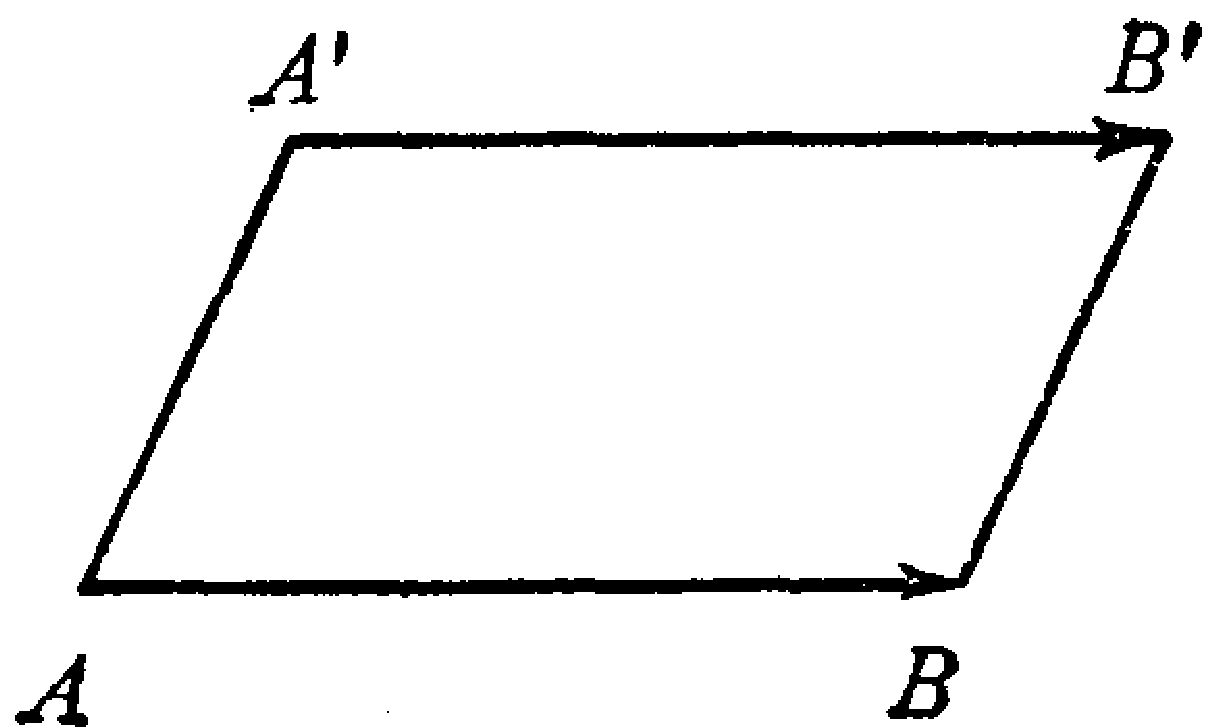


图 1-2

两个矢量是否相等与它们的始点无关，只由它们的模和方向决定，我们以后运用的正是这种始点可以任意选取，而只由模和方向决定的矢量，这样的矢量通常叫做**自由矢量**. 也就是说，自由矢量可以任意平行移动，移动后的矢量仍然代表原来的矢量. 在自由矢量的意义下，相等的矢量都看作是同一的自由矢量. 由于自由矢量始点的任意性，按需要我们可以选取某一点作为所研究

的一些矢量的公共始点，在这种场合，我们就说，把那些矢量归结到共同的始点.

必须注意：由于矢量不仅有大小，而且还有方向，因此，模相等的两个矢量不一定相等，因为它们的方向可能不同.

定义 1.1.3 两个模相等，方向相反的矢量叫做互为*反矢量*，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的反矢量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反矢量，也就是 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，或 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

如果把彼此平行的一组矢量归结到共同的始点，这组矢量一定在同一条直线上；同样，如果把平行于同一平面的一组矢量归结到共同的始点，这组矢量一定在同一个平面上.

定义 1.1.4 平行于同一直线的一组矢量叫做*共线矢量*. 零矢量与任何共线的矢量组共线.

定义 1.1.5 平行于同一平面的一组矢量，叫做*共面矢量*. 零矢量与任何共面的矢量组共面.

显然，一组共线矢量一定是共面矢量，三矢量中如果有两矢量是共线的，这三矢量一定也是共面的.

习　题

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形？

(1) 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；

(2) 把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点；

(3) 把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点；

(4) 把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点.

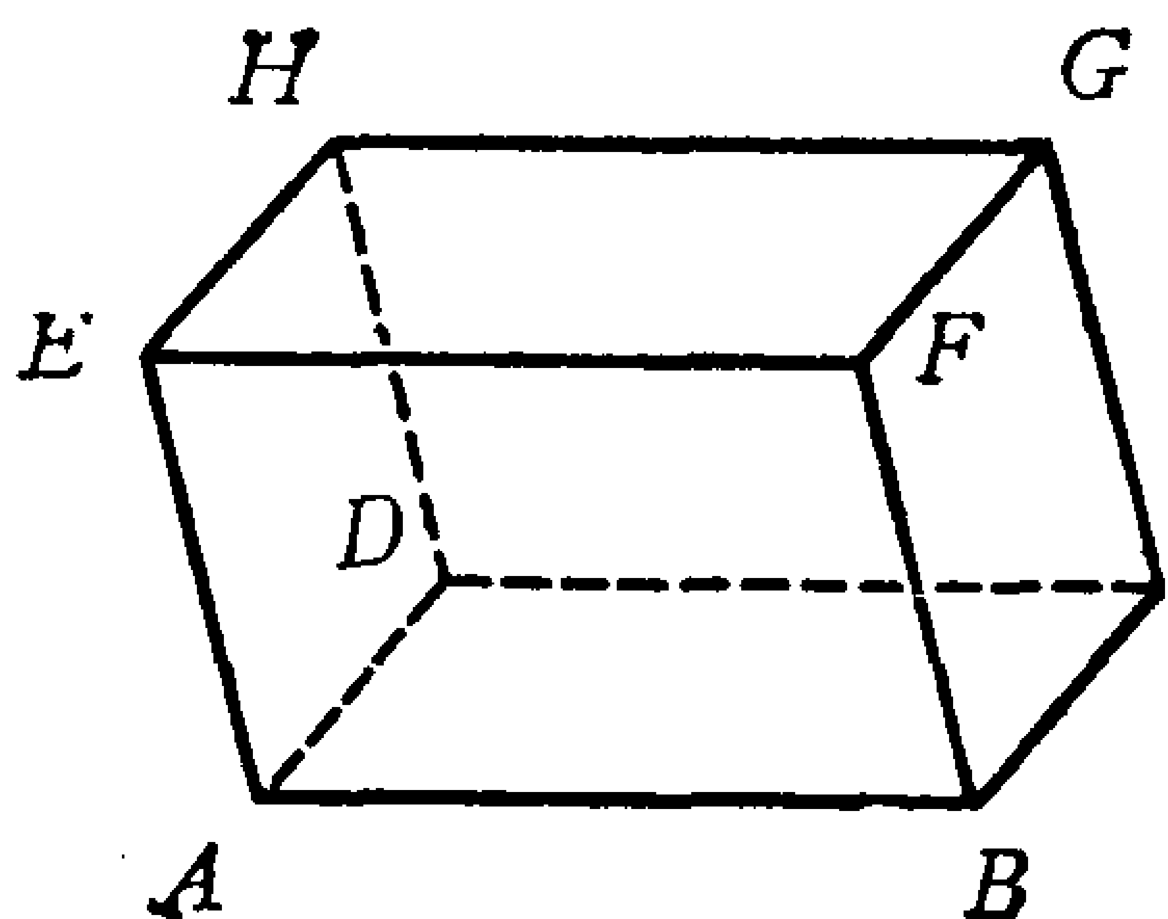
2. 设点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{FA}$ 中，哪些矢量是相等的？

3. 设在平面上给了一个四边形 $ABCD$，点 K、L、M、N 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点，求证：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. 当 $ABCD$ 是空间四边形时，这等式

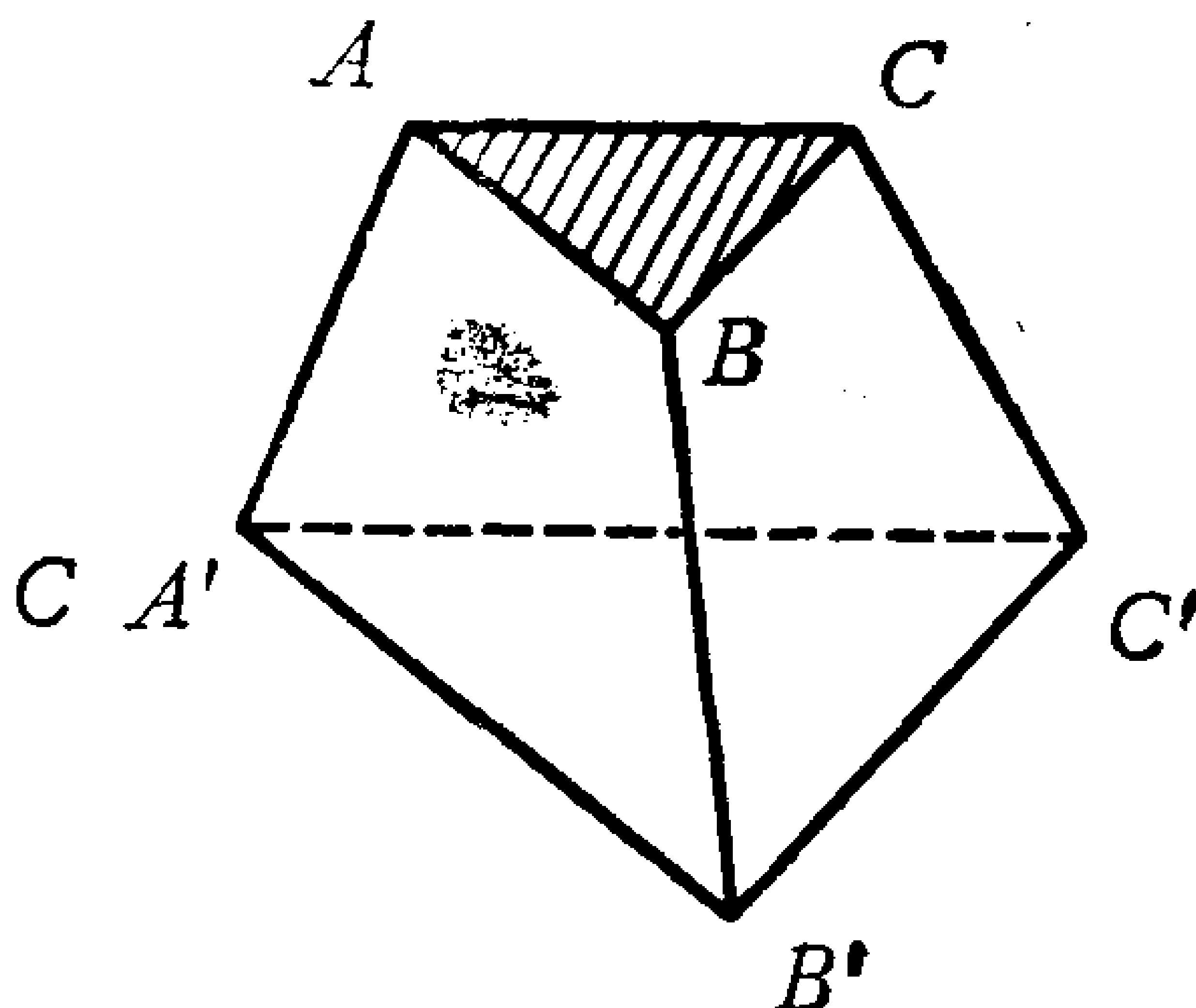
是否也成立?

4．设 $ABCD\text{-}EFGH$ 是一个平行六面体，在下列各对矢量中，找出相等的矢量和互为反矢量的矢量:

(1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$; (2) $\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{CG}$; (3) $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{EG}$; (4) $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{GF}$; (5) $\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CH}$.



第 4 题



第 5 题

5．设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别是三棱台 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的上、下底面，试在矢量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$ 中找出共线矢量和共面矢量。

§1.2 矢量的加法

物理学中的力与位移都是矢量．作用于一点的两个不共线的力的合力，可以用“平行四边形法则”求出．如图 1-3 中的两个力 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 的合力，就是以 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线矢量 $\overrightarrow{OC}$．两个位移的合成可以用“三角形法则”求出，如

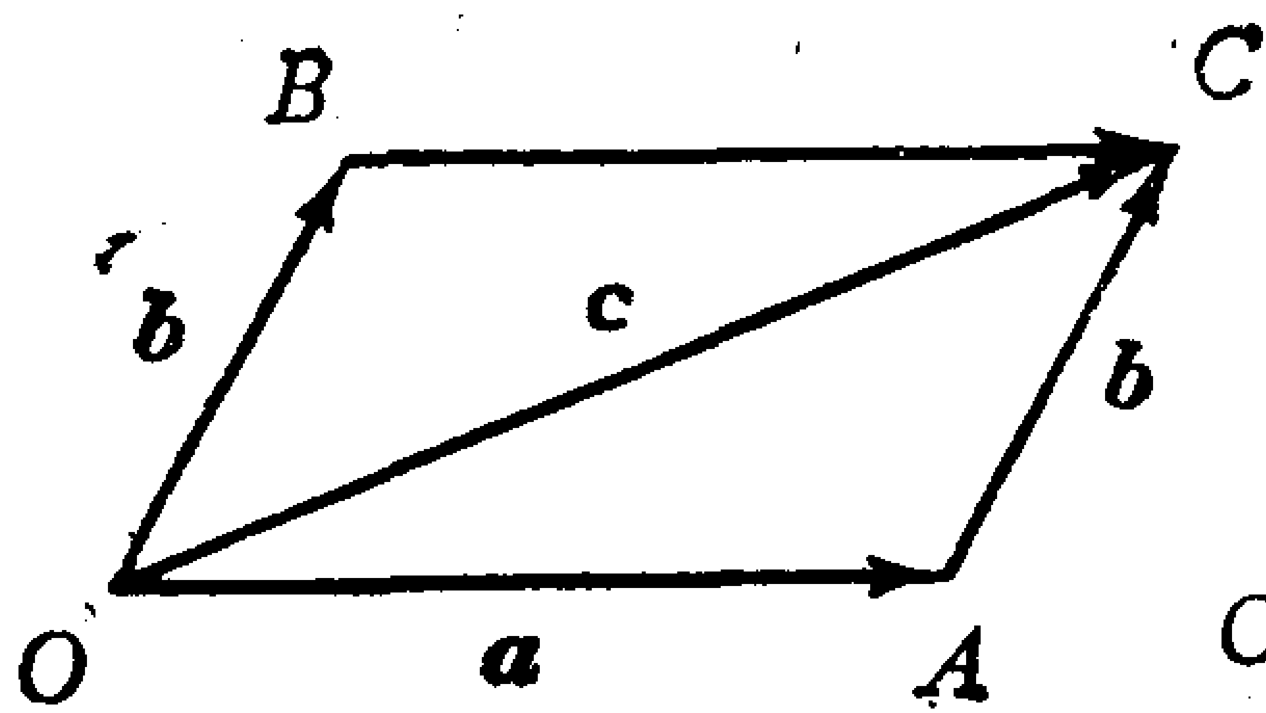


图 1-3

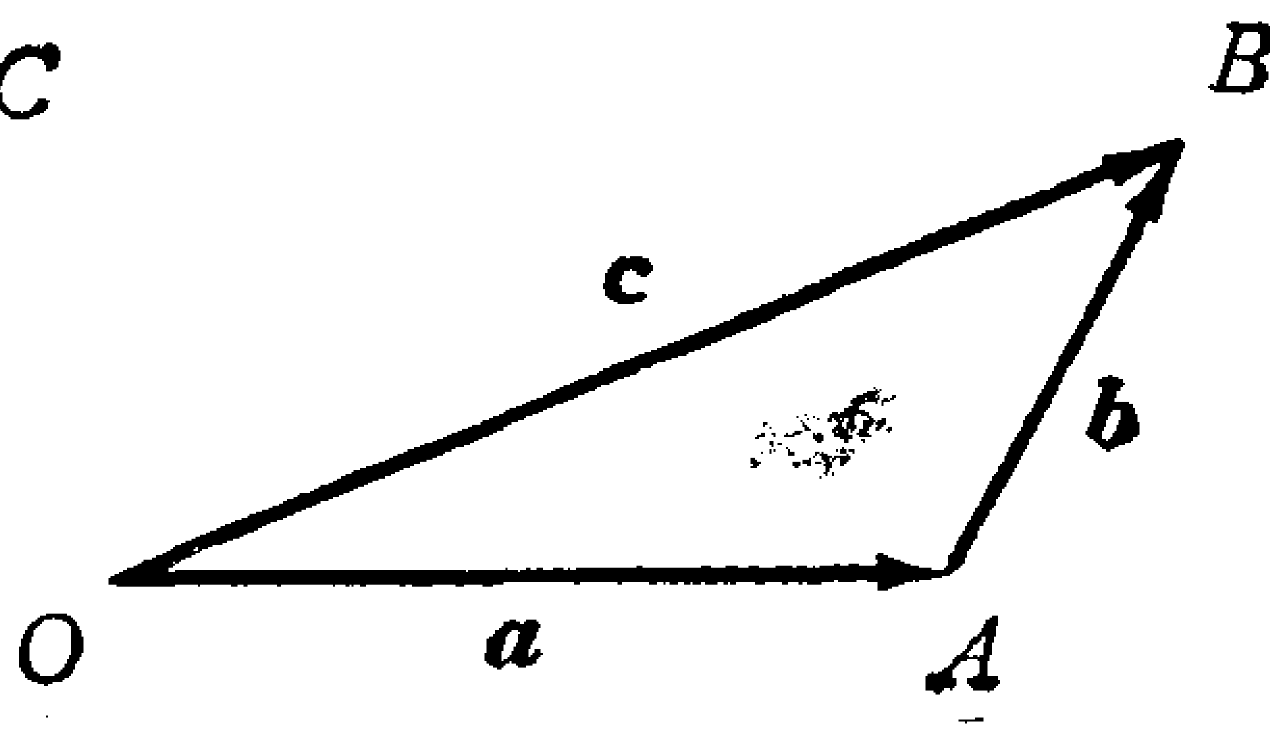


图 1-4

图1-4 连续两次位移 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的结果，相当于位移 $\overrightarrow{OB}$.

在自由矢量的意义下，两矢量合成的平行四边形法则可归结为三角形法则，如图 1-3，只要平移矢量 $\overrightarrow{OB}$ 到 $\overrightarrow{AC}$ 的位置就行了.

定义 1.2.1 设已知矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，以空间任意一点 O 为始点接连作矢量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$ 得一折线 OAB，从折线的端点 O 到另一端点 B 的矢量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$，叫做两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记做 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 由两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做*矢量加法*.

根据定义 1.2.1，由图 1-4 我们有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}. \tag{1.2-1}$$

这种求两个矢量和的方法叫做*三角形法则*. 由此再根据图 1-3 与定义 1.1.2 可得：

定理 1.2.1 如果把两个矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边组成一个平行四边形 $OACB$，那么对角线矢量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

这种求两个矢量和的方法叫做*平行四边形法则*.

如果两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，那么它们的和矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 根据定义 1.2.1 读者自己容易求得，特别地有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

定理 1.2.2 矢量的加法满足下面的运算规律：

1) 交换律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}; \tag{1.2-2}$$

2) 结合律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{1.2-3}$$

证 先证交换律. 对于两矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线的情形，由图 1-5 可知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

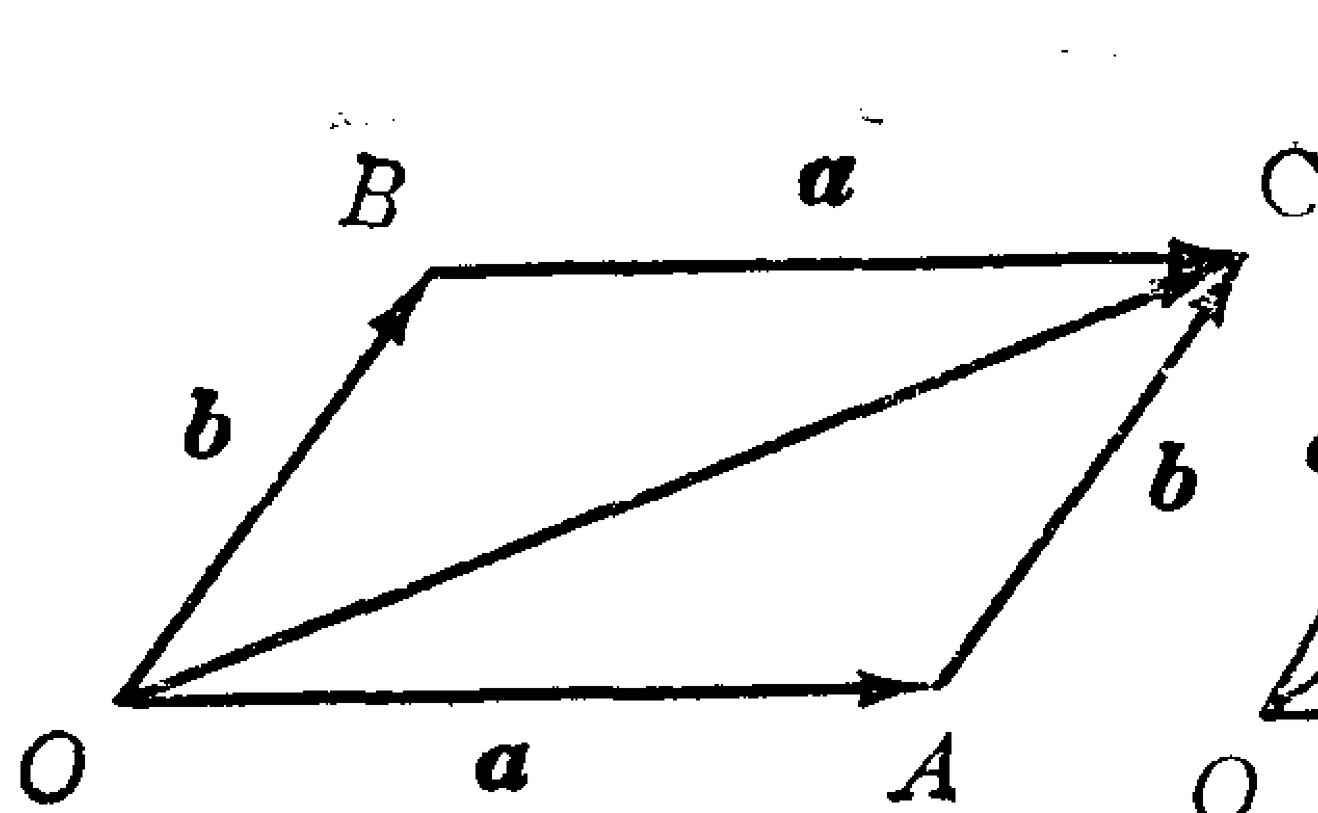


图 1-5

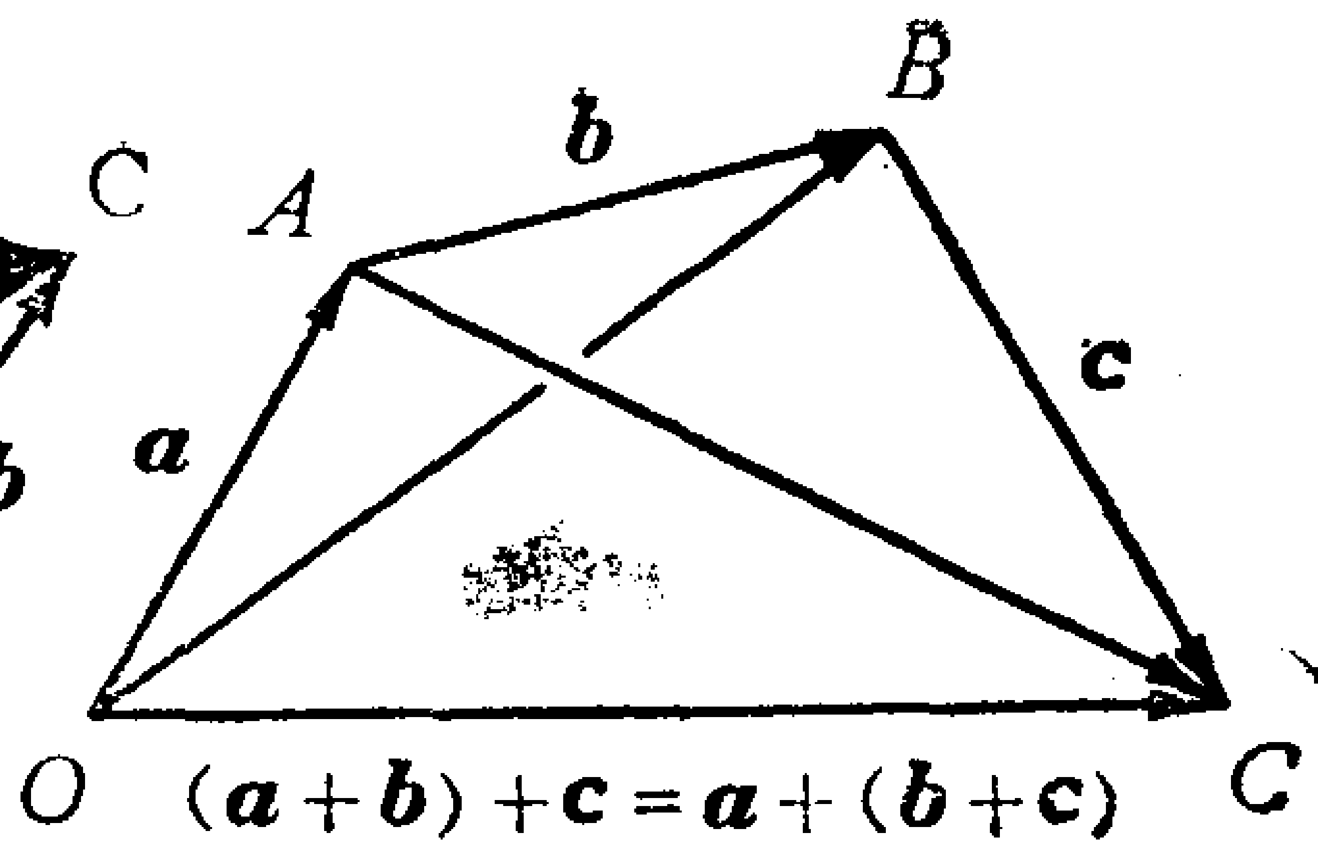


图 1-6

所以 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

对于两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线的情形，留给读者自行证明．

再证结合律．自空间任意点 O 开始依次引 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$（图 1-6），根据矢量加法定义有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

所以 $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

由于矢量的加法满足交换律与结合律，所以三矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 相加，不论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，因此可简单地写成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

推广到任意有限个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和，就可以记做

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

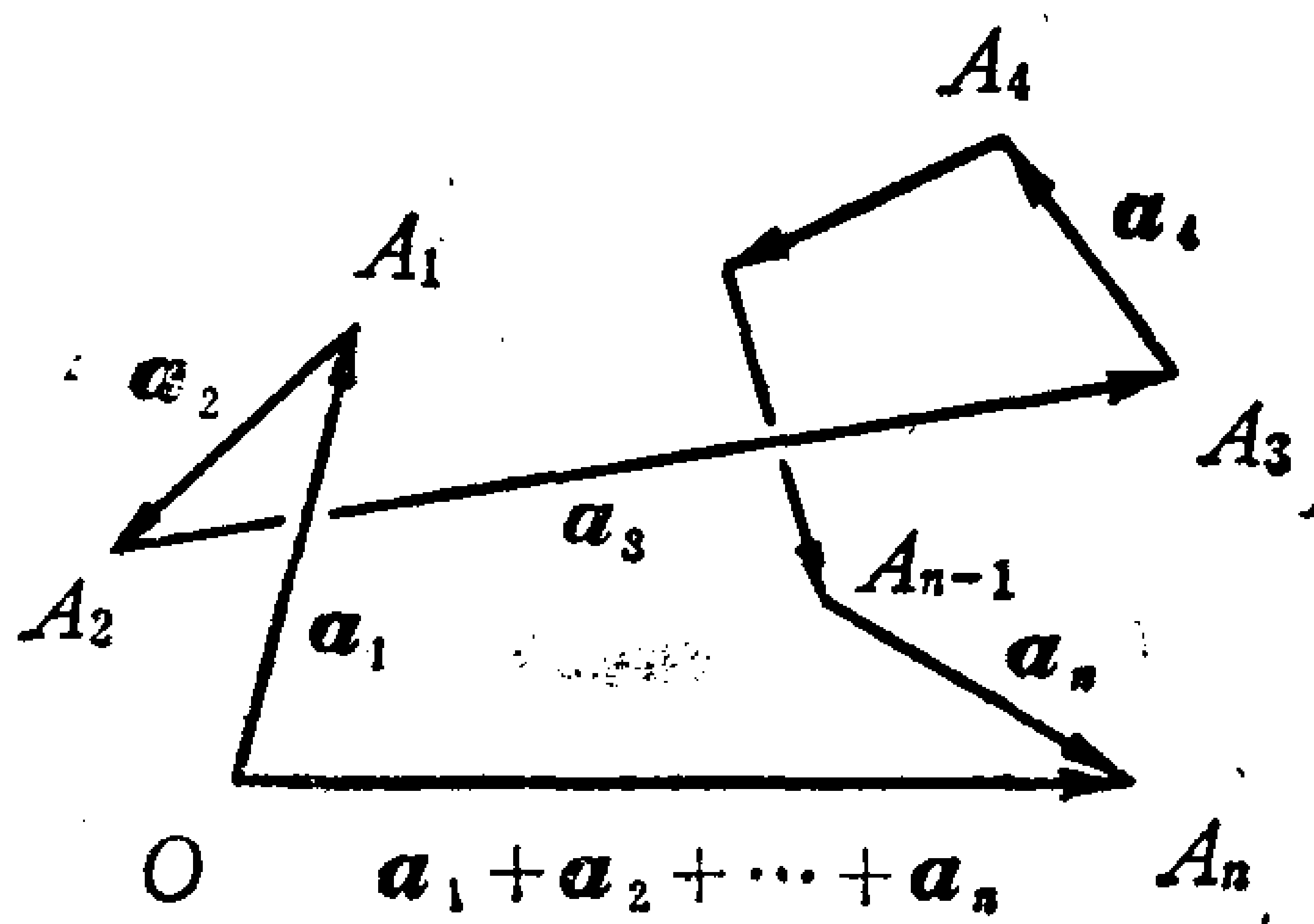


图 1-7

有限个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 相加的作图法，可以由矢量的三角形求和法则推广如下：自任意点 O 开始，依次引 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，由此

得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$(图 1-7)，于是矢量 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的和:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}. \qquad (1.2\text{-}4)$$

特别地当 A_n 与 O 重合时，它们的和为零矢量 $\mathbf{0}$.

这种求和的方法叫做*多边形法则*.

定义 1.2.2 当矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于矢量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时，我们把矢量 $\boldsymbol{c}$ 叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的*差*，并记做 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的运算叫做*矢量减法*.

根据矢量加法的三角形法则，总有

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA},$$

所以由定义 1.2.2 得

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}. \qquad (1.2\text{-}5)$$

由此得到矢量减法的几何作图法: 自空间任意点 O 引矢量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么矢量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 1-8). 如果以 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$，那么显然它的一条对角线矢量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，而另一条对角线矢量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 1-9).

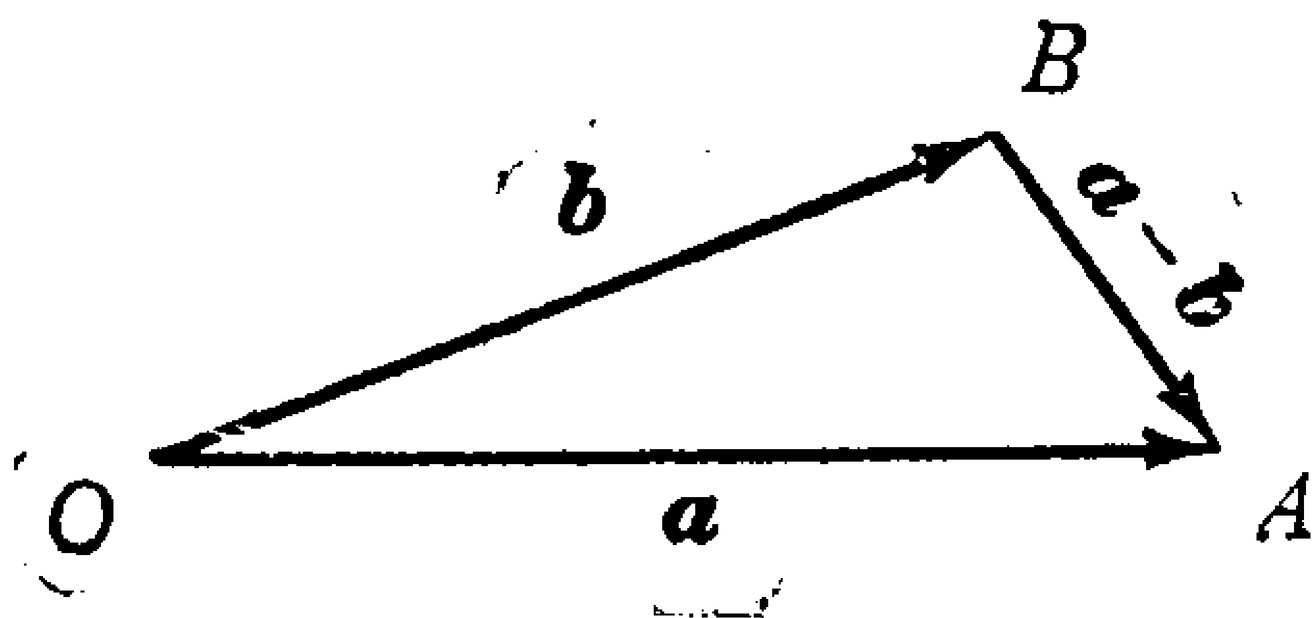


图 1-8

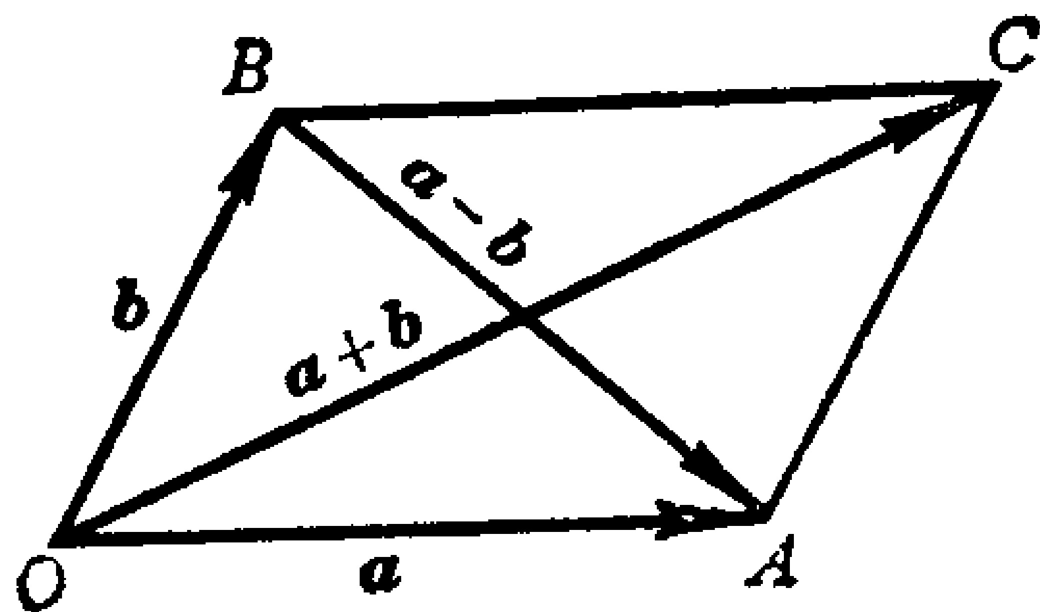


图 1-9

利用反矢量，可以把矢量的减法运算变为加法运算.

因为如果 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，在等式两边各加 $\boldsymbol{b}$ 的反矢

量 $-\boldsymbol{b}$, 利用 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\mathbf{0}$, 便得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, 因此

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{1.2-6}$$

这表明求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差可以变为求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反矢量 $-\boldsymbol{b}$ 之和. 又因为 $-\boldsymbol{b}$ 的反矢量就是 $\boldsymbol{b}$, 因此又可得

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}. \tag{1.2-7}$$

从矢量减法的这个性质, 可以得出矢量等式的移项法则: 在矢量等式中, 将某一矢量从等号的一端移到另一端, 只需改变它的符号. 例如将等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 中的 $\boldsymbol{c}$ 移到另一端, 那么有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$. 这是因为从等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 两边减去 $\boldsymbol{c}$, 即加上 $-\boldsymbol{c}$, 而 $\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\mathbf{0}$ 的缘故.

我们还要指出, 对于任何的两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 有下列不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

这个不等式还可以推广到任意有限多个矢量的情况:

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

例 1 设互不共线的三矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$, 试证明顺次将它们的终点与始点相连而成一个三角形的充要条件是它们的和是零矢量.

证 必要性 设三矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 可以构成三角形 ABC, 即有

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$$

(图1-10), 那么

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0},$$

即 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}.$$

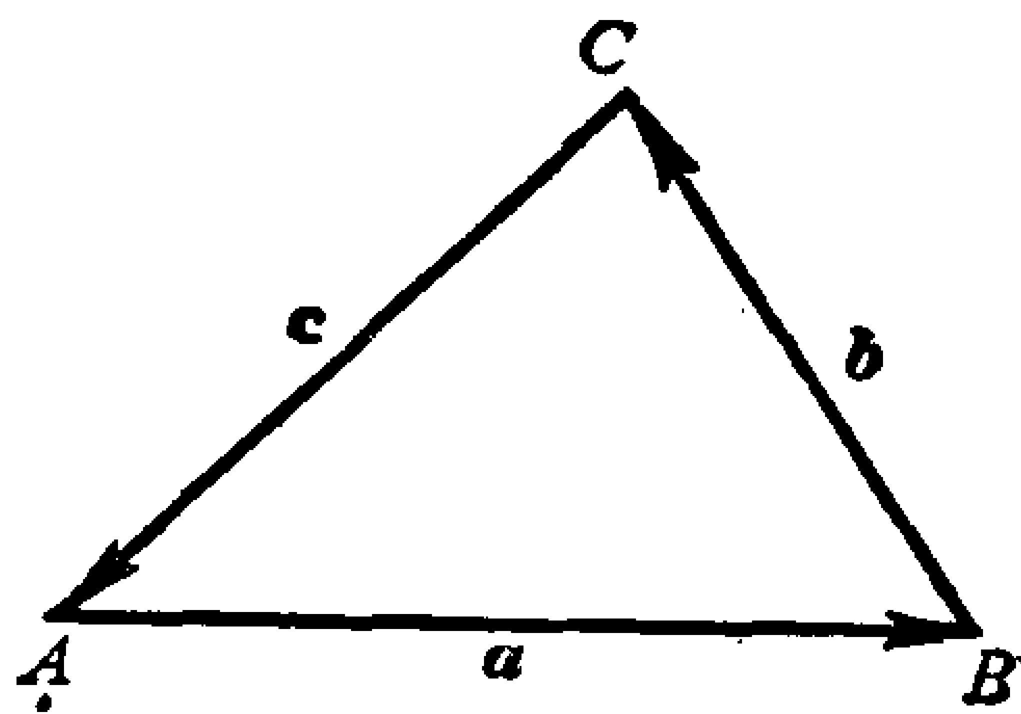


图 1-10

充分性 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$, 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 那么 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 所以 $\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{c}$ 是 $\overrightarrow{AC}$ 的反矢量, 因此 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$, 所以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 可构成一个三角形 ABC.

例 2 如图 1-11，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 来表示对角线矢量 $\overrightarrow{AC_1}$，$\overrightarrow{A_1C}$.

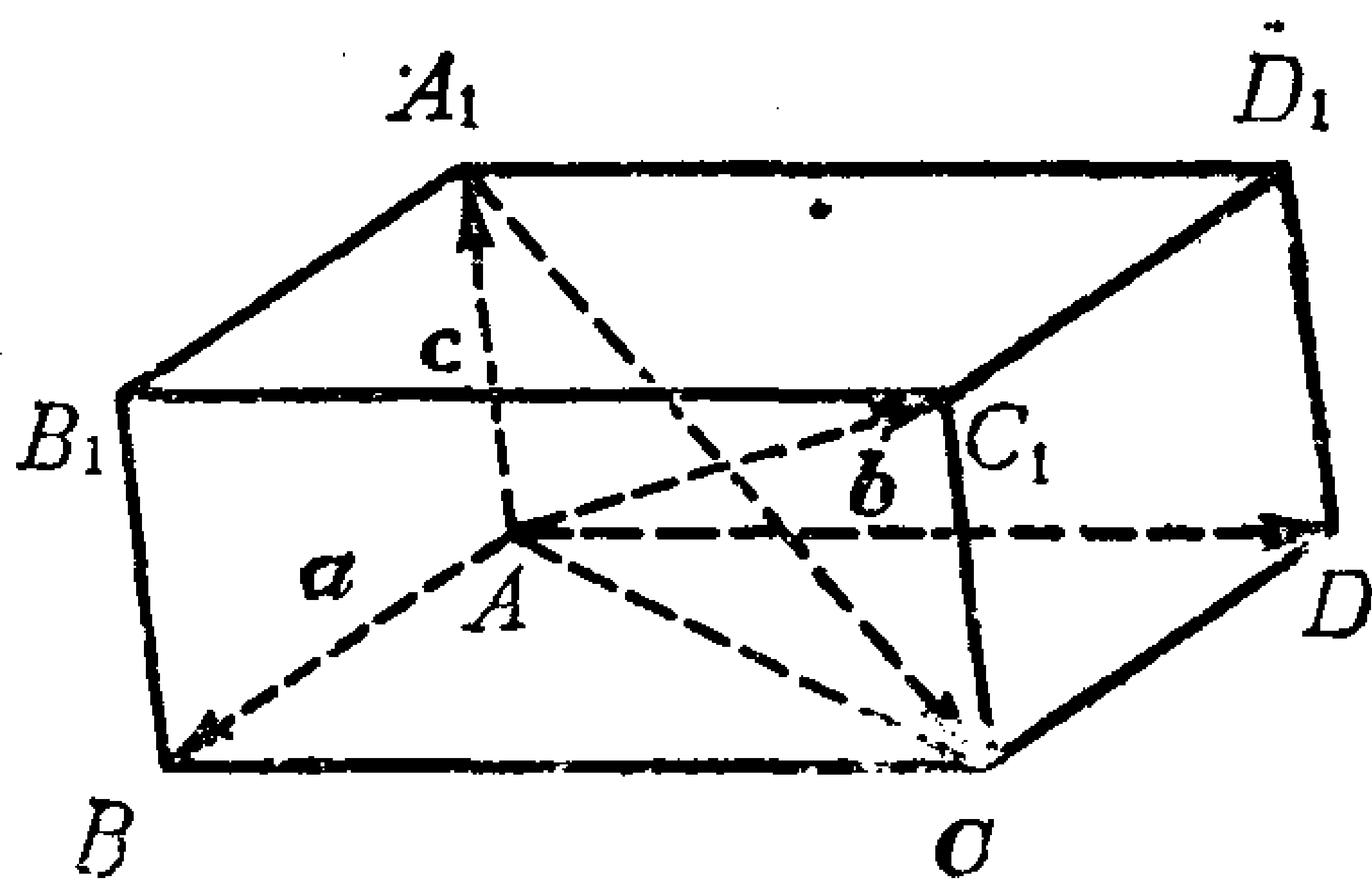


图 1-11

解 1)

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$$
$$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c};$$

2)

$$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$
$$=-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},$$

或者
$$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AA_1}$$
$$=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

例 3 用矢量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

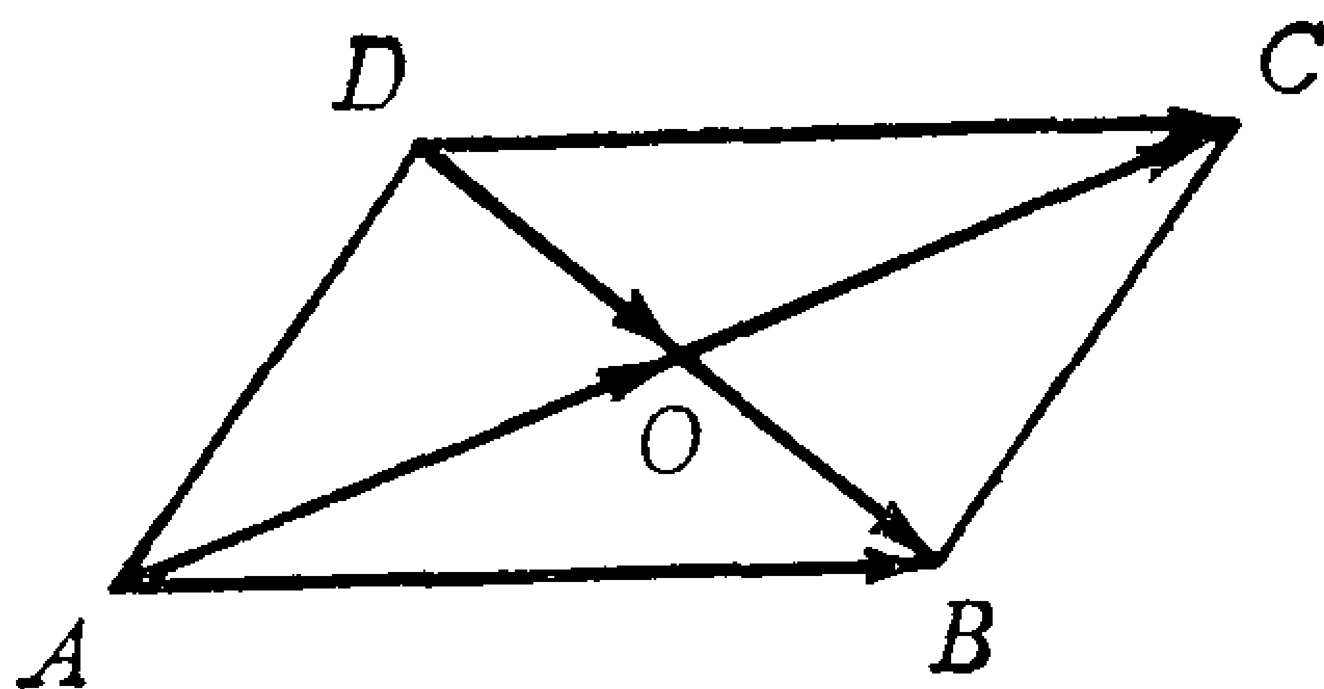


图 1-12

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于 O 点且互相平分（图 1-12），从图可以看出：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

因此，$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

§1.3 数量乘矢量

我们知道，位移、力、速度与加速度等都是矢量，而时间、质量等都是数量，这些矢量与数量间常常会发生某些结合的关系，如我

们熟知的公式

$$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a},$$

这里$\boldsymbol{f}$表示力，$\boldsymbol{a}$表示加速度，m表示质量．再如公式

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t,$$

这里$\boldsymbol{s}$表示位移，$\boldsymbol{v}$表示速度，t表示时间．

在矢量的加法中，我们也已看到，n个矢量相加仍然是矢量，特别是n个相同的非零矢量$\boldsymbol{a}$相加的情形，显然这时的和矢量的模为$|\boldsymbol{a}|$的n倍，方向与$\boldsymbol{a}$相同．n个$\boldsymbol{a}$相加的和常记做$n\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{a}n$．

定义 1.3.1 实数λ与矢量$\boldsymbol{a}$的乘积是一个矢量，记做$\lambda\boldsymbol{a}$，它的模是$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；$\lambda\boldsymbol{a}$的方向，当$\lambda>0$时与$\boldsymbol{a}$相同，当$\lambda<0$时与$\boldsymbol{a}$相反．我们把这种运算叫做数量与矢量的乘法，简称为数乘．

从这个定义我们立刻知道，当$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=0$，所以$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，这时就不必讨论它的方向了．当$\lambda=-1$时，$(-1)\boldsymbol{a}$就是$\boldsymbol{a}$的反矢量，因此我们常常把$(-1)\boldsymbol{a}$简写做$-\boldsymbol{a}$．

已知矢量$\boldsymbol{a}$和它的单位矢量$\boldsymbol{a}^0$，下面的等式显然成立．

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \quad 或 \quad \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.3-1}$$

由此可知，一个非零矢量乘以它的模的倒数，结果是一个与它同方向的单位矢量．

定理 1.3.1 数量与矢量的乘法满足下面的运算规律：

1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$; (1.3-2)

2) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$; (1.3-3)

3) 第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$; (1.3-4)

4) 第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. (1.3-5)

这里$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为矢量，λ，μ为任意实数．

证 1) 根据定义1.3.1, (1.3-2)显然成立.

2) 证明结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 成立.

当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 或 λ, μ 中至少有一为0时, (1.3-3)显然成立. 当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq0$ 时, 矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的模都等于 $|\lambda|\cdot|\mu||\boldsymbol{a}|$, 从而它们的模相等; 而它们的方向, 当 λ 与 μ 同号时, 都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致, 当 λ 与 μ 异号时, 都与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反, 因此矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 所以有

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}.$$

3) 证明第一分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 成立.

如果 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 或 λ, μ 及 $\lambda+\mu$ 中至少有一个为0, 那么等式显然成立. 因此我们只须证明当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\lambda\mu\neq0$, $\lambda+\mu\neq0$ 的情形.

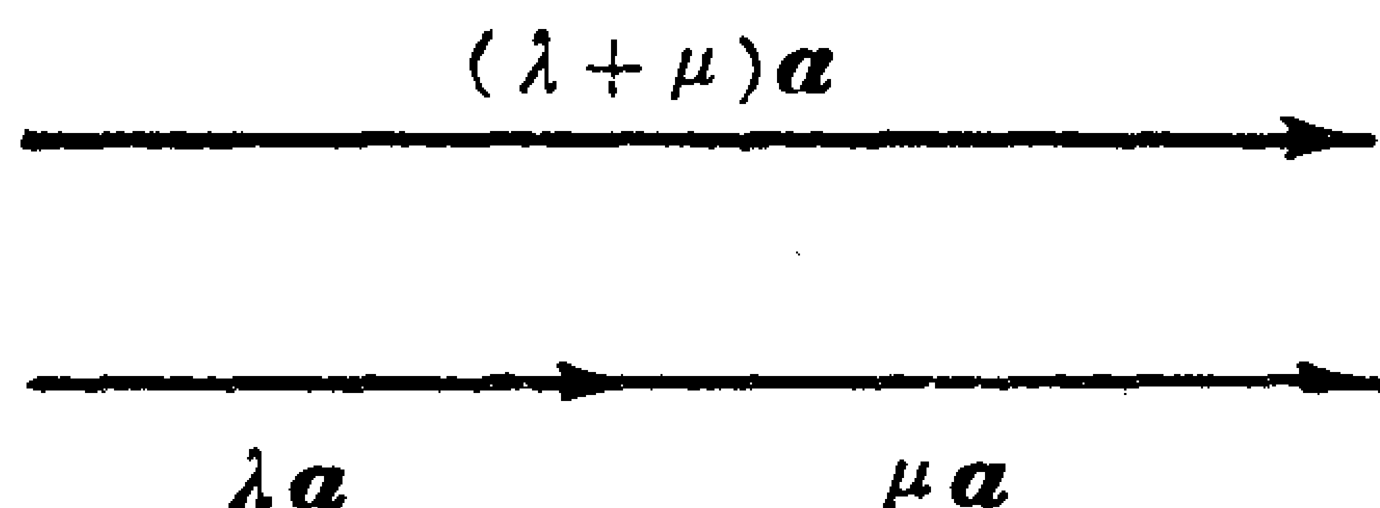


图 1-13

(i) 如果 $\lambda\mu>0$, 这时显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$\begin{aligned}|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|&=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|\\&=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{a}|+|\mu\boldsymbol{a}|\\&=|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|,\end{aligned}$$

所以(图1-13)
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

(ii) 如果 $\lambda\mu<0$, 不失一般性, 可设 $\lambda>0$, $\mu<0$, 再区分 $\lambda+\mu>0$, 和 $\lambda+\mu<0$ 两种情形. 下面只证前一种情形, 后一种情形可相仿证明. 假定 $\lambda>0, \mu<0, \lambda+\mu>0$. 这时有 $(-\mu)(\lambda+\mu)>0$, 根据(i)有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a}=[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a},$$

所以
$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}-(-\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

4) 证明第二分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 成立.

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中有一个为 $\boldsymbol{0}$, 等式显然成立, 因此, 这里只须对 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, $\lambda\neq0$ 的情形进行证明.

(i) 如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共线, 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向时, 取 $m=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$; 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 反向时, 取 $m=-\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$, 这样显然有 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$, 因此根据(1.3-3)与(1.3-4)有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda[(m+1)\boldsymbol{b}]\\&=(\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}=(\lambda m)\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}\\&=\lambda(m\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

(ii) 如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线, 那么如图 1-14 所示, 显然由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为两边构成的 $\triangle OAB$ 与由 $\lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda\boldsymbol{b}$ 为两边构成的 $\triangle OA_1B_1$ 相似, 因此对应的第三边所成矢量满足

$$\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1},$$

但 $$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OB_1}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

所以 $$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

从矢量的加法与数乘矢量的运算规律知, 对于矢量也可以象实数及多项式那样去运算, 例如

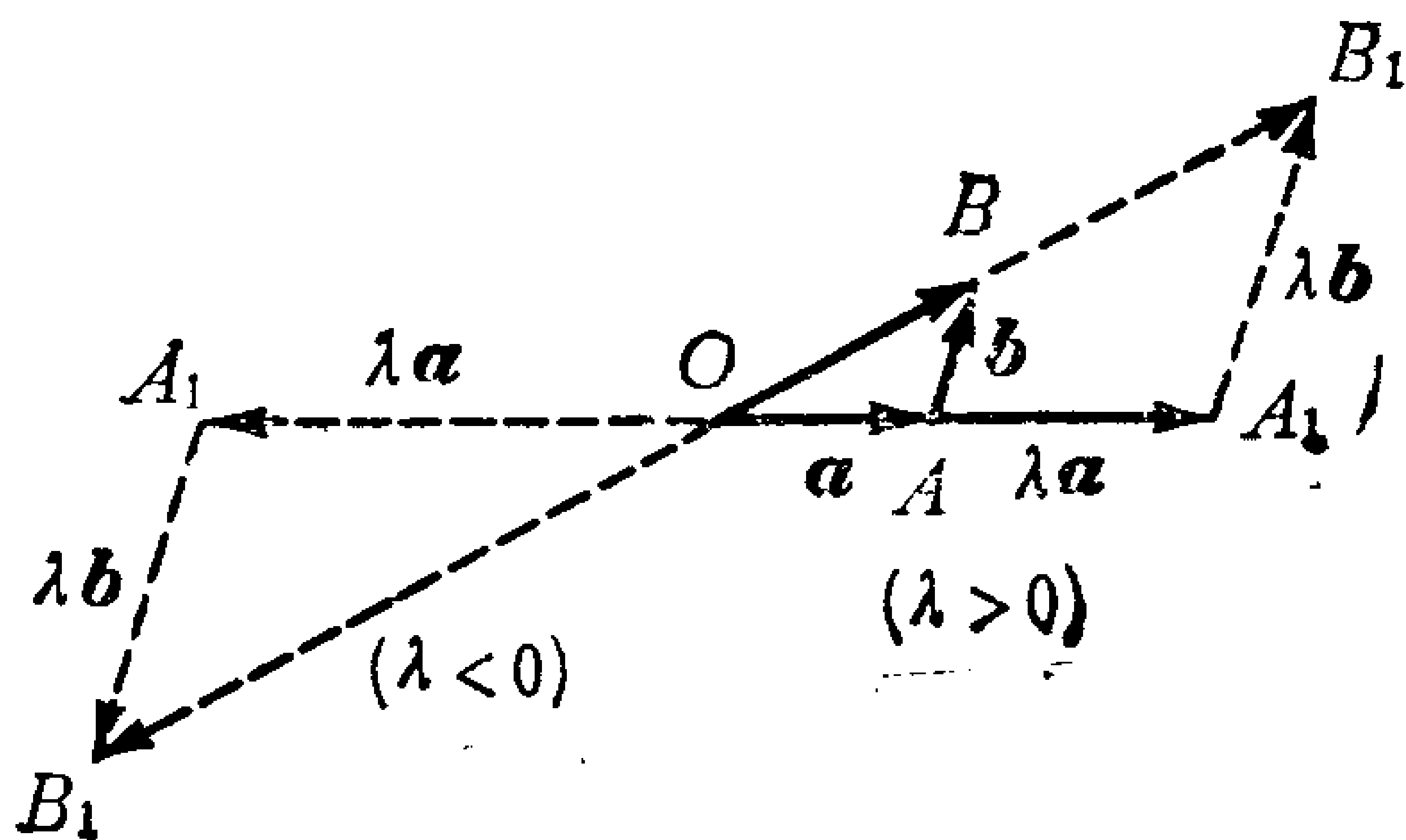


图 1-14

$$\begin{aligned}&\nu_1(\lambda_1\boldsymbol{a}-\mu_1\boldsymbol{b})+\nu_2(\lambda_2\boldsymbol{a}-\mu_2\boldsymbol{b})\\&\quad=(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2)\boldsymbol{a}-(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例 1 设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，求证

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

证 如图 1-15 所示，有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$

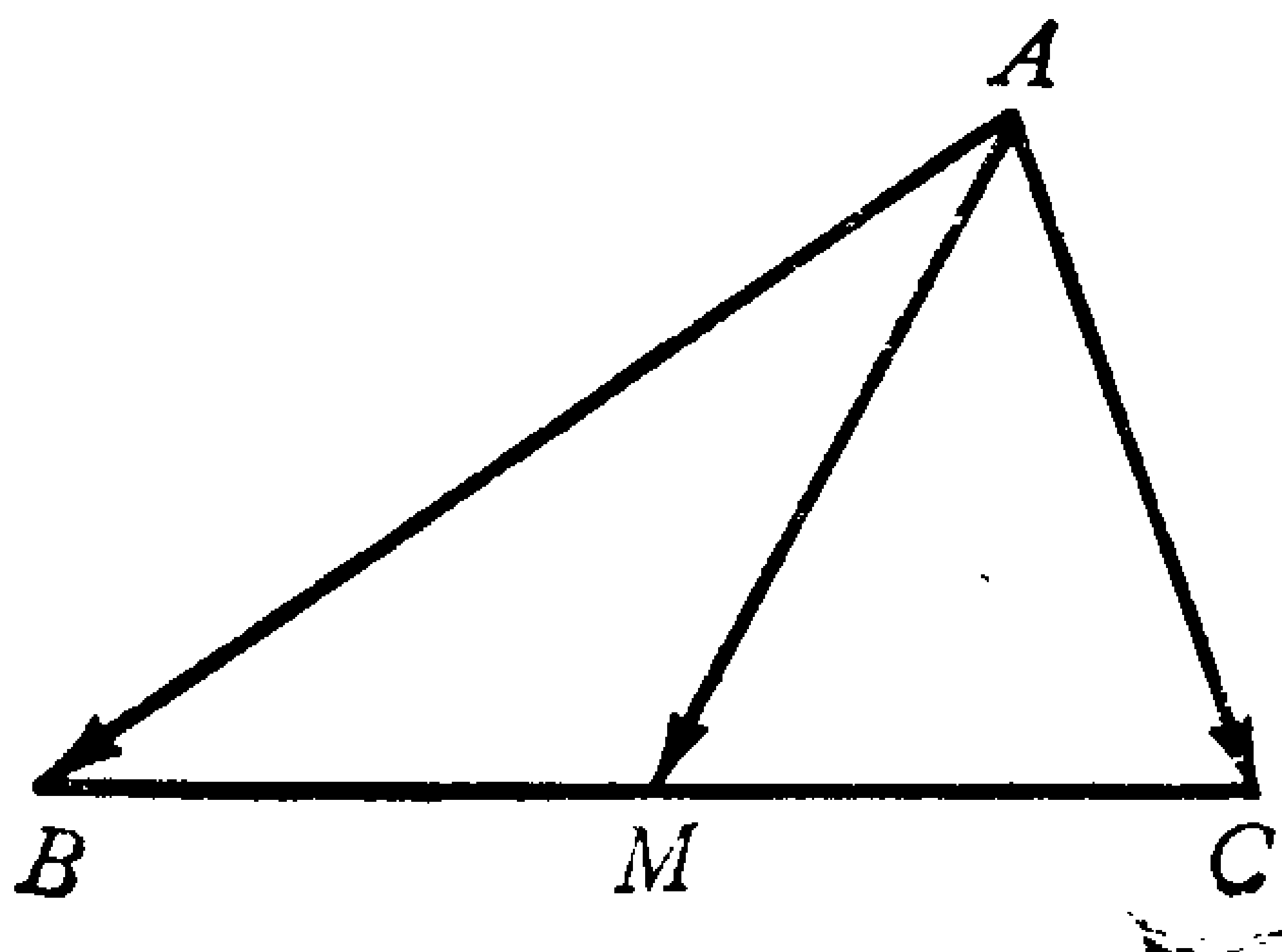


图 1-15

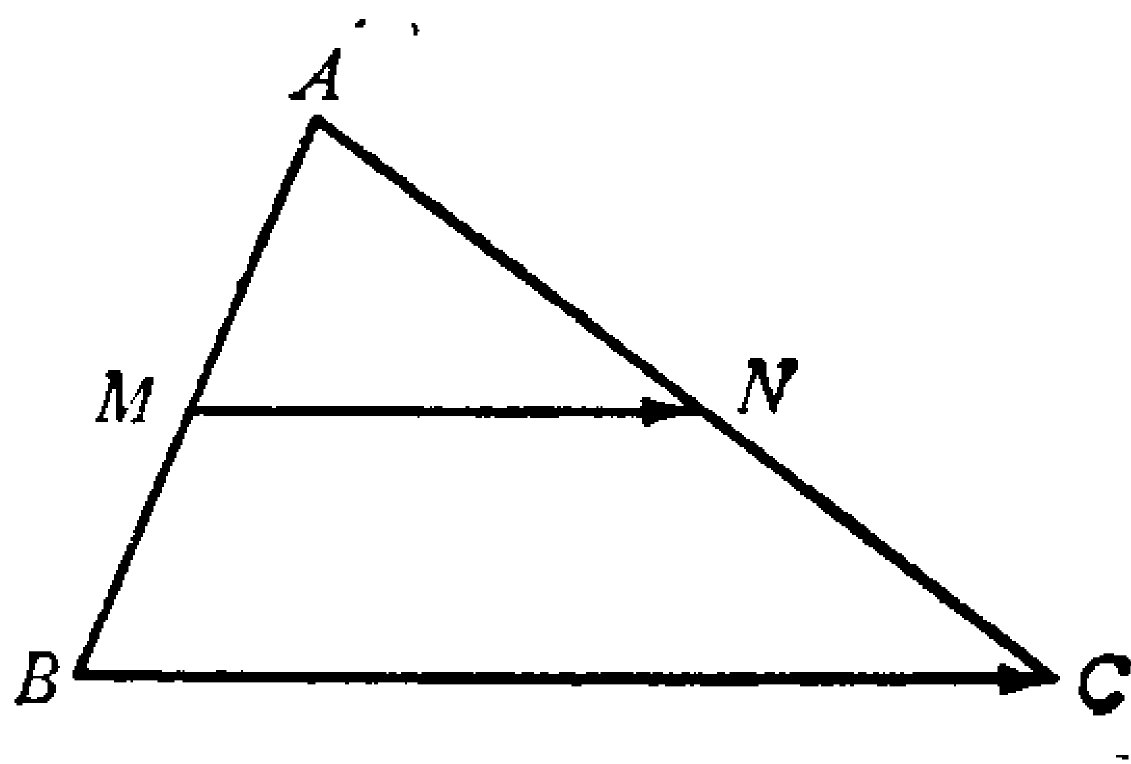


图 1-16

所以 $$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}),$$

但 $$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0},$$

因而 $$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即 $$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

例 2 用矢量法证明：连结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 设 $\triangle ABC$ 二边 AB, AC 之中点分别为 M、N(图 1-16)，那么

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}$，且 $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

由此例可见，用矢量运算可以比较简洁地证明一些几何命题。

习　　题

1．要使下列各式成立，矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 应满足什么条件?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

2．试解下列各题:

(1) 化简 $(x-y)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(x+y)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

(2) 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$;

(3) 从矢量方程组 $\begin{cases} 3\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b} \end{cases}$ 解出矢量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.

3．已知四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{CD}=5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c}$, 对角线 AC, BD 的中点分别为 E, F, 求 $\overrightarrow{EF}$.

4．设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, 证明 A、B、D 三点共线.

5．在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$, 证明 $ABCD$ 为梯形.

6．设 L, M, N, 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 的中点，证明：三中线矢量 $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形.

7．设 L、M、N 是 $\triangle ABC$ 三边的中点, O 是任意一点, 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}.$$

8．设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心, O 是任意一点, 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OM}.$$

9．在平行六面体 $ABCDEFGH$ (参看 §1 第 4 题图)中, 证明:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AG}.$$

10．用矢量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下两底边且等于它们长度和的一半.

11．用矢量法证明平行四边形对角线互相平分.

12. 设点 O 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，证明：

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$

13. 在上题的条件下，设 P 是任意点，证明：

$$\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PA_3}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=n\overrightarrow{PO}.$$

§1.4 矢量的线性关系与矢量的分解

矢量的加法和数与矢量的乘法统称为矢量的*线性运算*. 我们知道有限个矢量通过线性运算，它的结果仍然是一个矢量.

定义 1.4.1 由矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 与数量 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 所组成的矢量

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n,$$

叫做矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的*线性组合*.

当矢量 $\boldsymbol{a}$ 是矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合时，我们也说：矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示. 或者说，矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以分解成矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合.

我们约定，象 $\lambda\boldsymbol{a}$ 只有一个矢量与数量结合的情况，也称它为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的线性组合.

定理 1.4.1 如果矢量 $\boldsymbol{e}\neq\mathbf{0}$，那么矢量 $\boldsymbol{r}$ 与矢量 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可以用矢量 $\boldsymbol{e}$ 线性表示，或者说 $\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{e}$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}, \tag{1.4-1}$$

并且系数 x 被 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定.

这时 $\boldsymbol{e}$ 称为用线性组合来表示共线矢量的*基底*.

证 如果(1.4-1)成立，即有 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}$，那么由定义 1.3.1 立刻知 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线. 反过来，如果 $\boldsymbol{r}$ 与非零矢量 $\boldsymbol{e}$ 共线，那么一定存在实数 x，使得 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}$（见§1.3 中(1.3-5)的证明）. 显然如果 $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$，那么 $\boldsymbol{r}=0\cdot\boldsymbol{e}$，即 $x=0$.

最后证明(1.4-1)中的 x 是唯一的. 如果 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}=x'\boldsymbol{e}$，那么

$(x-x')\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$, 而 $\boldsymbol{e}\neq\mathbf{0}$, 所以 $x'=x$.

定理 1.4.2 如果矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可以用矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 或者说矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以分解成 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 的线性组合, 即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2, \tag{1.4-2}$$

并且系数 x, y 被 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定。

这时 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 叫做平面上矢量的基底。

证 首先, 因为矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线, 所以根据定义 1.1.4 有 $\boldsymbol{e}_1\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{e}_2\neq\mathbf{0}$. 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面, 如果 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$(或 $\boldsymbol{e}_2$)共线, 那么根据定理 1.4.1 有 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 其中 $y=0$(或 $x=0$), 如果 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 都不共线, 把它们归结到共同的始点 O,

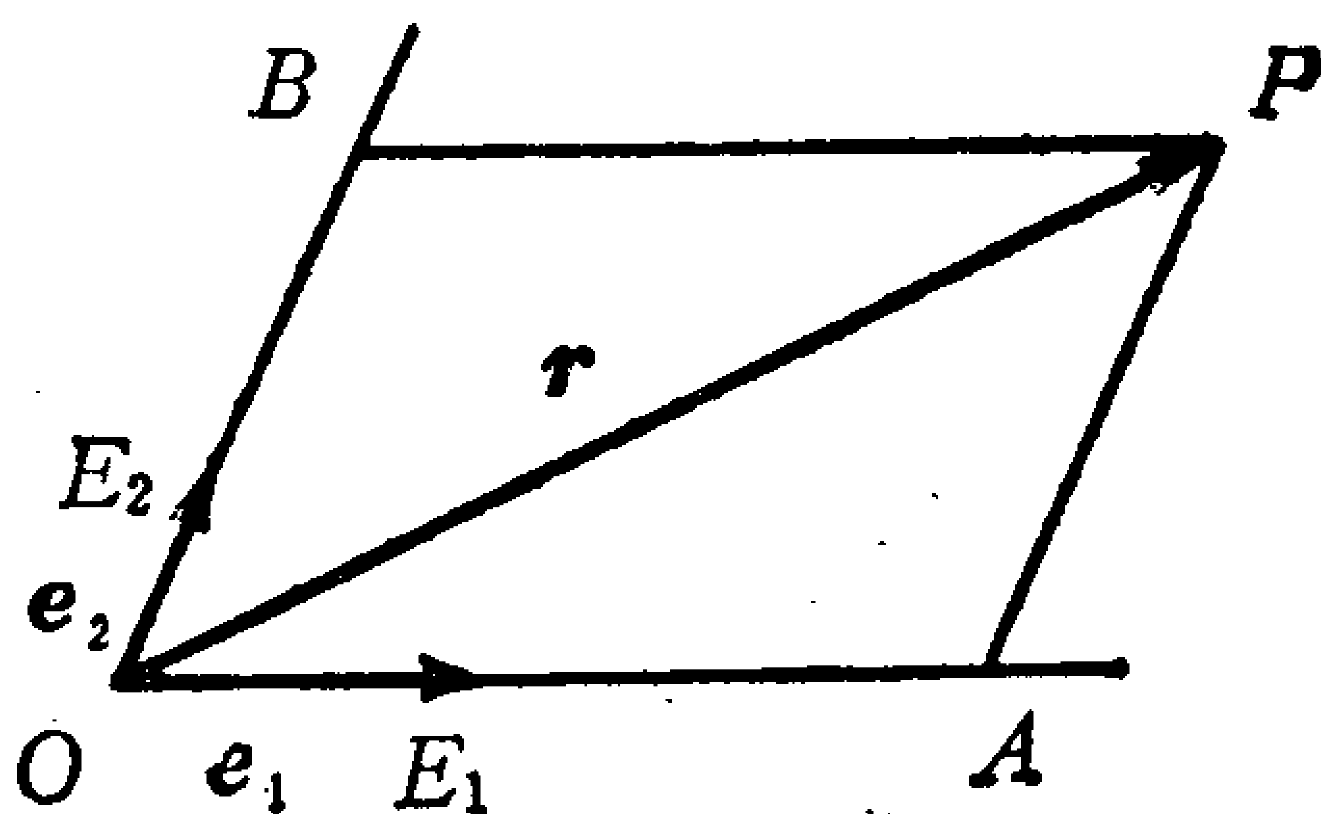


图 1-17

并设 $\overrightarrow{OE_i}=\boldsymbol{e}_i(i=1, 2)$, $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$, 那么经过 $\boldsymbol{r}$ 的终点 P 分别作 OE_2, OE_1 的平行线依次与直线 OE_1, OE_2 交于 A, B(图 1-17). 因为 $\overrightarrow{OA}\mathbin{/\mkern-5mu/}\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB}\mathbin{/\mkern-5mu/}\boldsymbol{e}_2$, 根据定理 1.4.1, 可设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{e}_2$, 所以根据矢量加法的平行四边形法则得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, 即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

反过来, 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 如果 x, y 有一是零, 例如 $x=0$, 那么 $\boldsymbol{r}=y\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线, 因此它与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面. 如果 $xy\neq0$, 那么 $x\boldsymbol{e}_1\mathbin{/\mkern-5mu/}\boldsymbol{e}_1$, $y\boldsymbol{e}_2\mathbin{/\mkern-5mu/}\boldsymbol{e}_2$, 从两矢量相加的平行四边形法则可知 $\boldsymbol{r}$ 与 $x\boldsymbol{e}_1$ 与 $y\boldsymbol{e}_2$ 共面, 因此 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 共面.

最后证明 x, y 由 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{r}$ 唯一确定. 因为如果

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2,$$

那么
$$(x-x')\boldsymbol{e}_1+(y-y')\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0},$$

如果 $x\neq x'$，那么 $\boldsymbol{e}_1=-\dfrac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{e}_2$，将有 $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$，这与定理假设矛盾，所以 $x=x'$. 同理，$y=y'$，因此 x, y 被唯一确定.

定理 1.4.3 如果矢量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 不共面，那么空间任意矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以由矢量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 线性表示，或者说空间任意矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以分解成矢量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3, \tag{1.4-3}$$

并且其中系数 x, y, z 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 唯一确定.

这时 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 叫做空间矢量的基底.

证 首先因为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 不共面，所以根据定义 1.1.5 必然有 $\boldsymbol{e}_i\neq\boldsymbol{0}(i=1, 2, 3)$，且它们彼此不共线.

如果 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 之中两个矢量共面，那么根据定理 1.4.2 立即可知(1.4-3)成立，例如 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 共面，那么有 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3$ 等等.

如果 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 之中任何两个矢量都不共面，将矢量 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{e}_i(i=1, 2, 3)$ 归结到共同的始点 O，并设 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$, $\overrightarrow{OE_i}=\boldsymbol{e}_i(i=1, 2, 3)$ 过 $\boldsymbol{r}$ 的终点 P 作三平面分别与平面 OE_2E_3, OE_3E_1, OE_1E_2 平行，且分别和直线 OE_1, OE_2, OE_3 相交于 A, B, C 三点，因此作成了以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 为三棱，$\overrightarrow{OP}$ 为对角线的平行六面体(图 1-18)，于是得到:

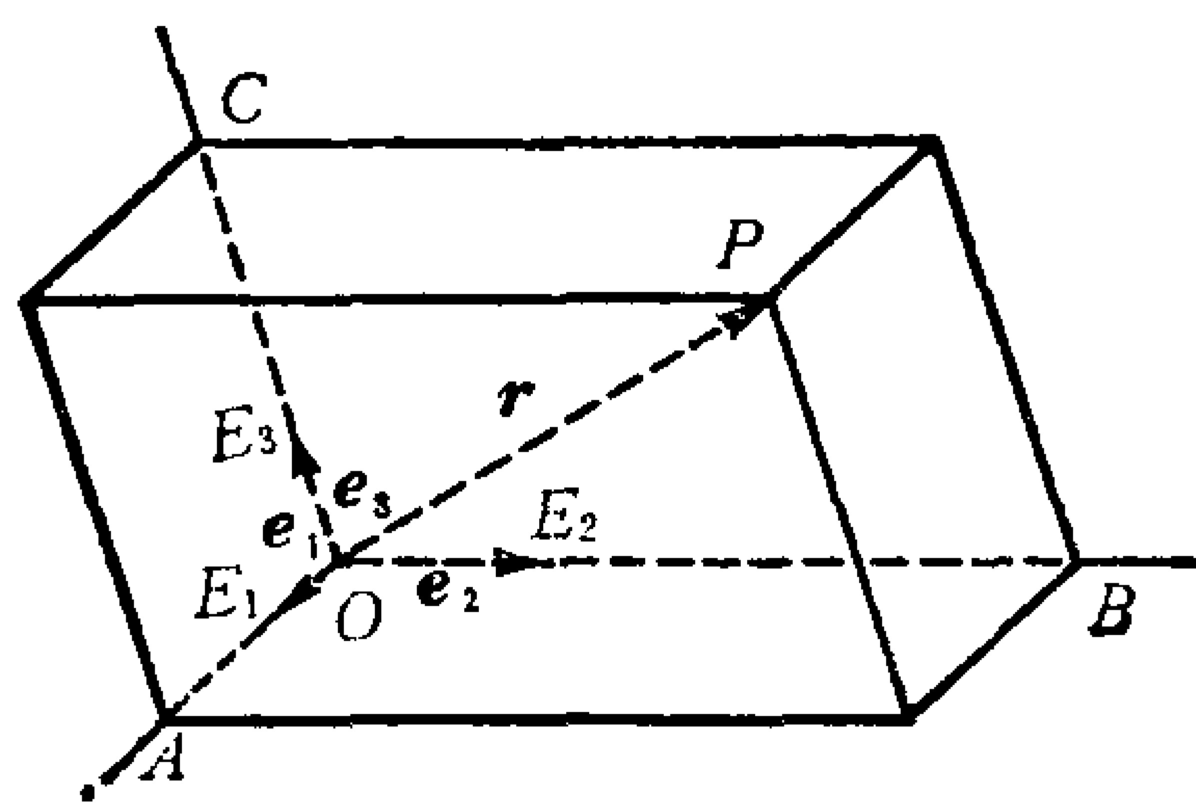


图 1-18

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

又根据定理 1.4.1，可设 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{e}_3$，所以得到

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3.$$

下面证明系数 x, y, z 由 $\boldsymbol{e}_i(i=1, 2, 3)$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定. 因为

如果

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3,$$

那么 $$(x-x')\boldsymbol{e}_1+(y-y')\boldsymbol{e}_2+(z-z')\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0};$$

如果 $$x\neq x',$$

那么 $$\boldsymbol{e}_1=-\frac{y-y'}{x-x'}\boldsymbol{e}_2-\frac{z-z'}{x-x'}\boldsymbol{e}_3;$$

根据定理1.4.2可知 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 共面，这与定理假设矛盾，所以有 $x=x'$. 同理，$y=y'$, $z=z'$，因此 x, y, z 被唯一确定.

例 1 已知三角形 OAB，其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 而 M, N 分别是三角形两边 OA, OB 上的点，且有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a}$, $(0<\lambda<1)$, $\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b}(0<\mu<1)$，设 AN 与 BM 相交于 P(图 1-19)，试把矢量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$ 分解成 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

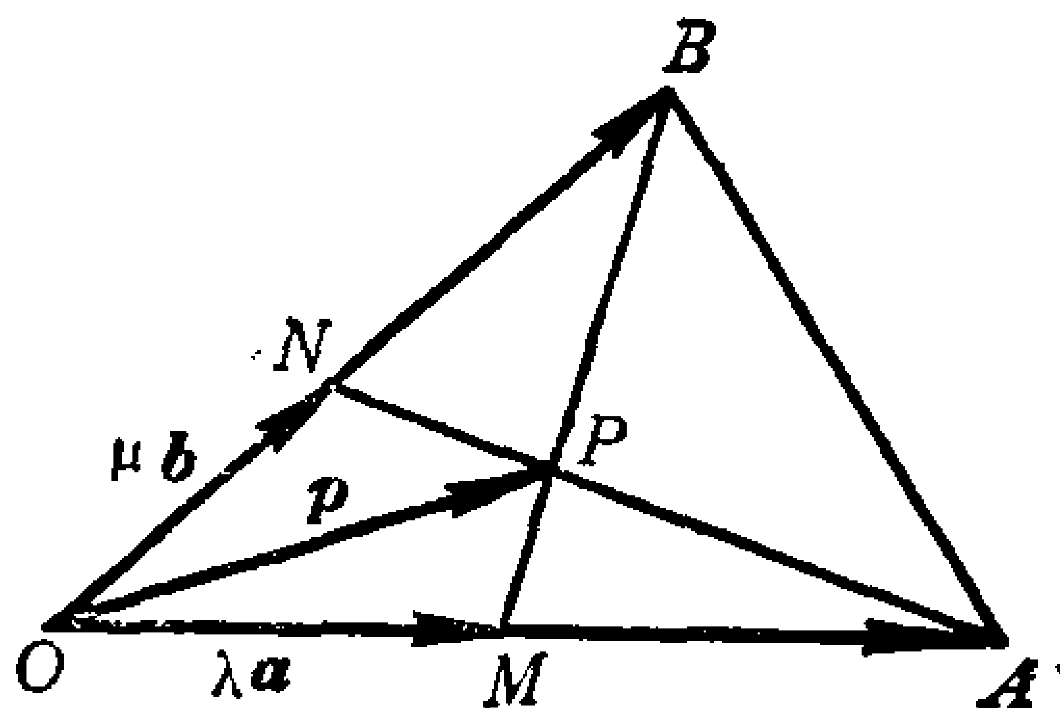


图 1-19

解 因为

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP},$$

或 $$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP};$$

而 $$\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{ON}=\mu\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}=n(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})=n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}),$$

所以 $$\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{a}+m(\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b},\tag{1}$$

或 $$\boldsymbol{p}=\mu\boldsymbol{b}+n(\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b})=n\boldsymbol{a}+\mu(1-n)\boldsymbol{b}.\tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以根据定理1.4.2由(1)，(2)得:

$$\begin{cases}\lambda(1-m)=n,\\ m=\mu(1-n).\end{cases}$$

由上方程组解得:

$$m=\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu},\qquad n=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu},$$

所以得:
$$\boldsymbol{p}=\lambda\left[1-\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\right]\boldsymbol{a}+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b},$$

即
$$\boldsymbol{p}=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{a}+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}\boldsymbol{b}.$$

例 2 证明四面体对边中点的连线交于一点，且互相平分.

证 设四面体 $ABCD$ 一组对边 AB, CD 的中点 E, F 的连线为 EF, 它的中点为 P_1 (图 1-20), 其余二组对边中点连线的中点分别为 P_2, P_3, 下面只要证明 P_1、P_2、P_3 三点重合就可以了. 取不共面的三矢量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_3$, 先求 $\overrightarrow{AP_1}$ 用 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 线性表示的关系式.

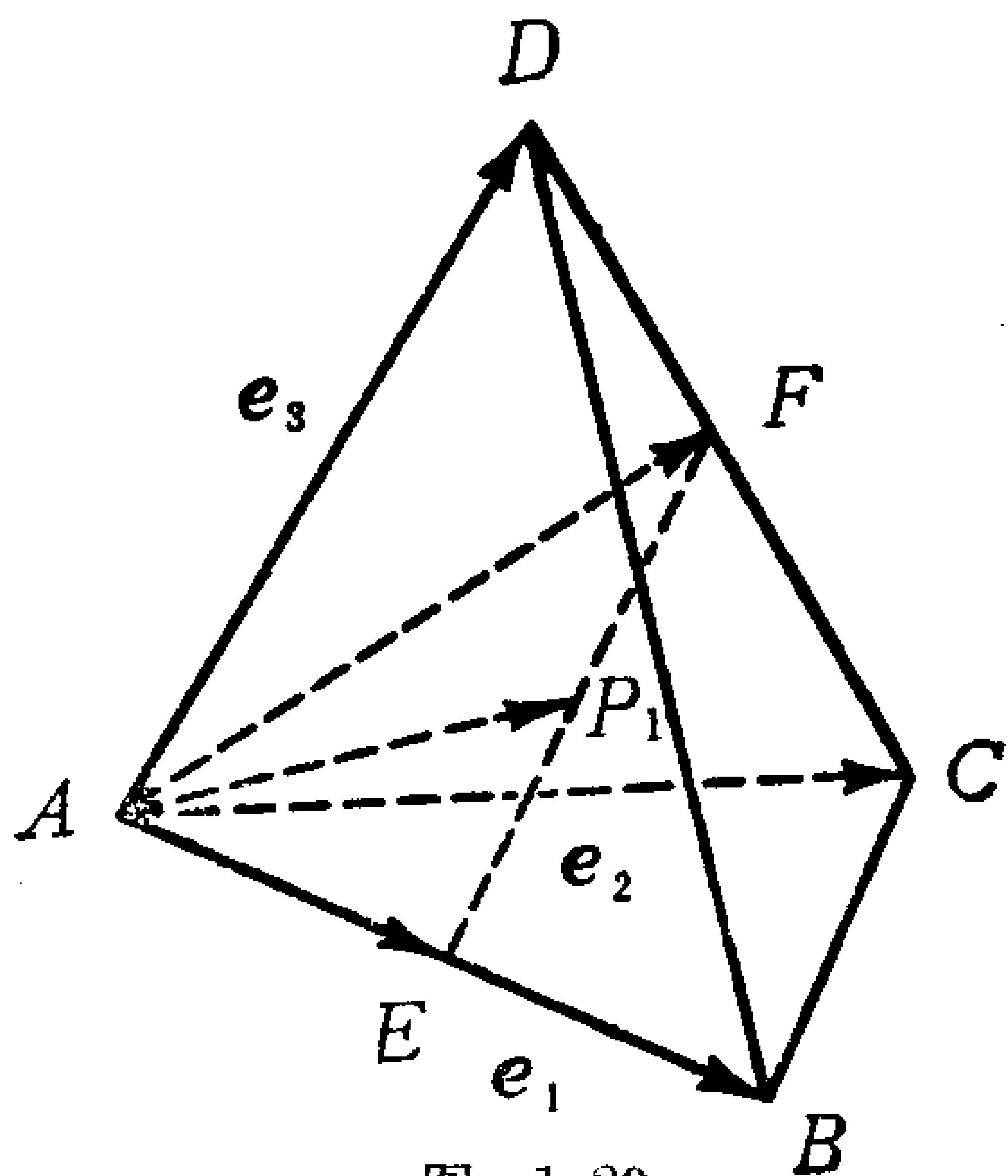


图 1-20

连接 AF, 因为 AP_1 是 $\triangle AEF$ 的中线, 所以有

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}),$$

又因为 AF 是 $\triangle ACD$ 的中线, 所以又有

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

而
$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得
$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\right]=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

同理可得
$$\overrightarrow{AP_i}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3), \quad (i=2,\ 3)$$

所以
$$\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AP_3},$$

从而知 P_1, P_2, P_3 三点重合, 命题得证.

我们还可以把矢量的线性组合的概念加以扩充，引进线性相关和线性无关的概念.

定义 1.4.2 对于 $n(n\geqslant 1)$ 个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，如果存在不全为零的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}, \tag{1.4-4}$$

那么 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 叫做线性相关，不是线性相关的矢量叫做线性无关. 换句话说，矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 叫做线性无关就是指：只有当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 时，(1.4-4)才成立.

推论 一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 线性相关的充要条件为 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

定理 1.4.4 在 $n\geqslant 2$ 时，矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关的充要条件是其中有一个矢量是其余矢量的线性组合.

证 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关，那么(1.4-4)成立，且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中至少有一个不等于 0，不妨设 $\lambda_n\neq 0$，那么 $\boldsymbol{a}_n$ 可以写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{a}_n=-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_2-\cdots-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\boldsymbol{a}_{n-1};$$

反过来，设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 中有一个矢量，不妨设为 $\boldsymbol{a}_n$，它是其余矢量的线性组合，即

$$\boldsymbol{a}_n=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1},$$

改写一下，就有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}+(-1)\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}.$$

因为数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, -1$ 不全为 0（至少 $-1\neq 0$），所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关.

定理 1.4.5 如果一组矢量中的一部分矢量线性相关，那么这一组矢量就线性相关.

证 设有一组矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \cdots, \boldsymbol{a}_r\ (s<r)$，其中一部分比如说 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性相关，即有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots,$

λ_s 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{a}_s=\mathbf{0},$$

由上式显然有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{a}_s+0\boldsymbol{a}_{s+1}+\cdots+0\boldsymbol{a}_r=\mathbf{0},$$

因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 中至少有一不等于 0, 所以 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性相关.

推论 一组矢量如果含有零矢量，那么这组矢量必线性相关.

利用矢量间的线性相关的概念，可以把矢量间的共线与共面的条件推广到更一般的形式.

定理 1.4.6 两矢量共线的充要条件是它们线性相关.

证 设两矢量为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 如果它们线性相关，那么有

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0},$$

并且 λ, μ 不全为零，不妨设 $\lambda\neq0$, 从而得

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}.$$

如果 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, 由定理 1.4.1 知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线; 如果 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 显然 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(定义 1.1.4).

反过来，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，如果 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$, 那么由定理 1.4.1 知

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b},$$

即

$$\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关; 如果 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, 那么由定理 1.4.5 的推论知, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性相关. 定理得证.

这个定理告诉我们，如果要判别两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，只要判别是否存在不全为零的两个数 λ, μ, 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0}. \tag{1.4-5}$$

类似地，读者自己可以证明下面的定理.

定理1.4.7 三矢量共面的充要条件是它们线性相关.

按照这个定理，要判别三矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是否共面，只要判别是否存在不全为零的三个数 λ, μ, ν，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}. \tag{1.4-6}$$

对于空间的任何四个或四个以上的矢量，我们有下面的定理与推论.

定理1.4.8 空间任何四个矢量总是线性相关.

证 设空间任意四个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$，如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面，那么根据定理1.4.7它们线性相关．再根据定理1.4.5即知所说四个矢量线性相关．如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面，由定理1.4.3可设 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$，根据定理1.4.4知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ 线性相关.

由本定理结合定理1.4.5立即可得:

推论 空间四个以上矢量总是线性相关.

例3 设 $OP_i=\boldsymbol{r}_i(i=1, 2, 3)$，试证 P_1, P_2, P_3 三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1, λ_2, λ_3 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0},$$

且 $$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

证 设 P_1, P_2, P_3 三点共线，那么 $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ 两矢量共线，因此两矢量 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 与 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 线性相关，所以存在不全为0的数 m, n，使

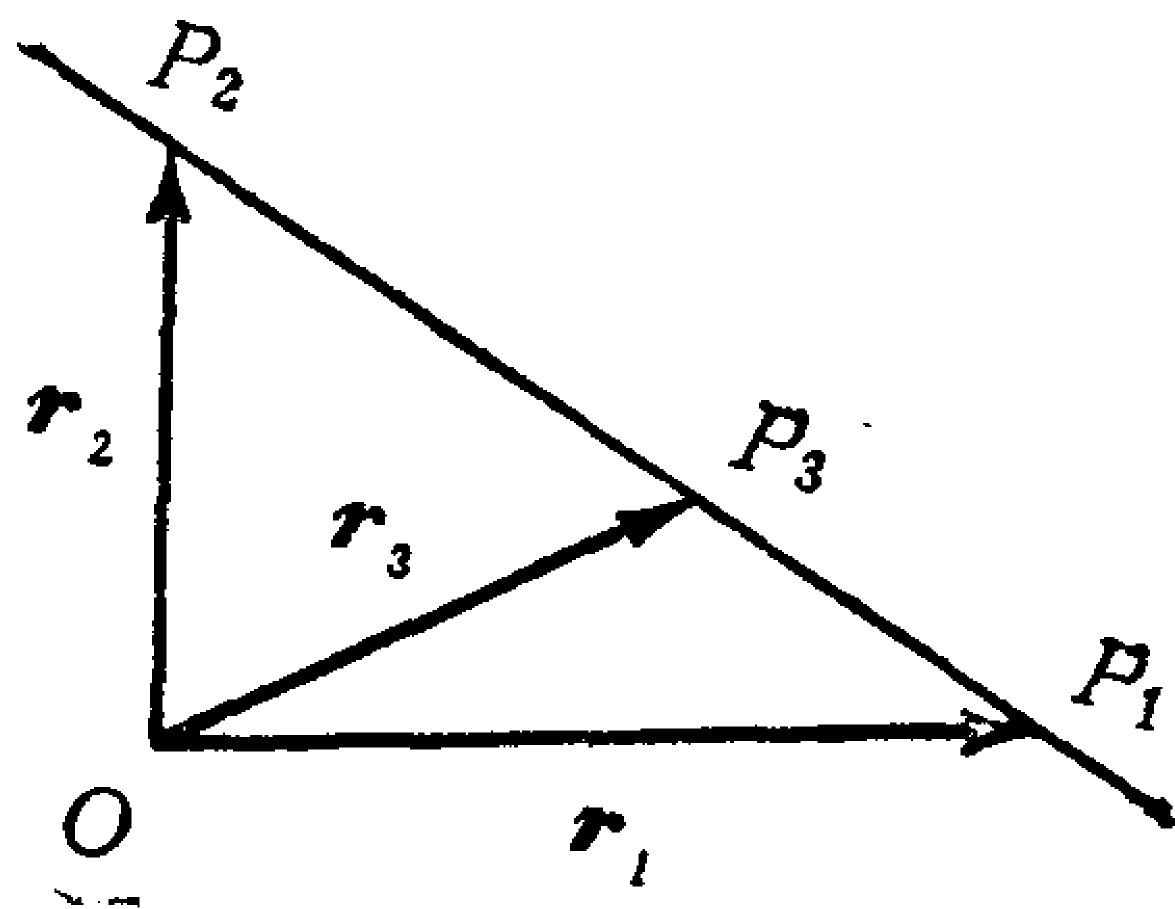


图 1-21

$$m\overrightarrow{P_1P_3}+n\overrightarrow{P_2P_3}=0.$$

即 $$m(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+n(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{0},$$

由此得 $$m\boldsymbol{r}_1+n\boldsymbol{r}_2-(m+n)\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0},$$

令 $\lambda_1=m$, $\lambda_2=n$, $\lambda_3=-(m+n)$，那么有 λ_1、λ_2、λ_3 不全为0，使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0},\ 且\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

反过来，设有不全为0的数$\lambda_i(i=1, 2, 3)$使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{0}, \text{且} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,$$

根据条件不妨设$\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$，代入上面矢量等式整理得

$$\lambda_1(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{0}$$

即
$$\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=\boldsymbol{0},$$

但由$\lambda_1+\lambda_2\neq 0$知$\lambda_1$、$\lambda_2$不全为0，所以$\overrightarrow{P_1P_3}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$共线，也就是$P_1$，$P_2$，$P_3$三点共线。

例4 设$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$为两不共线矢量，证明矢量$\boldsymbol{u}=a_1\boldsymbol{a}+b_1\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}=a_2\boldsymbol{a}+b_2\boldsymbol{b}$共线的充要条件是$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$.

证 根据定理1.4.6，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$两矢量共线的充要条件是存在不全为零的数λ, μ使

$$\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},$$

即
$$(a_1\lambda+a_2\mu)\boldsymbol{a}+(b_1\lambda+b_2\mu)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

因为$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$为两不共线的矢量，也就是两矢量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$线性无关，所以

$$a_1\lambda+a_2\mu=0,$$
$$b_1\lambda+b_2\mu=0,$$

又因为λ, μ不全为零，从而得矢量$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$共线的充要条件为①

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0.$$

习　　题

1. 在平行四边形$ABCD$中，

(1) 设对角线$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$, 求$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DA}$;

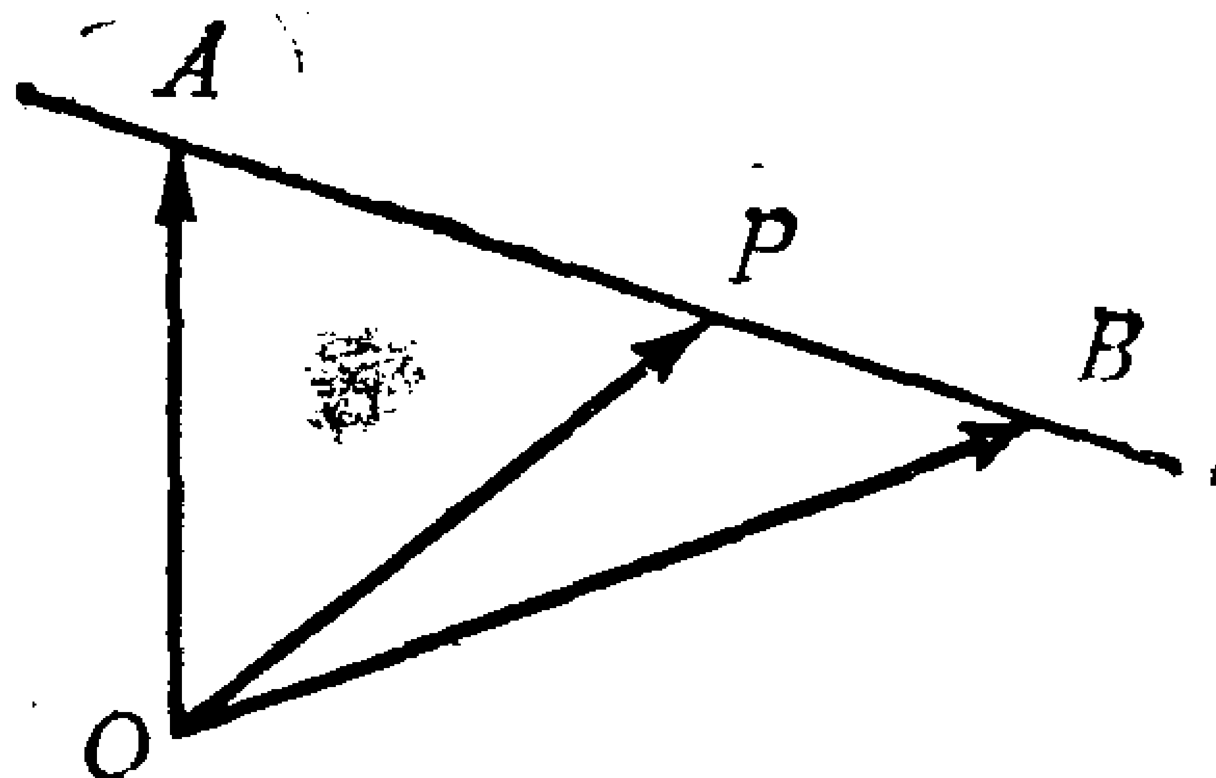
(2) 设边BC和CD的中点为M和N，且$\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{q}$, 求$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.

① 齐次线性方程组有非零解的充要条件为其系数行列式等于零，见附录。

2. 在平行六面体 $ABCD$-$EFGH$ 中(参看§1, 第4题图)设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{e}_3$, 三个面上对角线矢量设为 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{r}$. 试把矢量 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{p}+\mu\boldsymbol{q}+\nu\boldsymbol{r}$ 写成 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合.

3. 设一直线上三点 A, B, P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ $(\lambda\neq-1)$, O 是空间任意一点, 求证:

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$



第3题

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2$.

(1) 设 D、E 是边 BC 的三等分点, 将矢量 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ 分解为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合;

(2) 设 AT 是角 A 的平分线(它与 BC 交于 T 点), 将 $\overrightarrow{AT}$ 分解为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合.

5. 在四面体 $OABC$ 中, 设点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心(三中线之交点), 求矢量 $\overrightarrow{OG}$ 对于矢量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 的分解式.

6. 用矢量法证明以下各题:

(1) 三角形三中线共点;

(2) P 是 $\triangle ABC$ 重心的充要条件是 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$.

7. 已知矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不共线, 问 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 是否线性相关?

8. 证明三个矢量 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{e}_1+12\boldsymbol{e}_2+11\boldsymbol{e}_3$ 共面, 其中 $\boldsymbol{a}$ 能否用 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 线性表示?如能表示, 写出线性表示关系式.

9. 证明三个矢量 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}$, $\mu\boldsymbol{b}-\nu\boldsymbol{c}$, $\nu\boldsymbol{c}-\lambda\boldsymbol{a}$ 共面.

10. 设 $\overrightarrow{OP_i}=\boldsymbol{r}_i(i=1, 2, 3, 4)$, 试证 P_1, P_2, P_3, P_4 四点共面的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda_i(i=1, 2, 3, 4)$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{r}_1+\lambda_2\boldsymbol{r}_2+\lambda_3\boldsymbol{r}_3+\lambda_4\boldsymbol{r}_4=\boldsymbol{0}, \text{ 且 } \sum_{i=1}^{4}\lambda_i=0.$$

§1.5 标架与坐标

在空间任意取定点 O, 从 O 引出三个不共面的矢量 $\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3}=\boldsymbol{e}_3$, 那么由定理 1.4.3 知, 空间任何矢量 $\boldsymbol{r}$ 都可以分解成 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 的线性组合

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3, \tag{1}$$

并且这里的 x, y, z 是唯一的一组有序实数.

定义 1.5.1 空间中的一个定点 O, 连同三个不共面的有序矢量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 的全体, 叫做空间中的一个标架, 记做 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 都是单位矢量, 那么 $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 叫做*笛卡尔标架*; $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 两两相互垂直的笛卡尔标架叫做*笛卡尔直角标架*, 简称*直角标架*; 在一般的情况下, $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 叫做*仿射标架*.

对于标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 间的相互关系和右手拇指、食指、中指相同, 那么这标架叫做*右旋标架*或称*右手标架*. 如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 和左手的拇指、食指、中指相同, 那么这个标架叫做*左旋标架*或称*左手标架*(图 1-22).

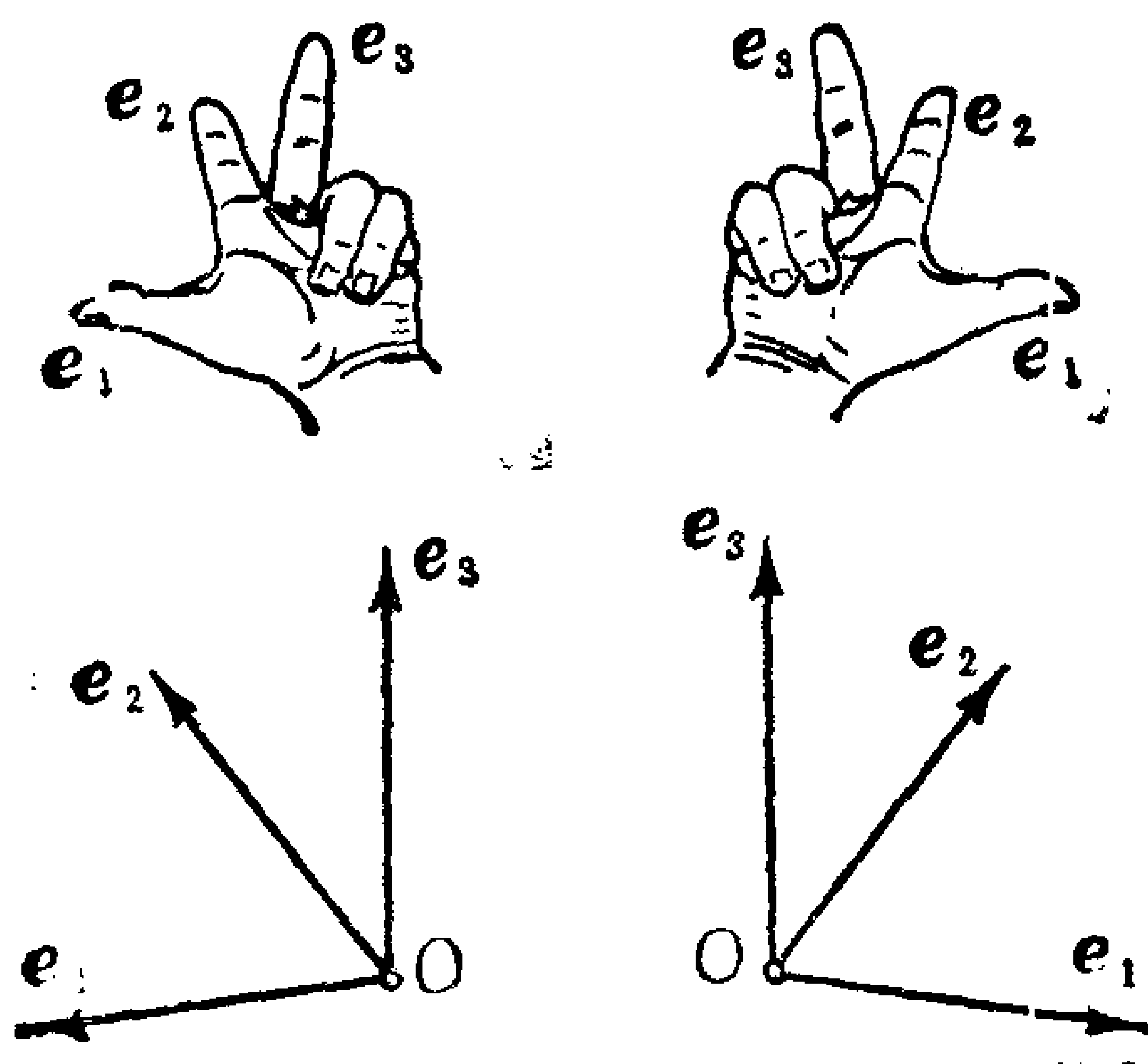


图 1-22

定义 1.5.2 (1)式中的 x, y, z 叫做矢量 $\boldsymbol{r}$ 关于标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的分量或称为坐标，记做 $\boldsymbol{r}\{x, y, z\}$ 或 $\{x, y, z\}$.

定义 1.5.3 对于取定了标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的空间中任意点 P，矢量 $\overrightarrow{OP}$ 叫做点 P 的径矢，径矢 $\overrightarrow{OP}$ 关于标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的分量 x, y, z 叫做点 P 关于标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的坐标，记做 $P(x, y, z)$ 或 (x, y, z).

当空间取定标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 之后，空间全体矢量的集合或者全体点的集合与全体有序三数组 x, y, z 的集合具有一一对应的关系，这种一一对应的关系叫做空间矢量或点的一个坐标系.

由于空间坐标系由标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 完全决定，因此空间坐标系也常用标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 来表示，这时点 O 叫做坐标原点；矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 都叫做坐标矢量.

由右旋标架决定的坐标系叫做*右旋坐标系*或称*右手坐标系*，由左旋标架决定的坐标系叫做*左旋坐标系*或称*左手坐标系*；仿射标架、笛卡尔标架与直角标架所确定的坐标系分别叫做*仿射坐标系*、*笛卡尔坐标系*与*直角坐标系*.

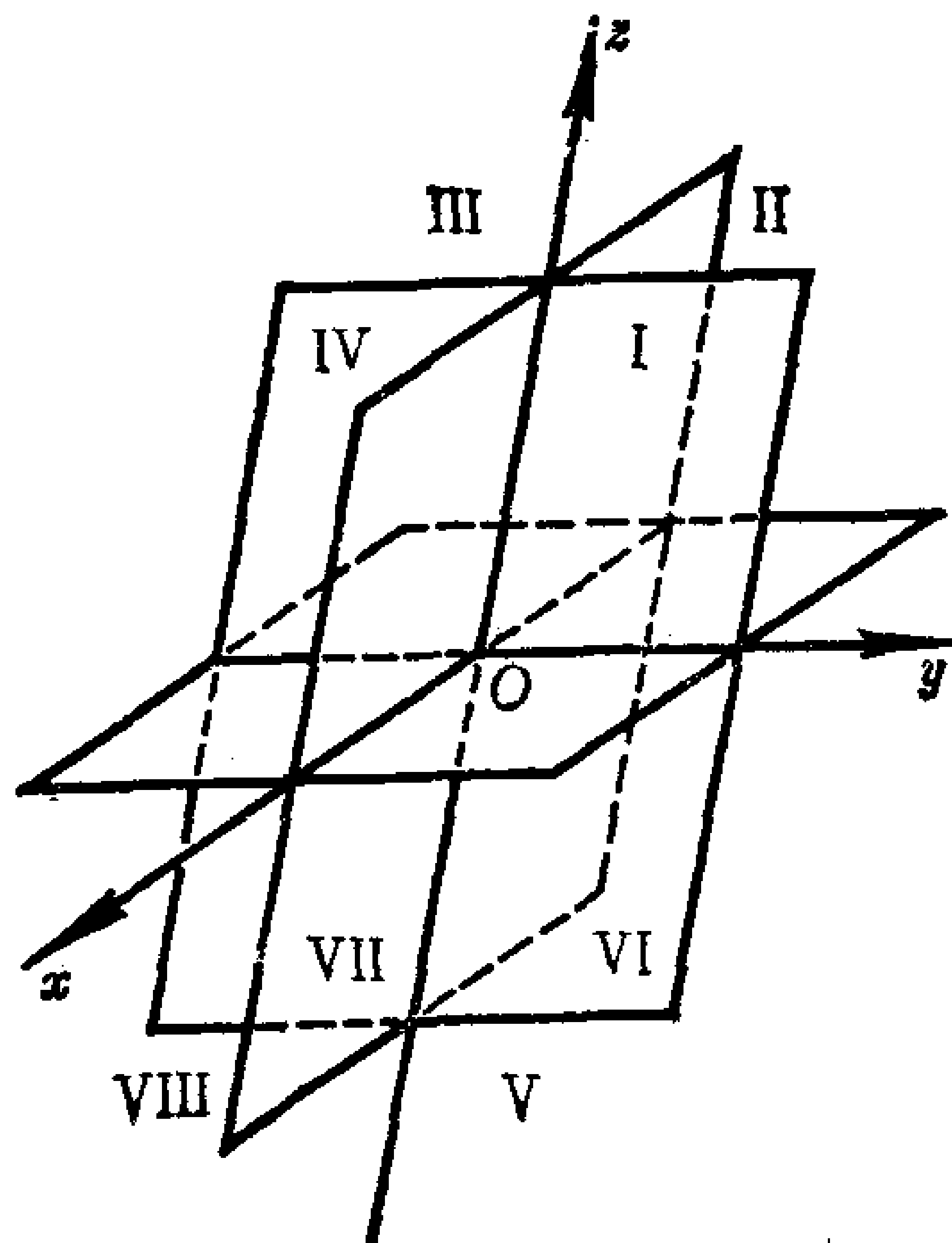


图 1-23

我们特别约定，以后用到直角坐标系时，坐标矢量用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示，即用 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 表示直角坐标系. 我们以后在讨论空间问题时，所采用的坐标系，一般都是空间右手直角坐标系.

过点 O 沿着三坐标矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的方向引三轴 Ox, Oy, Oz，这样我们也可以用这三条具有公共点 O 的不共面的轴 Ox, Oy 与

Oz 来表示空间坐标系，并把它记做 $O\text{-}xyz$，这时点 O 叫做空间坐标系的原点，三条轴 Ox, Oy 与 Oz 都叫做坐标轴，并依次叫做 x 轴，y 轴与 z 轴. 每两条坐标轴所决定的平面叫做坐标面，按照坐标面所包含的坐标轴，分别叫做 xOy 平面，yOz 平面与 xOz 平面.

三个坐标平面把空间划分成八个区域，每一个区域都叫做卦限，如图 1-23 中的八个区域，按排列顺序 I, II, …, VIII，依次叫做第 I 卦限，第 II 卦限，…，第 VIII 卦限.

显然在坐标面上的点的坐标有一为零，例如 xOy 面上的点的坐标中 $z=0$. 在坐标轴上的点的坐标有两个为零，例如 x 轴上的点的坐标中 $y=z=0$，原点的坐标为(0, 0, 0).

在同一卦限内点的坐标的符号是一致的，但不同卦限内的点的坐标符号都不一样. 各卦限内点的坐标(x, y, z)的符号如下表所示.

坐标＼卦限	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

类似地，利用矢量可以引进平面上的标架与坐标的概念. 在平面上取定点 O 与两不共线的矢量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$，那么它们就构成了平面上的标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$，通过(1.4-2)就可以把平面上的任意矢量 $\boldsymbol{r}$ 与有序实数对 x, y 之间建立一一对应关系，而平面上的任意点 P，通过径矢 $\overrightarrow{OP}$ 由(1.4-2)也可与有序实数对 x, y 建立一一对应，这样由标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 就确定了平面上的一个坐标系，并记做 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$，而矢量 $\boldsymbol{r}$ 与点 P 的坐标分别记做 $\boldsymbol{r}\{x, y\}$ 与 $P(x, y)$.

过点 O 沿 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的方向分别引两轴 Ox, Oy. 这就是坐标

轴，O 为坐标原点，我们也可以用 O-xy 来记平面坐标系．如果 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 都是单位矢量，且 $\boldsymbol{e}_1$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_2$，那么这时所确定的坐标系，就是我们所熟知的平面直角坐标系．在一般情况下，我们称它为平面仿射坐标系．我们约定，平面直角坐标系的坐标矢量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 改写为单位矢量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$，并用 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ 来记平面直角坐标系．

下面我们用坐标进行矢量的运算．

1) 用矢量的始点和终点的坐标表示矢量的分量．

定理 1.5.1 矢量的分量等于其终点的坐标减去其始点的坐标．

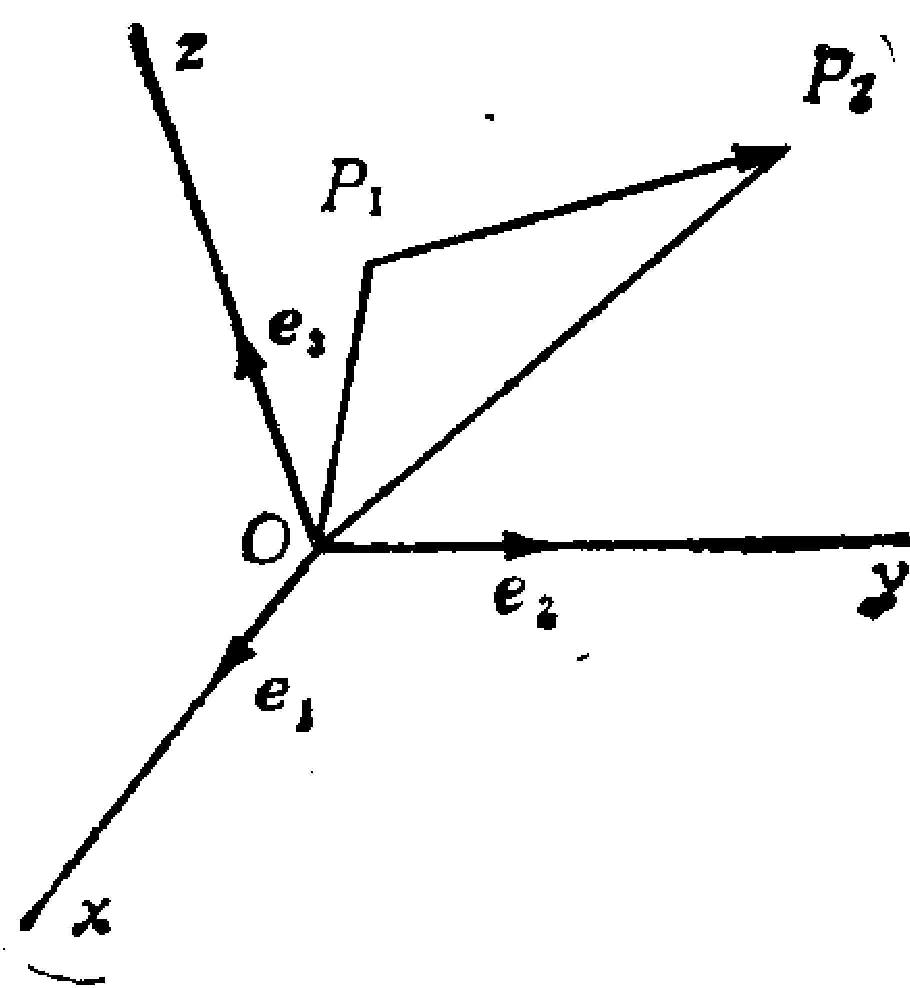


图 1-24

证 设矢量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的始点与终点分别为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$（图 1-24），那么

$$\overrightarrow{OP_1} = x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3,$$

$$\overrightarrow{OP_2} = x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3,$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\\ &= (x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + z_2\boldsymbol{e}_3) - (x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2 + z_1\boldsymbol{e}_3)\\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{e}_1 + (y_2 - y_1)\boldsymbol{e}_2 + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}. \qquad (1.5\text{-}1)$$

2) 用矢量的分量进行矢量的线性运算．

定理 1.5.2 两矢量的和的分量等于两矢量对应的分量的和．

证 设 $\boldsymbol{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$，那么

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}+\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}\\
&=(X_1\boldsymbol{e}_1+Y_1\boldsymbol{e}_2+Z_1\boldsymbol{e}_3)+(X_2\boldsymbol{e}_1+Y_2\boldsymbol{e}_2+Z_2\boldsymbol{e}_3)\\
&=(X_1+X_2)\boldsymbol{e}_1+(Y_1+Y_2)\boldsymbol{e}_2+(Z_1+Z_2)\boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}
$$

所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{X_1+X_2,\ Y_1+Y_2,\ Z_1+Z_2\}. \tag{1.5-2}$$

定理1.5.3 数乘矢量的分量等于这个数与矢量的对应分量的积.

证 设 $\boldsymbol{a}=\{X,\ Y,\ Z\}$，那么

$$
\begin{aligned}
\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda\{X,\ Y,\ Z\}=\lambda(X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2+Z\boldsymbol{e}_3)\\
&=\lambda X\boldsymbol{e}_1+\lambda Y\boldsymbol{e}_2+\lambda Z\boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}
$$

所以

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda X,\ \lambda Y,\ \lambda Z\}. \tag{1.5-3}$$

3）两矢量共线的条件，三矢量共面的条件.

定理1.5.4 两个非零矢量 $\boldsymbol{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$，$\boldsymbol{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$ 共线的充要条件是对应分量成比例，即

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}. \tag{1.5-4}$$

证 根据定理1.4.1，矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是其中一矢量可用另一矢量来线性表示，不妨设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，于是

$$\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}=\lambda\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}=\{\lambda X_2,\ \lambda Y_2,\ \lambda Z_2\},$$

由此得到 $\qquad X_1=\lambda X_2,\ Y_1=\lambda Y_2,\ Z_1=\lambda Z_2,$

所以 $$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}.$$

当分母为零时，我们约定分子也为零.

推论 三个点 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 和 $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$ 共线的充要条件是

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}. \tag{1.5-5}$$

定理1.5.5 三个非零矢量 $\boldsymbol{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$ 和 $\boldsymbol{c}\{X_3, Y_3, Z_3\}$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0. \tag{1.5-6}$$

证 根据定理1.4.7,三矢 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是存在不全为0的数 λ, μ, ν 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

由此可得

$$\lambda X_1+\mu X_2+\nu X_3=0,$$
$$\lambda Y_1+\mu Y_2+\nu Y_3=0,$$
$$\lambda Z_1+\mu Z_2+\nu Z_3=0;$$

因为 λ, μ, ν,不全为零,所以

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0.$$

推论 四个点 $A_i(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, 3, 4)$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0; \tag{1.5-7}$$

或

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1.5-7'}$$

4) 线段的定比分点坐标.

对于有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}(P_1\neq P_2)$, 如果点 P 满足 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$ 我们就称点 P 是把有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 分成定比 λ 的分点. 根据上述条

件，给定了点 P_1，P_2，分点 P 就由 λ 唯一确定. 当 $\lambda>0$ 时，$\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 同向，点 P 是线段 P_1P_2 内部的点；当 $\lambda<0$时，$\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{PP_2}$ 反向，P 是线段 P_1P_2 外部的点. 并且注意，$\lambda\neq-1$，不然，如果 $\overrightarrow{P_1P}=-\overrightarrow{PP_2}$，将有 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_2}$ 由此得 $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}$，导致 $P_1=P_2$，与条件 $P_1\neq P_2$ 矛盾. 现在我们来求分已知有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 成定比 λ 的分点 P 的坐标.

定理1.5.6 设有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的始点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $P_2(x_2, y_2, z_2,)$（图 1-25），那么分有向线段 P_1P_2 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$的分点 P 的坐标是

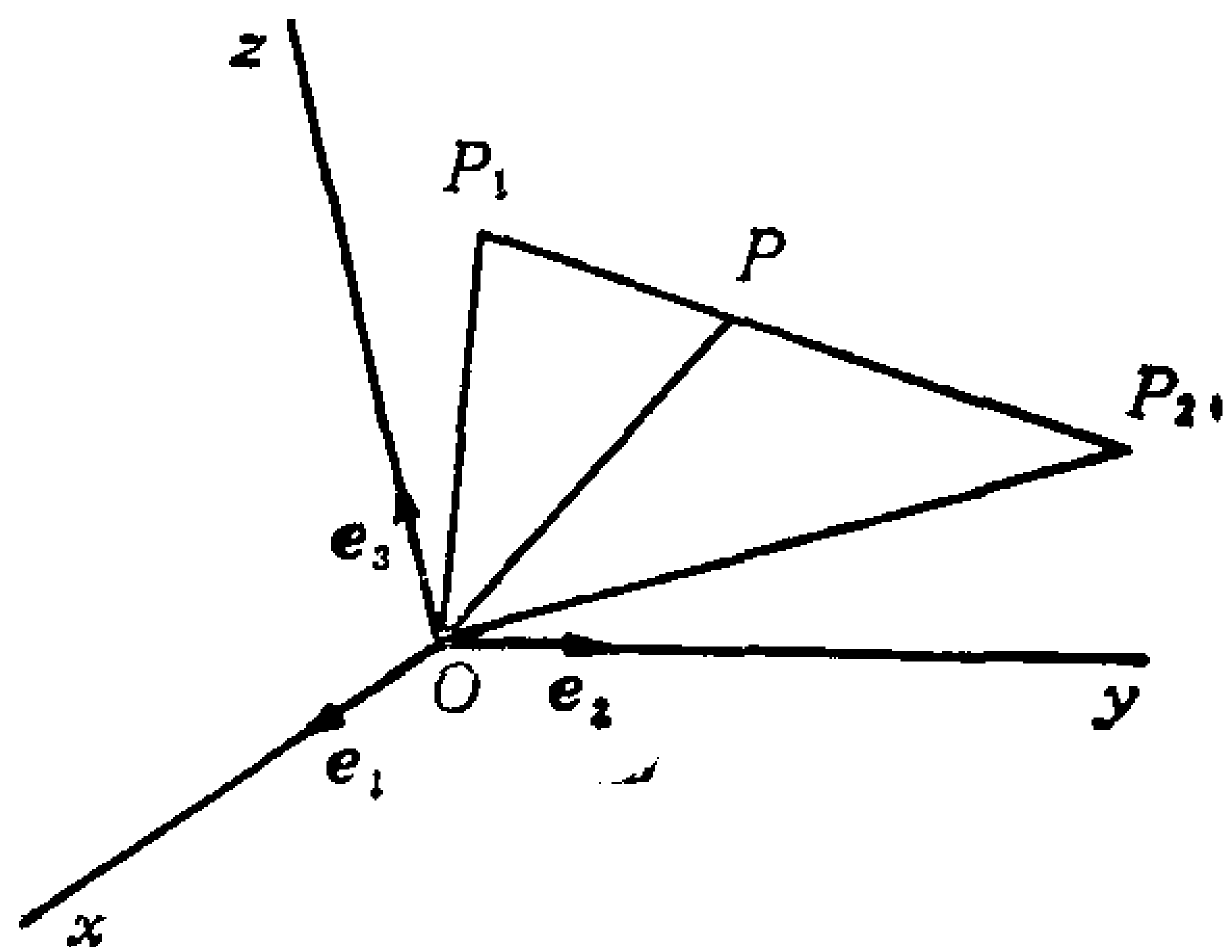


图 1-25

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (1.5\text{-}8)$$

证 由已知条件得

$$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2},$$

而 $$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1},\quad \overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP},$$

所以 $$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}),$$

从而有 $$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda},$$

将 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP}$ 的分量代入，得 P 点的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

推论 设 $P_i(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2)$，那么线段 P_1P_2 的中点坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (1.5\text{-}9)$$

例 已知三角形三顶点为 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i=1, 2, 3)$, 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的重心(即三角形三中线的公共点)的坐标.

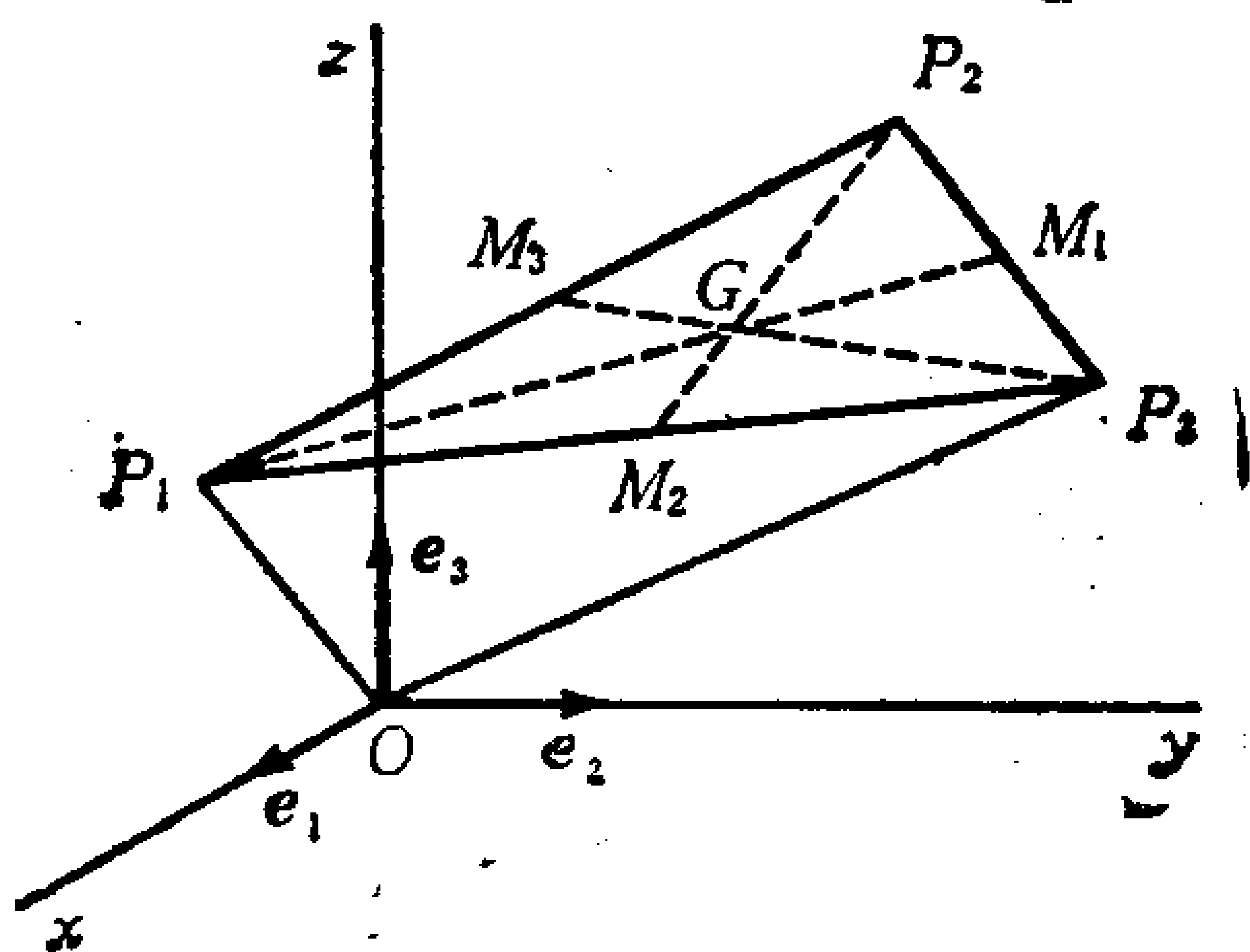


图 1-26

解 设 $\triangle P_1P_2P_3$ 的三中线为 $P_iM_i(i=1, 2,3)$, 其中顶点 P_i 的对边上的中点为 $M_i(i=1, 2, 3)$, 三中线的公共点为 $G(x, y, z)$, 因此有

$$\overrightarrow{P_1G}=2\overrightarrow{GM_1},$$

即重心 G 把中线分成定比 $\lambda=2$.

因为 M_1 为 P_2P_3 的中点, 所以根据公式(1.5-9)有

$$M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right),$$

再根据公式(1.5-8)可得

$$x=\frac{x_1+2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{1+2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3), \quad z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3),$$

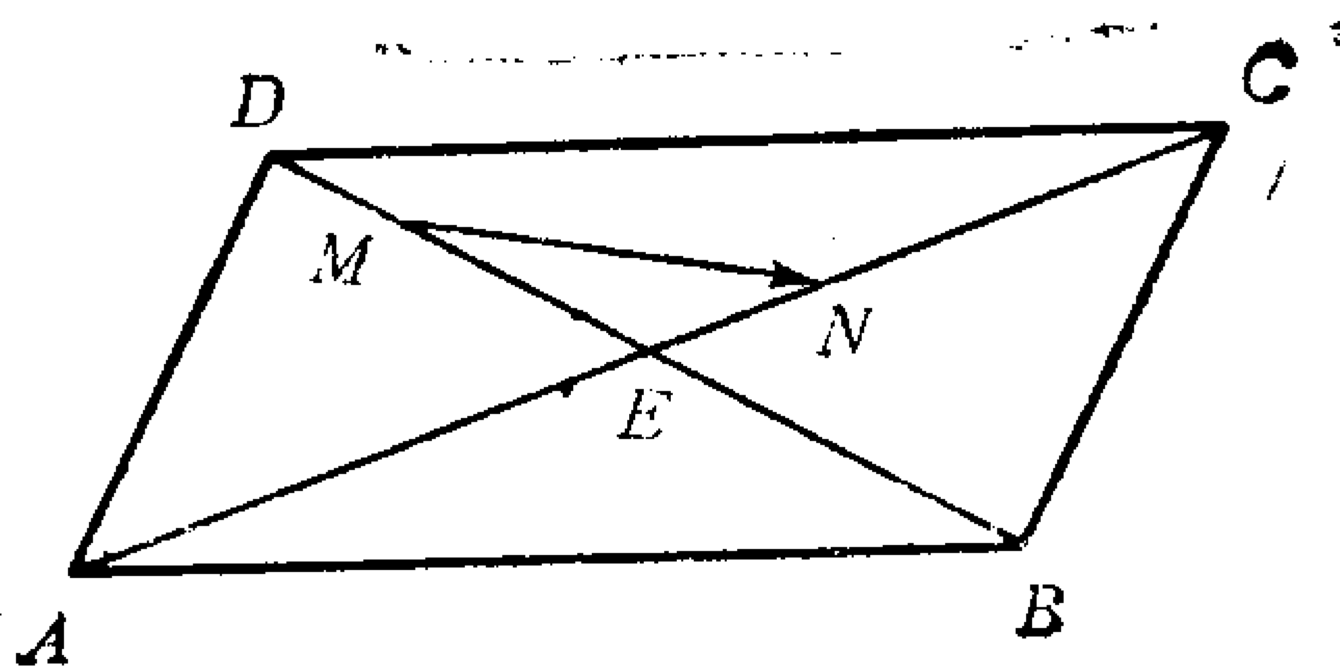
所以 $\triangle P_1P_2P_3$ 之重心为

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

习 题

1. 如图示, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于 E 点, $DM=\frac{1}{3}DE, EN=\frac{1}{3}EC$, 且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1'$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{e}_2'$, 取标架$\{A; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$与标架 $\{C; \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$, 求 M, N 两点分别关于标架 $\{A; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 与 $\{C; \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$ 的坐标, 以及矢

量 $\overrightarrow{MN}$ 关于标架 $\{A; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 与 $\{C; \boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'\}$ 的分量.

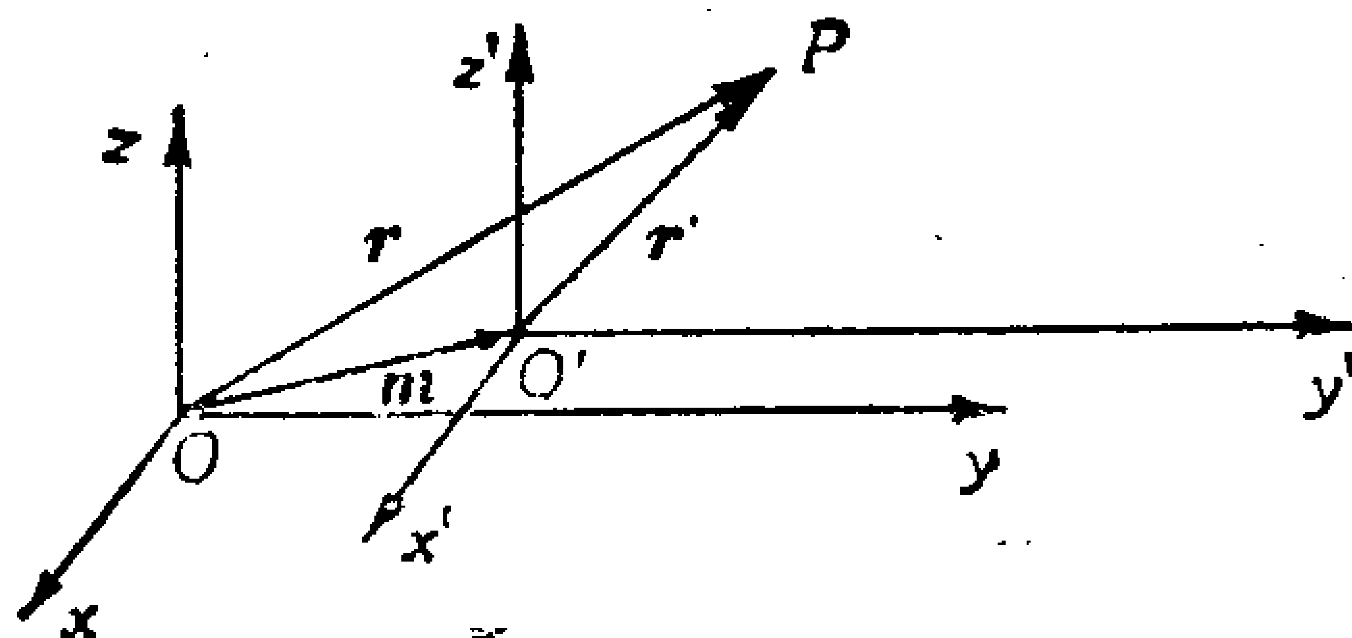


第 1 题

2. 在平行六面体 $ABCD\text{-}EFGH$ 中(参看 § 1 第 4 题图), 平行四边形 $CGHD$ 的中心为 P, 并设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{e}_3$, 试求矢量 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{EP}$ 关于标架 $\{A; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的分量, 以及 $\triangle BEP$ 三顶点及其重心关于 $\{A; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的坐标.

3. 在空间直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 下, 设点 $P(2, -3, -1)$, $M(a, b, c)$, 求这二点关于 (1) 坐标平面, (2) 坐标轴, (3) 坐标原点的各个对称点的坐标.

4. 设两空间直角坐标系, 新坐标原点的径矢 $\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{m}\{a, b, c\}$, 对应的坐标轴的正向相同. 求空间任一点 P 分别关于旧系和新系的径矢 $\boldsymbol{r}\{x, y, z\}$ 和 $\boldsymbol{r}'\{x', y', z'\}$ 之间的关系; 并写出新、旧坐标的关系式(即移轴公式).



第 4 题

5. 已知矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的分量如下:

(1) 在标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下, $\boldsymbol{a}=\{0, 1\}$, $\boldsymbol{b}=\{-1, 0\}$, $\boldsymbol{c}=\{1, -1\}$;

(2) 在标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下, $\boldsymbol{a}=\{0, -1, 0\}$, $\boldsymbol{b}=\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{c}=\{2, 0, 1\}$;

求 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ 的分量.

6. 已知平行四边形 $ABCD$ 中三顶点 A, B, C 的坐标如下:

(1) 在标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ 下, $A(-1, 2)$, $B(3, 0)$, $C(5, 1)$;

(2) 在标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下, $A(0, -2, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 4, 2)$; 求第四

顶点 D 和对角线交点 M 的坐标.

7. 已知 A、B、C 三点坐标如下:

(1) 在标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 下, $A(0,1)$, $B(2,-2)$, $C(-2,4)$;

(2) 在标架 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 下, $A(0,1,0)$, $B(-1,0,-2)$, $C(-2,3,4)$.

判别它们是否共线?若共线,写出 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的线性关系式.

8. 已知矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的分量如下:

(1) $\boldsymbol{a}=\{0,-1,2\}$, $\boldsymbol{b}=\{0,2,-4\}$, $\boldsymbol{c}=\{1,2,-1\}$;

(2) $\boldsymbol{a}=\{1,2,3\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,-1,0\}$, $\boldsymbol{c}=\{0,5,6\}$.

试判别它们是否共面? 能否将 $\boldsymbol{c}$ 表成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合? 若能表示,写出表示式.

9. 已知线段 AB 被点 $C(2,0,2)$ 和 $D(5,-2,0)$ 三等分, 试求这个线段两端点 A 与 B 的坐标.

10. 证明: 四面体每一个顶点与对面重心所连的线段共点, 且这点到顶点的距离是它到对面重心距离的三倍. 用四面体的顶点坐标把交点坐标表示出来.

§1.6 矢量在轴上的射影

设已知空间的一点 A 与一轴 l, 通过 A 作垂直于轴 l 的平面 α, 我们把这个平面与轴 l 的交点 A' 叫做点 A 在轴 l 上的射影(图 1-27).

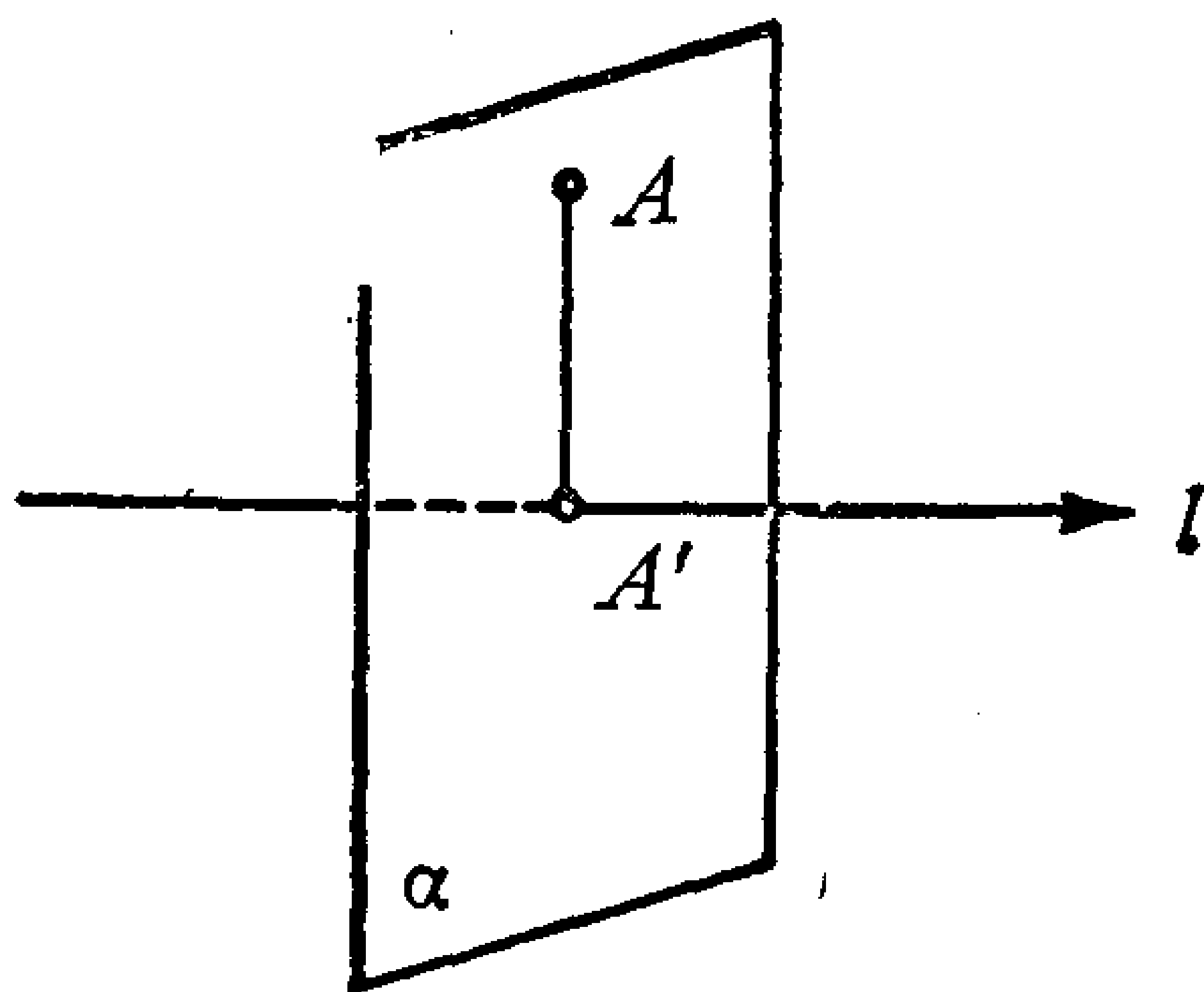


图 1-27

定义 1.6.1 设矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A 和终点 B 的轴 l 上的射影分别为点 A' 和 B', 那么矢量 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的射影矢量(图 1-28), 记做射影矢量$_l\,\overrightarrow{AB}$.

如果在轴上取与轴同方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}$, 那么有

$$\text{射影矢量}_l\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=x\boldsymbol{e}.$$

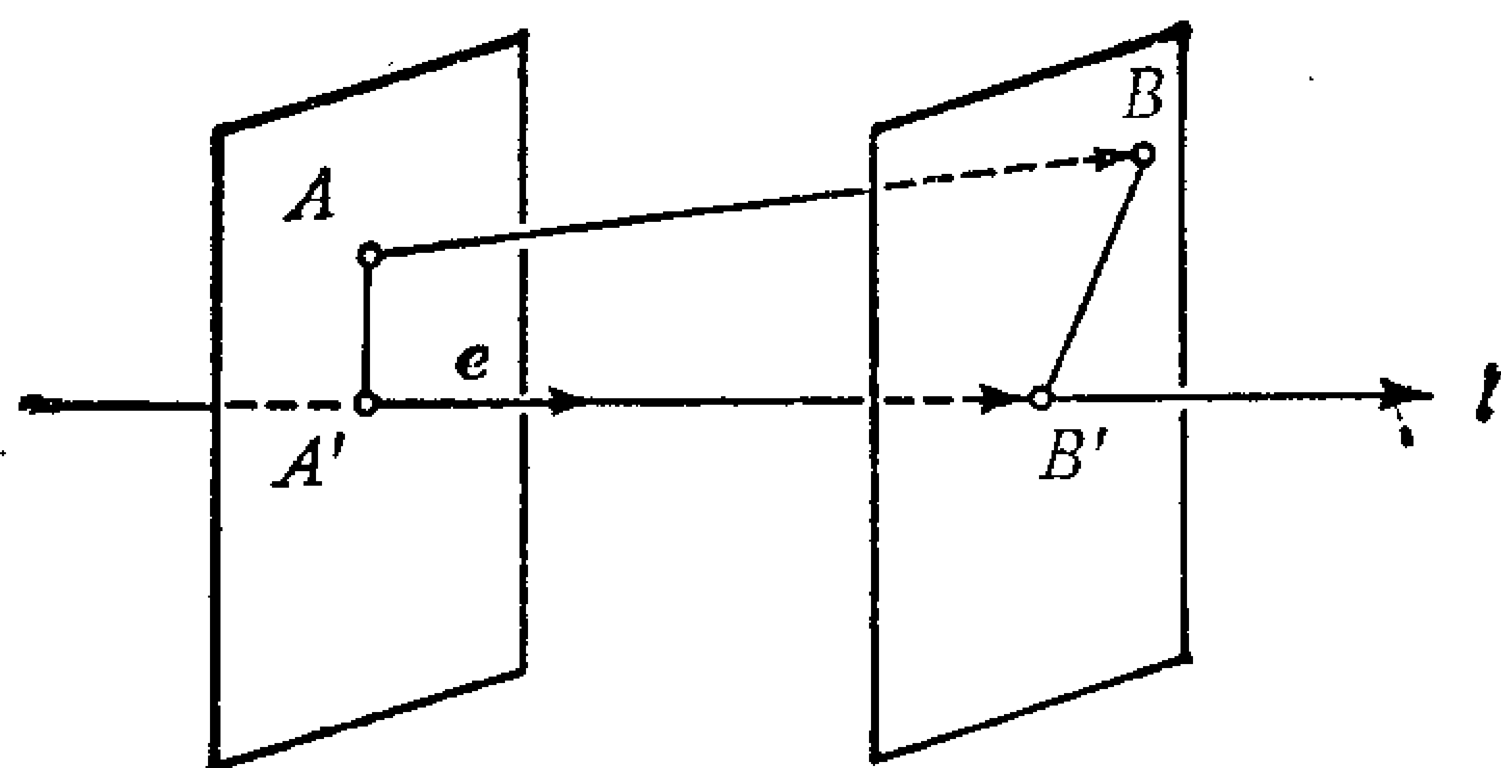


图 1-28

这里的 x 叫做矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的射影，记做射影$_l\overrightarrow{AB}$，即

$$射影_l\overrightarrow{AB}=x.$$

我们也可以把射影矢量$_l\overrightarrow{AB}$ 与射影$_l\overrightarrow{AB}$ 分别写成

$$射影矢量_e\overrightarrow{AB} 与射影_e\overrightarrow{AB},$$

并且可以分别叫做 $\overrightarrow{AB}$ 在矢量 $\boldsymbol{e}$ 上的射影矢量与 $\overrightarrow{AB}$ 在矢量 $\boldsymbol{e}$ 上的射影，两者之间的关系是：

$$射影矢量_e\overrightarrow{AB}=(射影_e\overrightarrow{AB})\boldsymbol{e}. \qquad (1.6\text{-}1)$$

射影$_e\overrightarrow{AB}$ 的数值显然与 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的夹角的大小有关，现在来规定两矢量的夹角．设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，自空间任意点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$(图1-29)，我们把由射线 OA 和 OB 构成的角度在 0 与 π 之间的角(显然这角度与点 O 的选取无关)，叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角①，记做 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$，按规定，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，那么

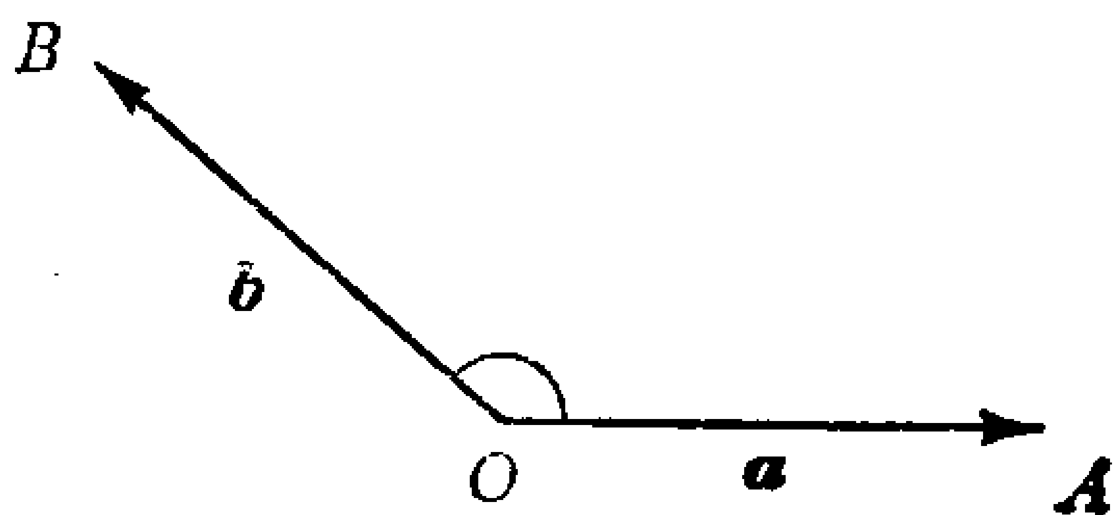


图 1-29

① 在平面上，可以引进从矢量 $\boldsymbol{a}$ 到矢量 $\boldsymbol{b}$ 的有向角的概念，并记做 $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$、当 $\boldsymbol{a}$ 不平行于 $\boldsymbol{b}$ 时，以矢量 $\boldsymbol{a}$ 扫过矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 旋转到与矢量 $\boldsymbol{b}$ 同方向的位置时，如果旋转是逆时针方向的，那么 $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$；如果是顺时针方向的，那么 $\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=-\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$．当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，$\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$．

有向角的值，常常可推广到 $\leqslant-\pi$ 或 $>\pi$，这时我们认为相差 2π 整倍数的值代表同一角．对于有向角还有下面的等式

$$\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=-\measuredangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), \measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+\measuredangle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\measuredangle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}).$$

$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$; 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，那么 $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\pi$; 如果 $\boldsymbol{a}$ 不平行于 $\boldsymbol{b}$，那么 $0<\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})<\pi$.

定理1.6.1 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的射影等于矢量的模乘以轴与该矢量的夹角的余弦:

$$\text{射影}_l \overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta, \quad \theta=\angle(l, \overrightarrow{AB}). \qquad (1.6\text{-}2)$$

证 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，命题显然成立. 当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，过 A、B 二点分别作垂直于 l 轴的平面 α, β，它们与轴 l 之交点分别是 A', B'，那么 $\overrightarrow{A'B'}=\text{射影矢量}_l \overrightarrow{AB}$. 再作 $\overrightarrow{A'B_1}=\overrightarrow{AB}$，易知终点 B_1 必在 β 平面上. 因为 $\beta\perp l$, 所以 $B_1B'\perp l$, $\triangle A'B'B_1$ 为直角三角形，且 $\angle(l, \overrightarrow{A'B_1})=\angle(l, \overrightarrow{AB})=\theta$ (图 1-30). 设 $\boldsymbol{e}$ 为 l 上与 l 同方向的单位矢量，那么

$$\overrightarrow{A'B'}=x\boldsymbol{e},$$

所以

$$x=\text{射影}_l \overrightarrow{AB}.$$

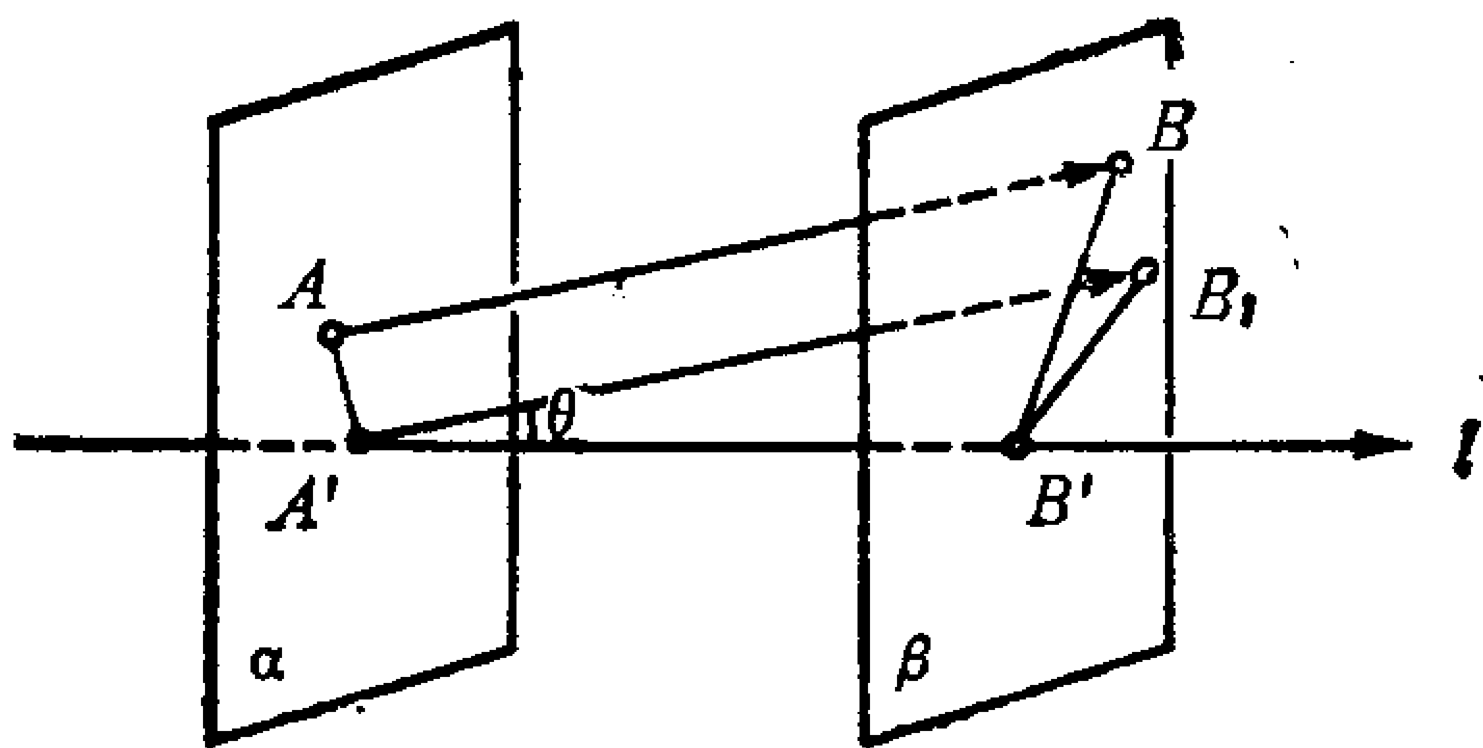


图 1-30

当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向,

$$x=|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{A'B_1}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta;$$

当 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向,

$$x=-|\overrightarrow{A'B'}|=-|\overrightarrow{A'B_1}|\cos(\pi-\theta)=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,$$

从而当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，时，总有

$$射影_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

推论 相等矢量在同一轴上的射影相等.

定理1.6.2 对于任何矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$有

$$射影_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=射影_l\,\boldsymbol{a}+射影_l\,\boldsymbol{b}. \tag{1.6-3}$$

证 取$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, 那么$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1-31), 设 A', B', C' 分别是 A, B, C 在轴 l 上的射影, 那么显然有

$$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'},$$

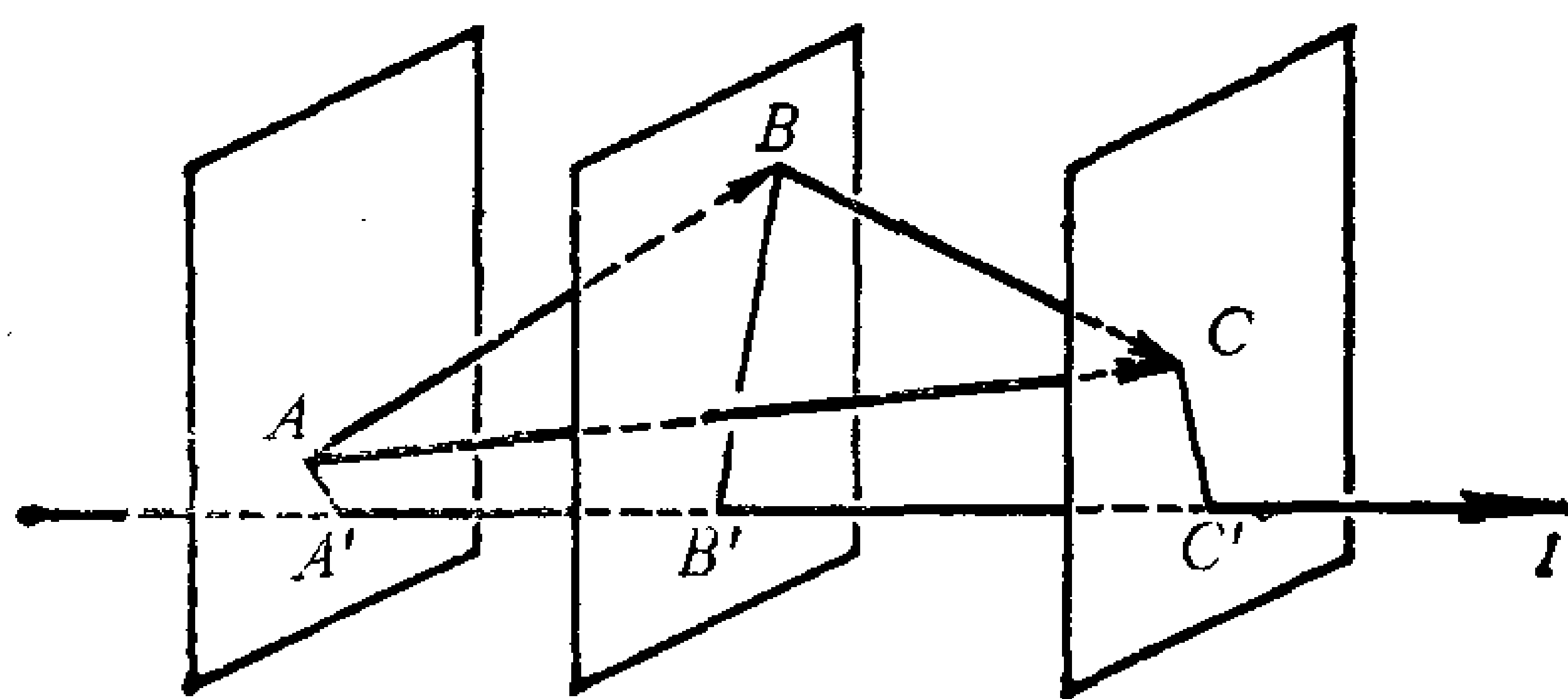


图 1-31

$\because$ $\overrightarrow{A'C'}=射影矢量_l\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}=射影矢量_l\,\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{B'C'}=射影矢量_l\,\overrightarrow{BC},$$

$\therefore$ $射影矢量_l\,\overrightarrow{AC}=射影矢量_l\,\overrightarrow{AB}+射影矢量_l\,\overrightarrow{BC}.$

由(1.6-1)得

$$(射影_l\,\overrightarrow{AC})\boldsymbol{e}=(射影_l\,\overrightarrow{AB}+射影_l\,\overrightarrow{BC})\boldsymbol{e}$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 为轴 l 上与 l 同向的单位矢量, 所以

$$射影_l\,\overrightarrow{AC}=射影_l\,\overrightarrow{AB}+射影_l\,\overrightarrow{BC},$$

或
$$射影_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=射影_l\,\boldsymbol{a}+射影_l\,\boldsymbol{b}.$$

定理1.6.3 对于任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 与任意实数 λ 有

$$射影_l(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\,射影_l\,\boldsymbol{a}. \tag{1.6-4}$$

证 如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 命题显然成立. 设 $\lambda\neq0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 且 $\theta=\angle(l,\ \boldsymbol{a})$, 那么当 $\lambda>0$ 时, 有

$$\angle(l,\ \lambda\boldsymbol{a})=\angle(l,\ \boldsymbol{a})=\theta,$$

$\therefore$ 射影$_l(\lambda \boldsymbol{a}) = |\lambda \boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta = \lambda$射影$_l \boldsymbol{a}$;

当$\lambda<0$时，有

$$\angle(l, \lambda\boldsymbol{a}) = \pi - \angle(l, \boldsymbol{a}) = \pi - \theta,$$

$$\therefore \quad 射影_l(\lambda\boldsymbol{a}) = |\lambda\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\theta) = \lambda|\boldsymbol{a}|\cos\theta,$$

$$= \lambda\, 射影_l \boldsymbol{a}.$$

因此(1.6-4)成立.

例 设在直角坐标系$\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$下，矢量$\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$，试证明：

$$射影_i \boldsymbol{a} = X, \quad 射影_j \boldsymbol{a} = Y, \quad 射影_k \boldsymbol{a} = Z.$$

证 设径矢$\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{a}$，那么$\boldsymbol{a}$在坐标轴上的射影即为$\overrightarrow{OP}$在坐标轴上的射影. 设$P$点在$x$轴，$y$轴，$z$轴上的射影分别为$A, B, C$(图 1-32)，那么

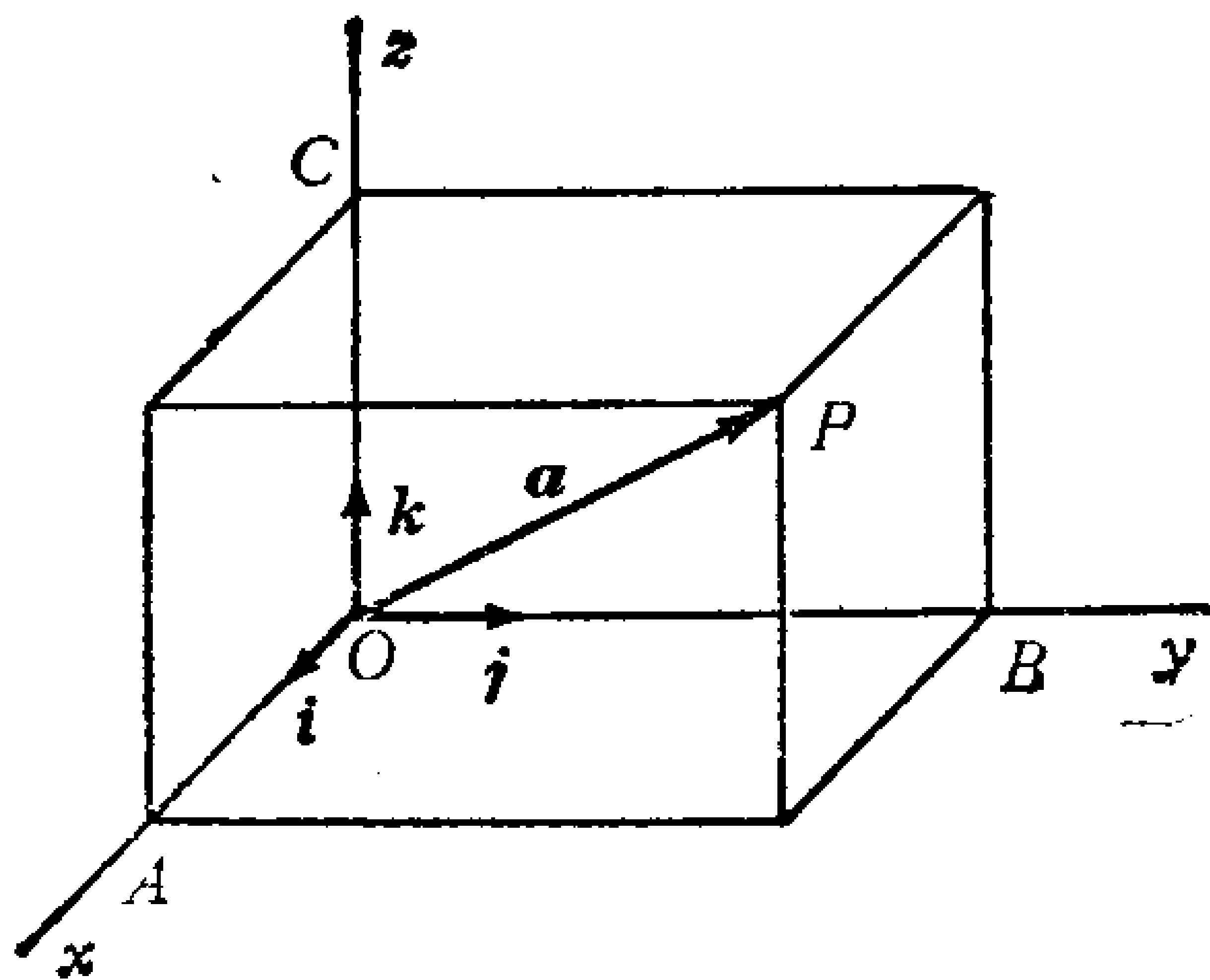


图 1-32

$$射影矢量_i \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = X\boldsymbol{i},$$

$$射影矢量_j \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OB} = Y\boldsymbol{j},$$

$$射影矢量_k \boldsymbol{a} = \overrightarrow{OC} = Z\boldsymbol{k}.$$

由矢量在轴上的射影定义得

$$射影_i \boldsymbol{a} = X, \quad 射影_j \boldsymbol{a} = Y, \quad 射影_k \boldsymbol{a} = Z.$$

习　题

1. 已知矢量$\overrightarrow{AB}$与单位矢量$\boldsymbol{e}$的夹角为$150°$，且$|\overrightarrow{AB}|=10$，求射影矢量$_{\boldsymbol{e}}\overrightarrow{AB}$与射影$_{\boldsymbol{e}}\overrightarrow{AB}$. 又如果$\boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{e}$，求射影矢量$_{\boldsymbol{e}'}\overrightarrow{AB}$与射影$_{\boldsymbol{e}'}\overrightarrow{AB}$.

2. 证明：射影$_l(\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n) = \lambda_1$射影$_l\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2$射影$_l\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n$射影$_l\boldsymbol{a}_n$.

§1.7　两矢量的数性积

在物理学中，我们知道一个质点在力$\boldsymbol{f}$的作用下，经过位移

$\overrightarrow{PP'}=\boldsymbol{s}$，那么这个力所作的功为

$$W=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的夹角（图 1-33）．这里的功 W 是由矢量 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 按上式确定的一个数量．类似的情况在其它问题中也常遇到．

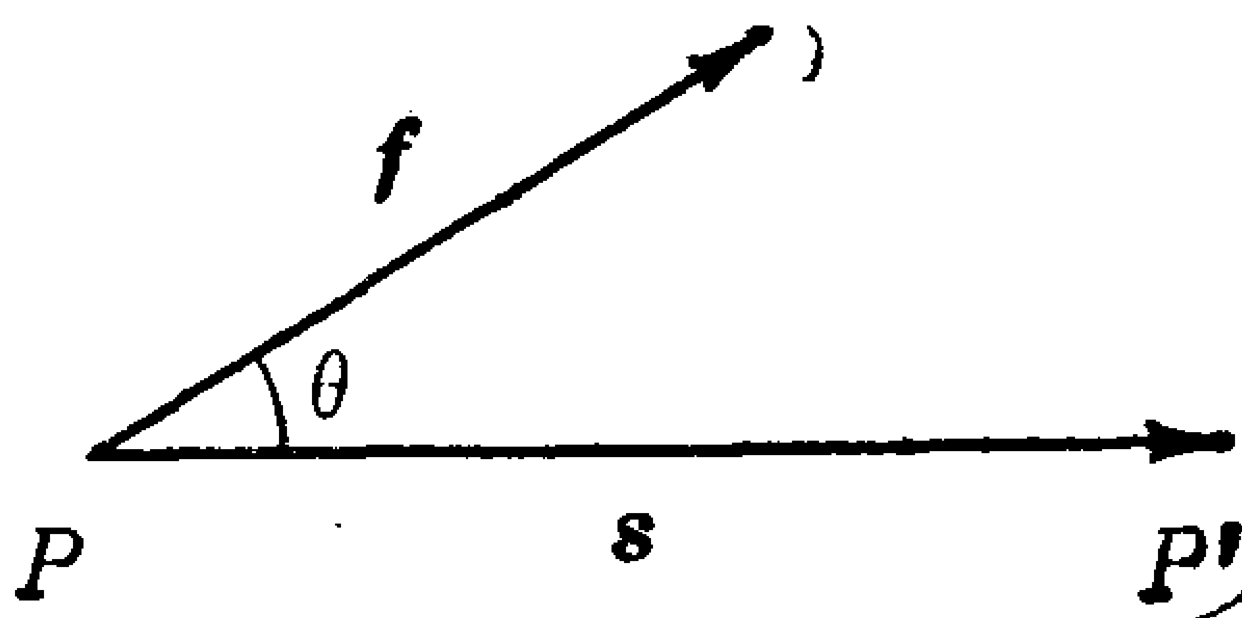


图 1-33

定义 1.7.1 两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们夹角的余弦的乘积叫做矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数性积（也称内积），记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}). \tag{1.7-1}$$

两矢量的数性积是一个数量而不是矢量，特别地当两矢量中有一个为零矢量时，例如 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，那么 $|\boldsymbol{b}|=0$，从而有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．

当 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ 为两非零矢量时，根据定理 1.6.1 有

$$|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\text{射影}_{a}\boldsymbol{b},$$

$$|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\text{射影}_{b}\boldsymbol{a},$$

所以由（1.7-1）立刻得：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\text{射影}_{a}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\text{射影}_{b}\boldsymbol{a}. \tag{1.7-2}$$

特别地，当 $\boldsymbol{b}$ 为单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\text{射影}_{e}\boldsymbol{a}. \tag{1.7-2'}$$

如果（1.7-1）中的 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，那么有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^{2}.$$

我们把数性积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 的数量平方，并记作 $\boldsymbol{a}^{2}$．

定理 1.7.1 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．

证 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；反过来，当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，如果 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ 均为非零矢量，那么根据（1.7-1）有

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=0,$$

从而 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; 如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 中有零矢量，由于零矢量的方向不定，可以把它看成与任意矢量垂直，所以有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，定理得证.

下面我们讨论矢量的数性积的运算规律.

定理 1.7.2 矢量的数性积满足下面的运算规律

1) 交换律

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}. \tag{1.7-3}$$

2) 关于数因子的结合律

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) \tag{1.7-4}$$

3) 分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \tag{1.7-5}$$

证 公式(1.7-3), (1.7-4), (1.7-5)中如果有零矢量，那么它们显然成立. 下面的证明，假设它们都是非零矢量.

1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

2) 如果 $\lambda=0$, (1.7-4) 显然成立; 如果 $\lambda\neq0$, 那么根据(1.7-2), (1.6-4)有

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{b}|\text{射影}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|(\lambda\,\text{射影}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a})\\&=\lambda(|\boldsymbol{b}|\text{射影}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

而
$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

所以(1.7-4)成立.

3) 根据(1.7-2), (1.6-3)有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\text{射影}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\text{射影}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\text{射影}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\text{射影}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\text{射影}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

所以(1.7-5)式成立.

推论 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

根据矢量的数性积的这些运算规律可知，对于矢量数性积的运算，可以象多项式的乘法那样进行展开，例如

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2,$$
$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$
$$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{d})=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}-12\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}.$$

例 1 证明平行四边形对角线的平方和等于它各边的平方和.

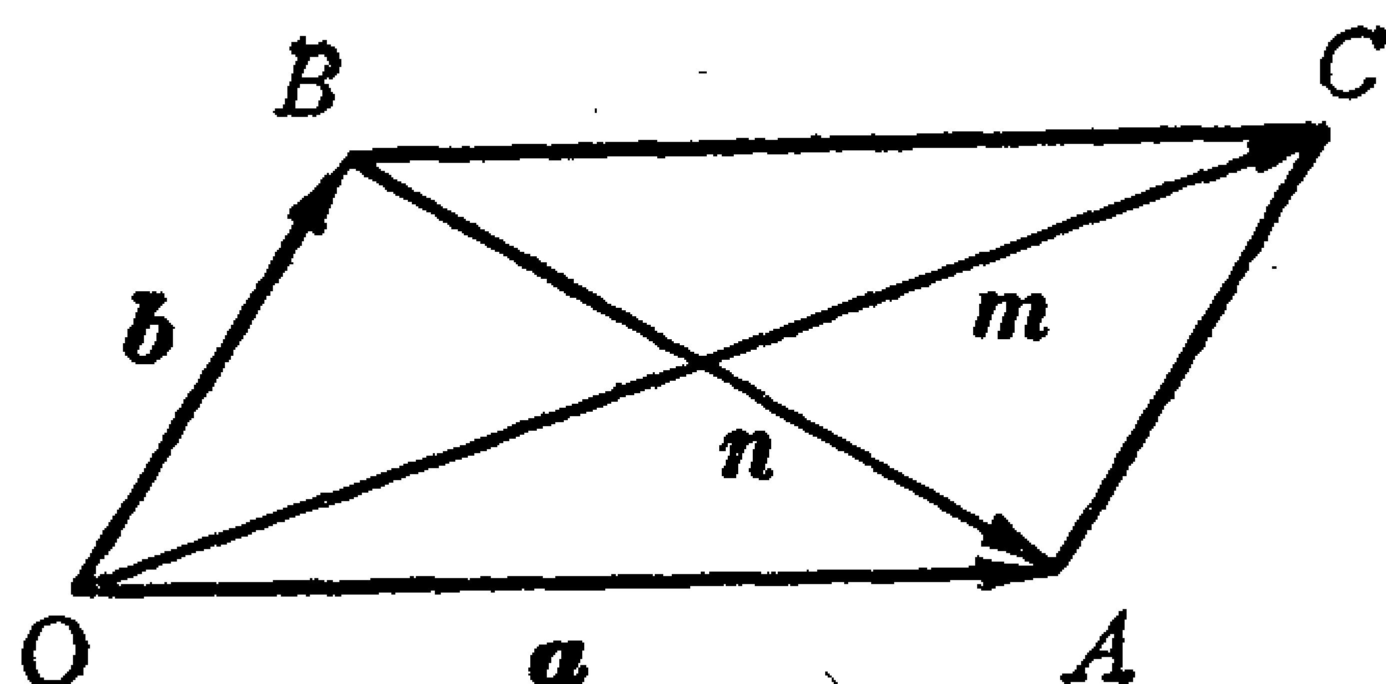


图 1-34

证 如图 1-34，在平行四边形 $OACB$ 中，设两边为 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，对角线 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{n}$，那么

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

于是
$$\boldsymbol{m}^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$
$$\boldsymbol{n}^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$

所以
$$\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2),$$

即
$$|\boldsymbol{m}|^2+|\boldsymbol{n}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2).$$

这就是所要证明的.

例 2 试证如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，那么它就和平面内任何直线都垂直，即它垂直于平面.

证 设直线 n 与平面 α 内两相交直线 a, b 都垂直(图 1-35)，

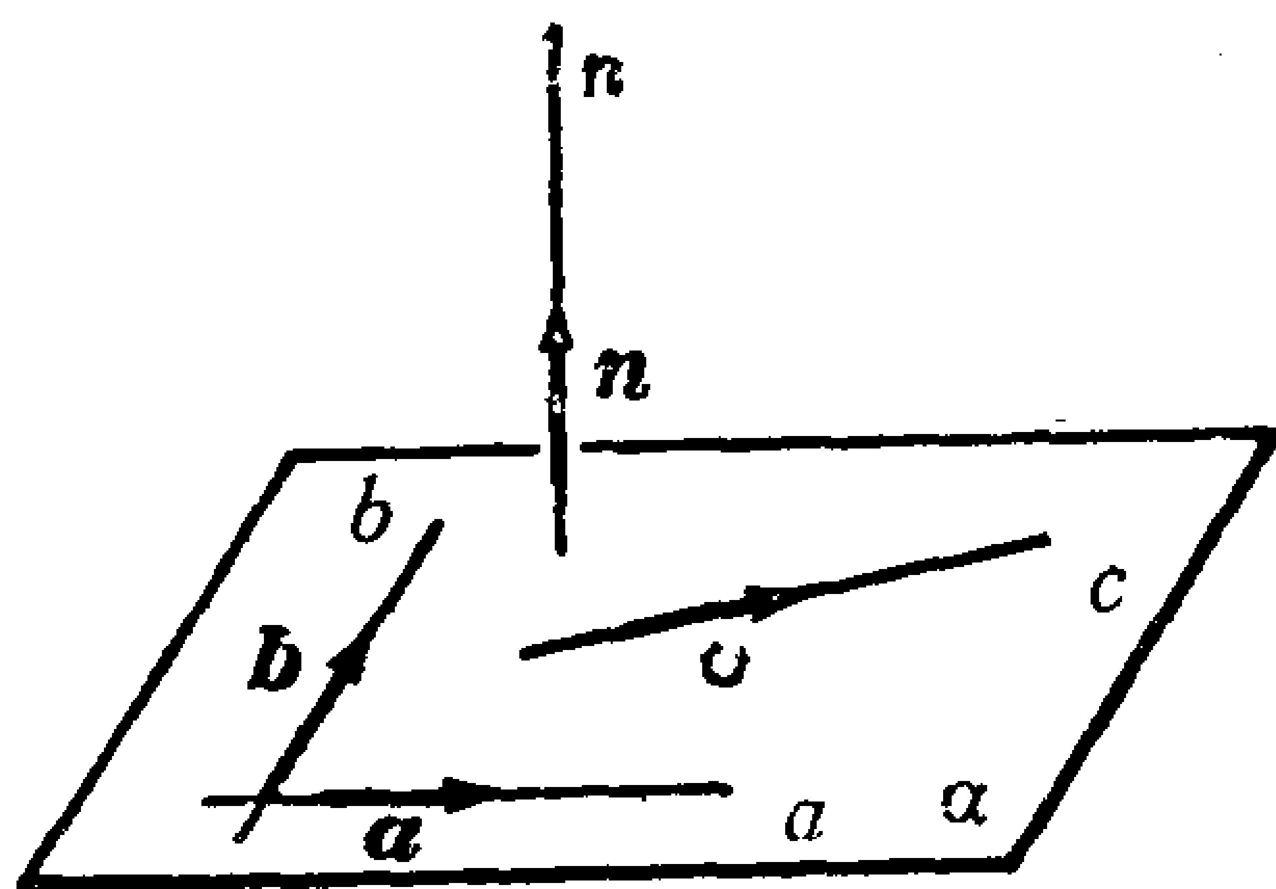


图 1-35

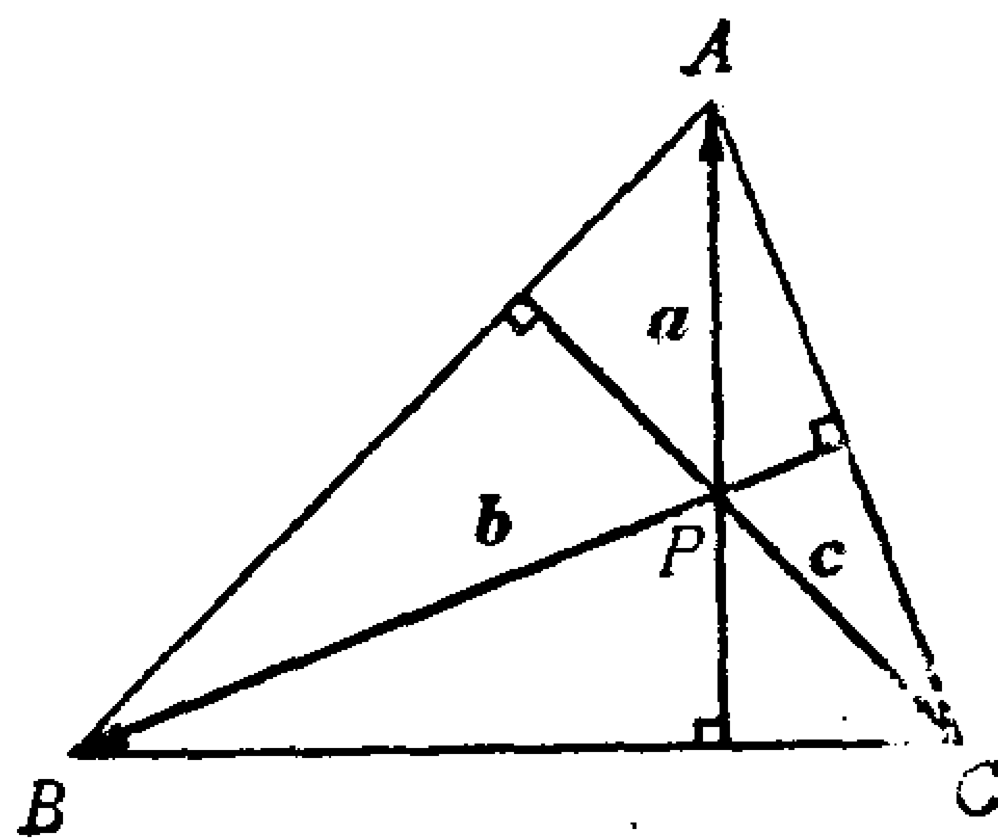


图 1-36

下面证明 n 与 α 内任意直线 c 垂直. 在直线 n, a, b, c 上分别任意取非零矢量 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 依条件有

$$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b},$$

所以

$$\boldsymbol{na}=0,\quad \boldsymbol{nb}=0.$$

且根据定理 1.4.2, $\boldsymbol{c}$ 可用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 线性表示: $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 因而

$$\boldsymbol{nc}=\boldsymbol{n}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{na})+\mu(\boldsymbol{nb})=0.$$

这表明两矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 互相垂直, 也就是它们所在直线 n 与 c 互相垂直, 从而直线 n 垂直于平面.

例 3 试证三角形的三条高交于一点.

证 设 $\triangle ABC$ 的 BC, CA 两边上的高交于 P 点(图 1-36), 再设 $\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$, 那么

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c};$$

因为 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC}$, 所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$, 即 $\boldsymbol{ac}=\boldsymbol{ab}$; 又因为 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$, 所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$, 即 $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{bc}$; 从而 $\boldsymbol{ac}=\boldsymbol{bc}$, 即 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$, 所以

$$\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}.$$

这就证明了点 P 在 $\triangle ABC$ 第三条边 AB 的高线上, 所以 $\triangle ABC$ 的三条高交于一点 P.

下面在直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下, 用矢量的分量表示数性积.

定理 1.7.3 设 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$, 那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \tag{1.7-6}$$

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\cdot(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+X_1Y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+X_1Z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+Y_1X_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+Y_1Y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+Y_1Z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+Z_1X_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+Z_1Y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+Z_1Z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是两两相互垂直的单位矢量，所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0,$$

且 $$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

因而 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

推论 设 $\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=X,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=Y,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=Z. \tag{1.7-7}$$

利用矢量的分量来表示数性积的公式(1.7-6)，将给我们在计算矢量的数性积时带来方便. 下面在直角坐标系下，利用公式(1.7-6)再来讨论几个问题:

1) 两点距离

因为在(1.7-1)中，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2,$$

于是 $$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2,\quad 或\quad |\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}.$$

定理 1.7.4 设 $\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$，那么

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{1.7-8}$$

证 根据(1.7-6)得

$$\boldsymbol{a}^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

所以 $$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

因而(1.7-8)式成立.

定理 1.7.5 空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$间的距离是

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.7-9}$$

证 因为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$

所以 $$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2) 矢量的方向余弦

矢量与坐标轴(或坐标矢量)所成的角叫做矢量的方向角，方

向角的余弦叫做矢量的方向余弦．一个矢量的方向完全可由它的方向角来决定．

矢量的方向余弦也可用矢量的分量来表示．

定理 1.7.6 非零矢量 $\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$ 的方向余弦是

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{X}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\\ \cos\beta&=\frac{Y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{Z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};\end{aligned}\right\}\tag{1.7-10}$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\tag{1.7-11}$$

式中的 α, β, γ 分别为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴的交角，即矢量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角．

证 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=X$，

所以
$$|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=X,$$

从而
$$\cos\alpha=\frac{X}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

同理可证(1.7-10)其余两式成立．由(1.7-10)立即可知(1.7-11)成立．

从定理 1.7.6 可以看出，空间的每一个矢量都可以由它的模与方向余弦决定，特别地，单位矢量的方向余弦等于它的分量，即有

$$\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.\tag{1.7-12}$$

3) 两矢量的交角

定理 1.7.7 设空间中两个非零矢量为 $\boldsymbol{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$ 和 $\boldsymbol{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$，那么它们夹角的余弦是：

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

$$=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{1.7-13}$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),\ |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\neq 0,$$

所以
$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|},$$

但是
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2},\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2},$$

所以(1.7-13)成立.

推论 矢量 $\boldsymbol{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$与 $\boldsymbol{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$相互垂直的充要条件是

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \tag{1.7-14}$$

在平面直角坐标系下,平面上的矢量也有完全类似的结论.设平面上的两矢量为 $\boldsymbol{a}\{X_1,\ Y_1\}$, $\boldsymbol{b}\{X_2,\ Y_2\}$,那么有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2; \tag{1.7-6$'$}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=X_1,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=Y_1; \tag{1.7-7$'$}$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2}; \tag{1.7-8$'$}$$

平面上两点 $P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$间的距离为

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.7-9$'$}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 可以表示为

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{X_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}},\\ \cos\beta&=\frac{Y_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}},\end{aligned}\right\} \tag{1.7-10$'$}$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1. \tag{1.7-11$'$}$$

在平面上的情形，我们还可以单独用从 $\boldsymbol{i}$ 到 $\boldsymbol{a}$ 的有向角①来决定矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 设 $\measuredangle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a})=\varphi$(图 1-37)，那么

$$\cos\alpha=\cos\varphi,$$

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos\angle(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a})\\&=\cos\measuredangle(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a})\\&=\cos(\measuredangle(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})+\measuredangle(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}))\\&=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\\&=\sin\varphi.\end{aligned}$$

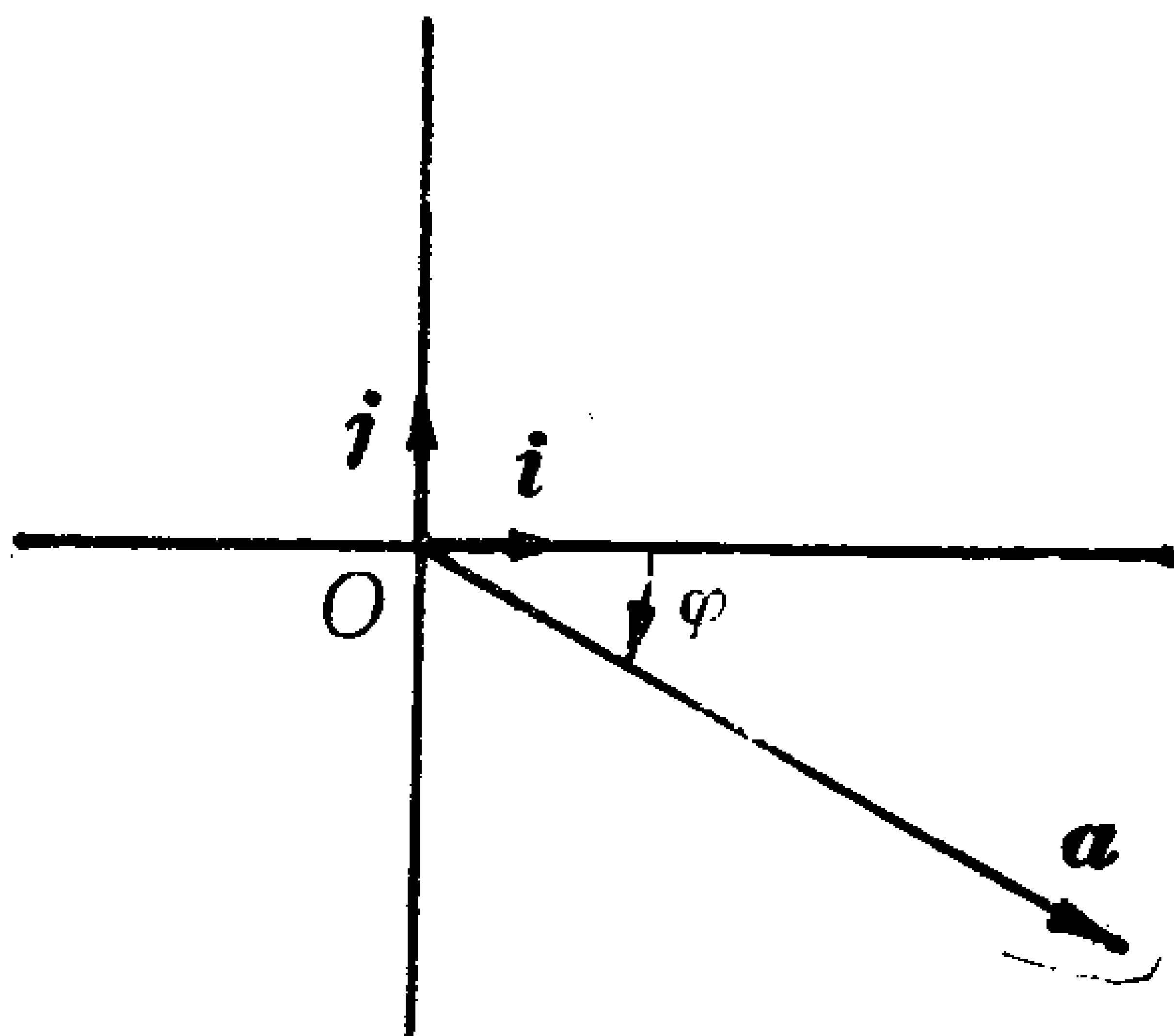


图 1-37

因此，平面上的非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，完全可由 x 轴(或坐标矢量 $\boldsymbol{i}$)到矢量 $\boldsymbol{a}$ 的有向角 φ 来决定，所以平面上的矢量 $\boldsymbol{a}$ 可写成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi). \qquad (1.7\text{-}12')$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的交角的余弦为

$$\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}; \qquad (1.7\text{-}13')$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件为

$$X_1X_2+Y_1Y_2=0. \qquad (1.7\text{-}14')$$

例 4 已知三点 $A(1,0,0)$, $B(3,1,1)$, $C(2,0,1)$，且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，求: (1) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, (2) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的射影.

解 利用(1.5-1), (1.7-8) 可得:

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC}=\{-1, -1, 0\}, \quad |\boldsymbol{a}|=\sqrt{2};$$

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA}=\{-1, 0, -1\}, \quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2};$$

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}=\{2, 1, 1\}, \quad |\boldsymbol{c}|=\sqrt{6};$$

利用(1.7-6)可得:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)(-1)+(-1)\cdot 0+0\cdot(-1)=1,$$

① 有向角的概念，可以参阅第 35 页的脚注.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=-3,$$

因而可得

(1) $$\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

所以 $$\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\frac{\pi}{3};$$

(2) 射影 $${}_{c}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{ac}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{-3}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 5 利用数性积证明柯西-施瓦兹 (Cauchy-Schwarz)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{3} a_i^2\sum_{i=1}^{3} b_i^2.$$

证 设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$,

因为 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$$

而 $$-1\leqslant\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})\leqslant 1,$$

所以 $$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|,$$

从而得 $$\left|\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{3} b_i^2},$$

所以 $$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{3} a_i^2\sum_{i=1}^{3} b_i^2.$$

习　　题

1．证明:

(1) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 垂直于矢量 $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}$;

(2) 在平面上如果 $\boldsymbol{m}_1$ 不平行于 $\boldsymbol{m}_2$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m}_i(i=1,\ 2)$, 那么就有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

2．已知矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直, 矢量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ 的夹角都为 60°, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$, 计算:

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$;　　　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;

(3) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$;　　　　(4) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2$.

3. 计算下列各题:

(1) 已知等边三角形 ABC 的边长为 1, 且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 两两垂直, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$, 求 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长和它与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的夹角;

(3) 已知 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直, 且 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直, 求 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角;

(4) 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\frac{2}{3}\pi$, $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}=\lambda\boldsymbol{a}+17\boldsymbol{b}$, 问系数 λ 取何值时 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 垂直.

4. 用矢量法证明以下各题:

(1) 三角形的余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

(2) 平行四边形成为菱形的充要条件是对角线互相垂直;

(3) 内接于半圆且以直径为一边的三角形为直角三角形;

(4) 三角形各边的垂直平分线共点且这点到各顶点等距;

(5) 空间四边形对角线互相垂直的充要条件是对边平方和相等.

5. 已知平行四边形以 $\boldsymbol{a}=\{2, 1, -1\}, \boldsymbol{b}=\{1, -2, 1\}$ 为两边, (1) 求它的边长和内角; (2) 求它的两对角线的长和夹角。

6. 已知 $\triangle ABC$ 三顶点 $A(0, 0, 3), B(4, 0, 0), C(0, 8, -3)$, 试求 (1) 三角形三边长; (2) 三角形三内角; (3) 三角形三中线长; (4) 角 A 的平分角线矢量 $\overrightarrow{AD}$(终点 D 在 BC 边上), 并求 $\overrightarrow{AD}$ 的方向余弦和它的单位矢量.

§1.8 两矢量的矢性积

定义 1.8.1 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢性积(也称外积)是一个矢量, 记做 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 或 $[\boldsymbol{ab}]$, 它的模是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \qquad (1.8\text{-}1)$$

它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都垂直, 并且按 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手标架 $\{O; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ (图 1-38).

物理学中的力矩是一个矢量, 这是两个矢量的矢性积的实例, 如图 1-39, 如果力 $\boldsymbol{f}$ 的作用点是 A, $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}$, 那么力矩 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$.

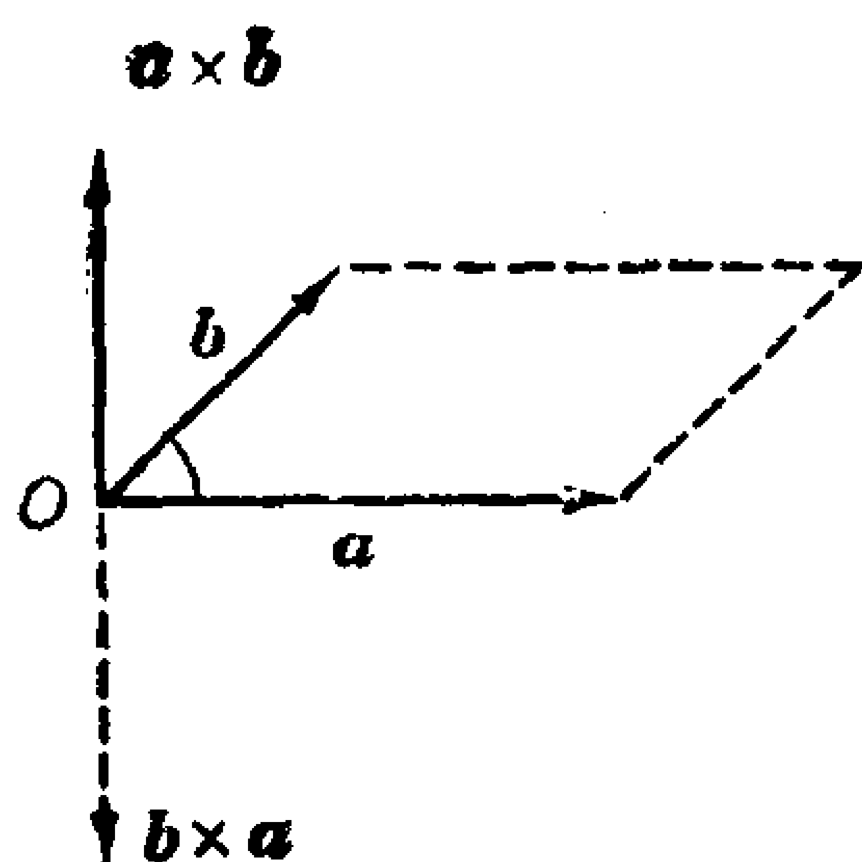


图 1-38

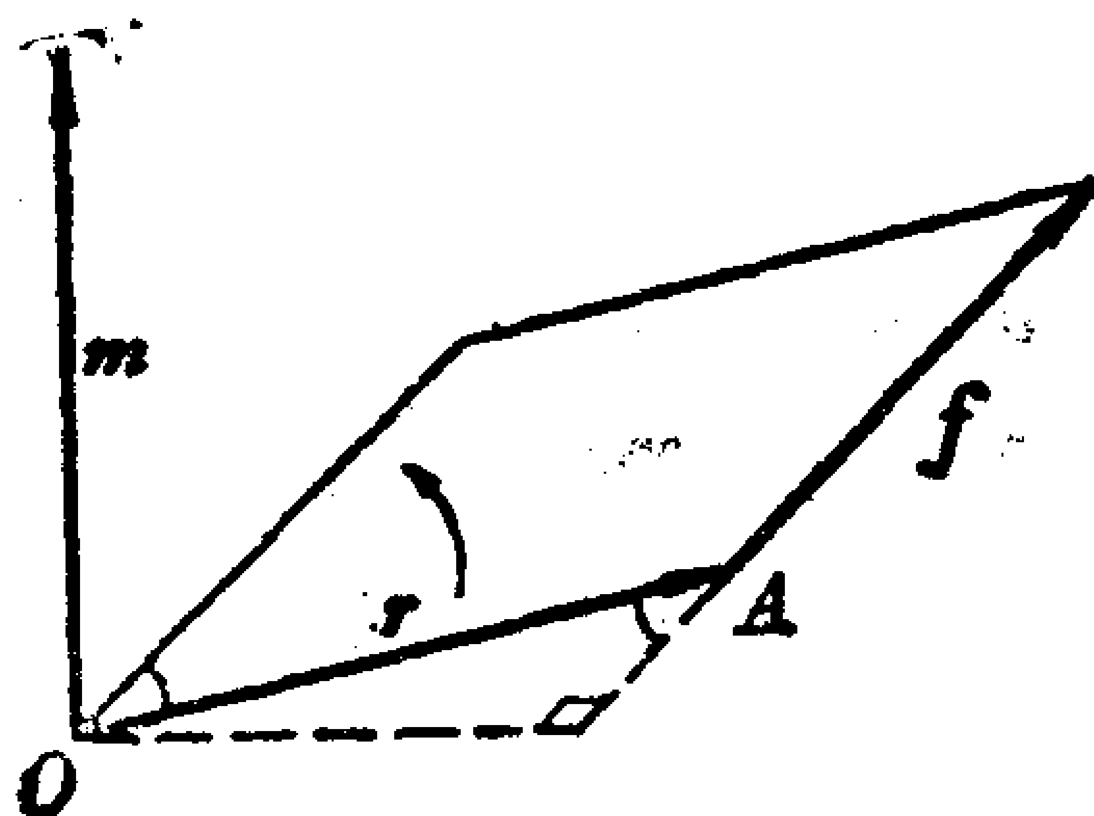


图 1-39

因为平行四边形的面积等于它两邻边长的积乘以夹角的正弦，所以由(1.8-1)得：

定理1.8.1 两不共线矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢性积的模，等于以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边所构成的平行四边形的面积.

定理1.8.2 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时(包括 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零矢量的情形)，由(1.8-1)知 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，从而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；反过来，当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，那么由(1.8-1)知，或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，因为零矢量可以看成与任何矢量共线，所以总有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，命题得证.

矢量的矢性积满足下面的运算规律：

定理1.8.3 矢性积是反交换的，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}). \tag{1.8-2}$$

证 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 都是零矢量(定理1.8.2)，这时定理1.8.3显然成立. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，那么 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\sin\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的模相等；又根据矢性积的定义，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 都同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，因此 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 是两共线矢量，其次由于按顺序 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 分别构成右手标架 $\{O;\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ 与 $\{O;\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\}$(图1-38)，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的方向相反，从而得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

定理1.8.4 矢性积满足关于数因子的结合律，即

$$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}). \tag{1.8-3}$$

式中 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为任意矢量，λ 为任意实数

证 如果 $\lambda=0$ 或者 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，(1.8-3)显然成立. 如果 $\lambda\neq 0$，且 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线，那么因为

$$|\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),$$

$$|(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}|=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),$$

$$|\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{b}).$$

所以三个矢量 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$, $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$的模相等，其次容易知道，这三个矢量当 $\lambda>0$ 时，都和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向相同，当 $\lambda<0$ 时，都和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向相反，因此三个矢量方向也相同，从而(1.8-3)成立.

推论 设 λ, μ 为任意实数，那么

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{1.8-4}$$

定理1.8.5 矢性积满足分配律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}. \tag{1.8-5}$$

证 如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 中至少有一个是零矢量或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为一组共线矢量，(1.8-5)显然成立. 现在假设不是上述情况，我们来证明(1.8-5)也成立.

设 $\boldsymbol{c}^0$ 为 $\boldsymbol{c}$ 的单位矢量，先证明下式成立:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0. \tag{1}$$

首先，我们可用下面的作图法作出矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$.

通过矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}^0$ 的公共始点 O 作平面 π 垂直于 $\boldsymbol{c}^0$(图1-40)，自矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 引 $AA_1\perp\pi$, A_1 为垂足，由此得矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 π 上的射影矢量 $\overrightarrow{OA_1}$，再将 $\overrightarrow{OA_1}$ 在平面 π 上绕 O 点依顺时针方向(自 $\boldsymbol{c}^0$ 的终点看平面 π)旋转 $90°$，得 $\overrightarrow{OA_2}$，那么 $\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$.

事实上，由作图法知 $\overrightarrow{OA_2}\perp\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OA_2}\perp\boldsymbol{c}^0$，且$\{O;\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}^0,\ \overrightarrow{OA_2}\}$

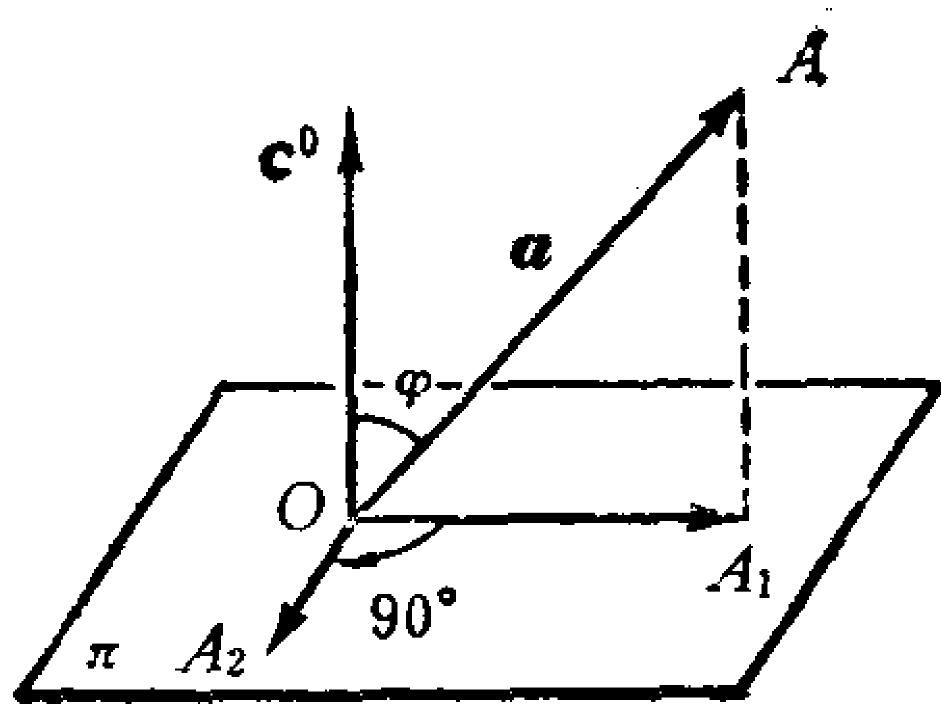


图 1-40

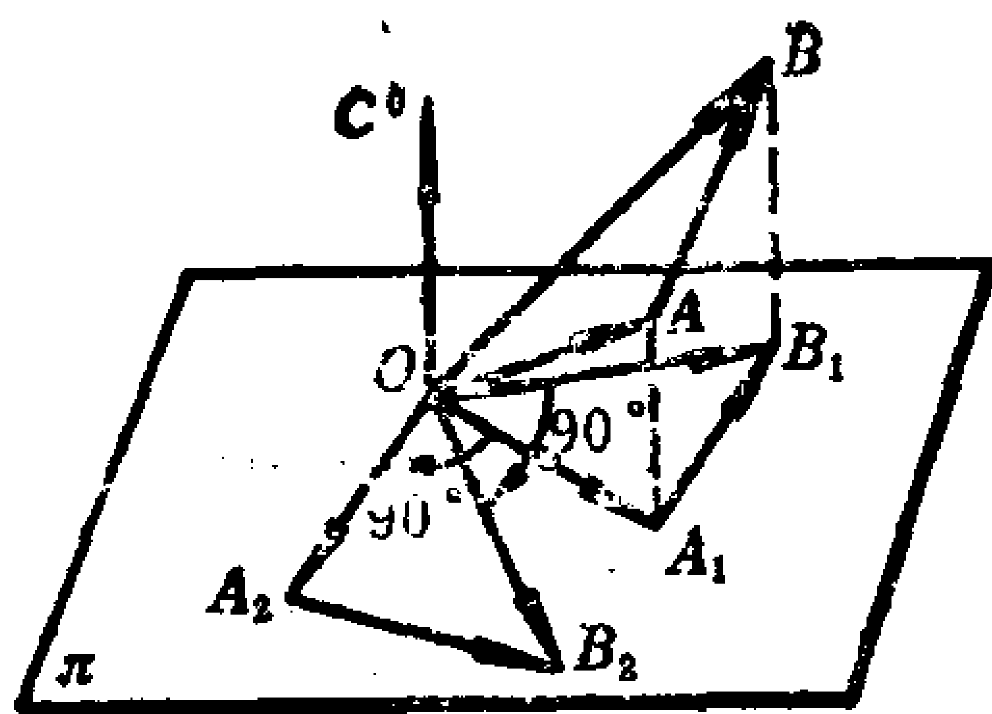


图 1-41

构成右手标架，所以$\overrightarrow{OA_2}$与$\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}^0$同方向；如果设$\angle(\boldsymbol{a},\ \mathbf{c}^0)=\varphi$，那么$|\overrightarrow{OA_2}|=|\overrightarrow{OA_1}|=|\boldsymbol{a}|\sin\varphi=|\boldsymbol{a}|\cdot|\mathbf{c}^0|\cdot\sin\angle(\boldsymbol{a},\ \mathbf{c}^0)$，所以$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}^0$.

现在来证明(1)式，如图 1-41 所示，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，那么$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 并设$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{OB_1}$分别为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OB}$在垂直于$\mathbf{c}^0$的平面$\pi$上的射影矢量，再将$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{OB_1}$在平面$\pi$内分别绕点 O 依顺时针方向(自$\mathbf{c}^0$的终点看平面$\pi$)旋转 90° 得$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{A_2B_2}$，$\overrightarrow{OB_2}$，依上述作图法可知

$$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}^0,\quad \overrightarrow{A_2B_2}=\boldsymbol{b}\times\mathbf{c}^0,\quad \overrightarrow{OB_2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}^0,$$

而
$$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$$

所以
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}^0=\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}^0+\boldsymbol{b}\times\mathbf{c}^0.$$

现在我们来证明(1.8-5)成立.

将(1)式两边乘以$|\mathbf{c}|$，利用(1.8-3)得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times|\mathbf{c}|\mathbf{c}^0=\boldsymbol{a}\times|\mathbf{c}|\mathbf{c}^0+\boldsymbol{b}\times|\mathbf{c}|\mathbf{c}^0,$$

但
$$\mathbf{c}=|\mathbf{c}|\mathbf{c}^0,$$

所以
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}=\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}+\boldsymbol{b}\times\mathbf{c}.$$

推论

$$\mathbf{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{c}\times\boldsymbol{a}+\mathbf{c}\times\boldsymbol{b}. \tag{1.8-6}$$

证 $\mathbf{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}=-\boldsymbol{a}\times\mathbf{c}-\boldsymbol{b}\times\mathbf{c}$

$$=\mathbf{c}\times\boldsymbol{a}+\mathbf{c}\times\boldsymbol{b}.$$

由于矢量的矢性积满足这些运算规律，因此它与矢量的数性积一样，也可以象多项式的乘法那样进行展开，例如

$$(\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2)\times(\lambda_3\boldsymbol{a}_3+\lambda_4\boldsymbol{a}_4)$$
$$=\lambda_1\lambda_3(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_3)+\lambda_1\lambda_4(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_4)+\lambda_2\lambda_3(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3)$$
$$+\lambda_2\lambda_4(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_4).$$

但是必须注意矢性积不满足交换律，而具有反交换律，所以在矢性积的运算过程中，其因子矢量的次序不可以任意颠倒，如果交换矢性积的两个因子矢量，就必须改变符号，即换成它的反矢量.

例 1 证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，并说明它的几何意义.

证
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$$
$$=\boldsymbol{0}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{0}$$
$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

它的几何意义是：平行四边形面积的两倍等于以它的对角线为边的平行四边形的面积.

例 2 证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2. \qquad (1.8\text{-}7)$$

证 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),$$
$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2[\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})+\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})]$$
$$=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

下面我们在右手直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ 下，用矢量的分量表示矢性积.

定理 1.8.6 如果 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$，那么

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}, \tag{1.8-8}$$

或写成
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{1.8-9}$$

证 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k})\times(X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k})\\&=X_1X_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+X_1Y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+X_1Z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Y_1X_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+Y_1Y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+Y_1Z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+Z_1X_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+Z_1Y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+Z_1Z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

又因为坐标矢量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是三个两两互相垂直的单位矢量，所以有关系式

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\&\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}, \ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}, \ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.\end{aligned} \tag{1.8-10}$$

从而得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\boldsymbol{j}\\&\quad+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

此即(1.8-8)式，利用三阶行列式可写成(1.8-9)。

例3 已知空间三点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$, $C(3,2,-5)$, 试求 (1) $\triangle ABC$ 的面积; (2) $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高.

解 (1) $\triangle ABC$ 的面积$=\frac{1}{2}\square ABDC$ 的面积$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$, (如图 1-42).

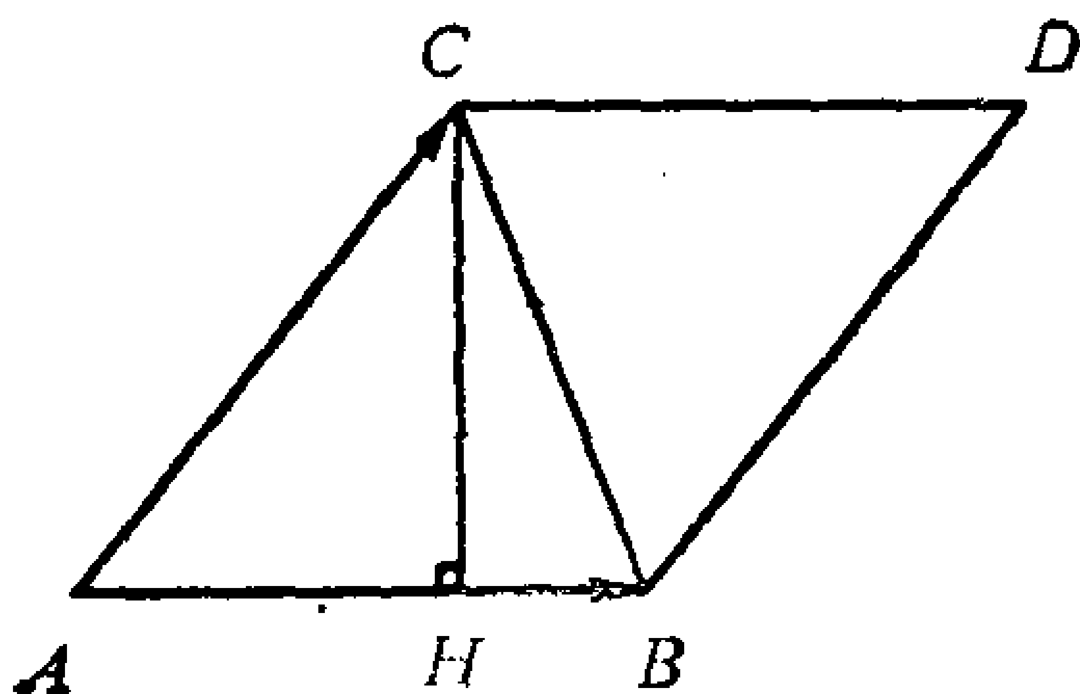


图 1-42

$$\overrightarrow{AB}=\{1, -3, 2\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{2, 0, -8\},$$

所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$,

从而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $=3\sqrt{21}$.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的高 CH 即是 $\square ABDC$ 的 AB 边上的高，所以

$$|\overrightarrow{CH}|=\frac{\square ABDC\text{的面积}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|},$$

又因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}$,

所以 $|\overrightarrow{CH}|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{6\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=3\sqrt{6}$.

习　　题

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$, 试求:

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$;　　(2) $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]^2$;

(3) $[(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})]^2$.

2. 证明:

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\leqslant\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$, 并说明在什么情形下等号成立;

(2) 如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 并说明它的几何意义;

(3) 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$, 那么 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线;

(4) 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$, 那么 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

3. 如果非零矢量 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,3)$ 满足 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$, 那么 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 是彼此垂直的单位矢量，并且按这次序构成右手系.

4. 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,-2,3\}$, 求与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直，且满足如下之一条件的矢量 $\boldsymbol{c}$:

(1) $\boldsymbol{c}$ 为单位矢量;

(2) $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=10$, 其中 $\boldsymbol{d}=\{2,1,-7\}$.

5. 在直角坐标系内已知三点 $A(5,1,-1)$, $B(0,-4,3)$, $C(1,-3,7)$, 试求 (1) 三角形 ABC 的面积; (2) 三角形 ABC 的三条高的长.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,3,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{5,6,4\}$, 试求 (1) 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积; (2) 这平行四边形的二条高的长.

7. 用矢量方法证明:

(1) 三角形的正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C};$$

(2) 三角形面积的海伦(Heron)公式: $\triangle^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, 式中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $\triangle$ 为三角形的面积.

§1.9 三矢量的混合积

在研究两个矢量的数性积和矢性积的基础上, 现在我们来研究三个矢量的乘积. 如果我们先把矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 作出数性积, 然后再和第三个矢量 $\boldsymbol{c}$ 相乘, 那么得到与矢量 $\boldsymbol{c}$ 共线的矢量, 因此这样相乘的情况, 不必再讨论.

如果我们先把矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 作出矢性积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 那么这个矢量还可以与第三个矢量 $\boldsymbol{c}$ 再作数性积或矢性积, 在前一种情形, 我们得到 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$, 在后一种情形, 我们得到 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$. 下一节我们将讨论 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$, 在这一节我们先讨论 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的性质.

定义 1.9.1 给定空间的三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 如果先做前两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢性积, 再做所得的矢量与第三个矢量 $\boldsymbol{c}$ 的数性积, 最后得到的这个数叫做三矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的混合积, 记做 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 或 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 或 $(\boldsymbol{abc})$.

混合积具有下列性质:

定理 1.9.1 三个不共面矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积 V, 并且当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 构成右手系时混合积是正数; 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 构成左手系时, 混合积是负数, 也就是有

$$(\boldsymbol{abc})=\varepsilon V, \tag{1.9-1}$$

当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是右手系时 $\varepsilon=1$; 当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是左手系时 $\varepsilon=-1$.

证 由于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 三矢不共面，把它们归结到共同的始点 O 可以构成以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体(图 1-43)，它的底面是以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形，面积为 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高 $|\overrightarrow{OH}|=h$，它的体积为 $V=S\cdot h$.

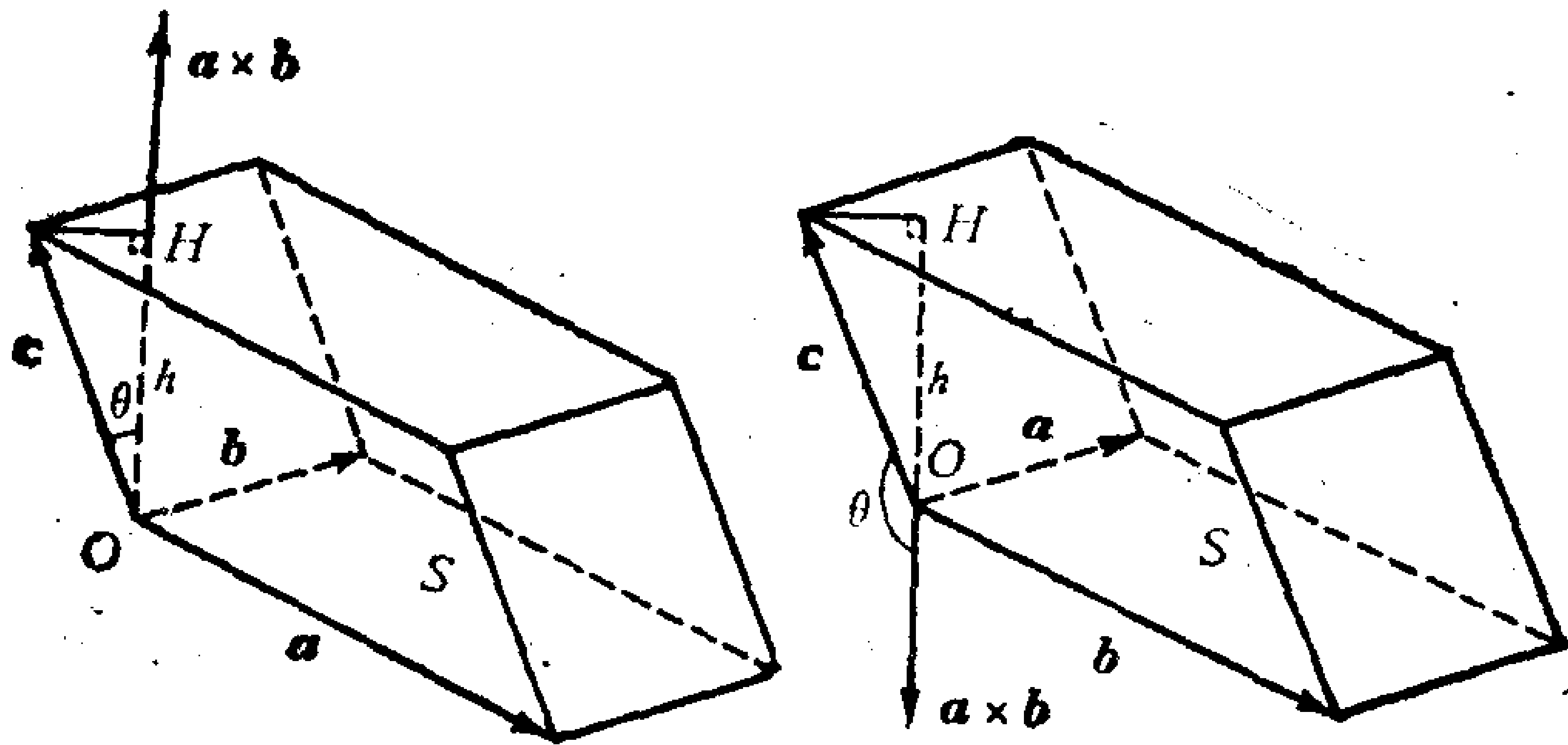


图 1-43

根据数性积定义

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\theta=S\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta, \qquad (1)$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的夹角.

当 $\{O;\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$，$h=|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，因而由(1)得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=S\cdot h=V.$$

当 $\{O;\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 成左手系时，$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$，$h=|\boldsymbol{c}|\cos(\pi-\theta)=-|\boldsymbol{c}|\cos\theta$，因而由(1)得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-Sh=-V.$$

定理 1.9.2 三矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

证 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，显然 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面且又有$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$. 下面假设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，我

们来证明定理 1.9.2 也成立.

如果$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$, 即$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$, 那么根据定理 1.7.1 有$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$, 另一方面由矢性积的定义知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 三矢量共面.

反过来, 如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面, 那么由$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$ (定义 1.8.1) 知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$, 于是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$(定理 1.7.1), 即$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=0$.

定理 1.9.3 轮换混合积的三个因子, 并不改变它的值, 对调任何两个因子要改变乘积符号, 即

$$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{cab})=-(\boldsymbol{bac})$$
$$=-(\boldsymbol{cba})=-(\boldsymbol{acb}). \qquad (1.9\text{-}2)$$

证 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面时, 定理显然成立; 当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面时, 轮换因子或对调因子, 混合积的绝对值都等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积(定理 1.9.1). 又因为轮换 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的顺序时, 决不会把右手系变为左手系, 也不会把左手系变为右手系, 因而混合积不变, 而当对调任意两个因子的位置时, 就将右手系变成左手系, 或将左手系变成右手系, 所以这时混合积要改变符号.

推论

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}). \qquad (1.9\text{-}3)$$

证 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

例 1 设三矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 试证三矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面.

证 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 两边与 $\boldsymbol{c}$ 作数性积

得
$$(\boldsymbol{abc})+(\boldsymbol{bcc})+(\boldsymbol{cac})=0,$$
但
$$(\boldsymbol{bcc})=0, \ (\boldsymbol{cac})=0,$$
所以$(\boldsymbol{abc})=0$, 因而 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面.

下面在右手直角坐标系 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 下, 我们用矢量的分量

表示三个矢量的混合积.

定理 1.9.4 如果 $\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=X_3\boldsymbol{i}+Y_3\boldsymbol{j}+Z_3\boldsymbol{k}$, 那么

$$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.9\text{-}4)$$

证 因为根据(1.8-8)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

根据数性积的分量表示法,得

$$(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

$$=X_3\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}+Y_3\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}+Z_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

所以(1.9-4)成立.

根据定理 1.9.2, 从(1.9-4)式,立即可得:

三个矢量 $\boldsymbol{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\boldsymbol{c}=\{X_3, Y_3, Z_3\}$ 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0.$$

这个结论就是定理 1.5.5 的内容.

例 2 已知四面体 $ABCD$ 的顶点坐标 $A(0,0,0)$, $B(6,0,6)$, $C(4, 3, 0)$, $D(2, -1, 3)$, 求它的体积.

解 由初等几何知道, 四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体的体积的六分之一,因此

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|;$$

但
$$\overrightarrow{AB}=\{6,\ 0,\ 6\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{4,\ 3,\ 0\},$$
$$\overrightarrow{AD}=\{2,\ -1,\ 3\},$$

所以
$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}6 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-6,$$

从而
$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})|=1.$$

例3 设 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ 为三个不共面的矢量，求矢量 $\boldsymbol{d}$ 对于 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ 的分解式.

解 因为 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ 不共面，所以根据定理1.4.3总有
$$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},$$
为了要决定 x 的值，可在等式两边分别与矢量 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 作数性积，即在等式两边分别与 $\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ 作混合积，那么有
$$(\boldsymbol{dbc})=x(\boldsymbol{abc})+y(\boldsymbol{bbc})+z(\boldsymbol{cbc}),$$
而
$$(\boldsymbol{bbc})=(\boldsymbol{cbc})=0,$$
所以
$$(\boldsymbol{dbc})=x(\boldsymbol{abc}),$$
因为 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ 不共面，所以 $(\boldsymbol{abc})\neq 0$，因此
$$x=\frac{(\boldsymbol{dbc})}{(\boldsymbol{abc})},$$
同理可求得 y 与 z 的值为
$$y=\frac{(\boldsymbol{adc})}{(\boldsymbol{abc})},\quad z=\frac{(\boldsymbol{abd})}{(\boldsymbol{abc})}.$$

如果取直角坐标系，并设 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}$ 的分量分别为
$$\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\},$$
$$\boldsymbol{c}=\{c_1,\ c_2,\ c_3\},\quad \boldsymbol{d}=\{d_1,\ d_2,\ d_3\},$$
将这些分量代入上面的 $\boldsymbol{d}$ 对 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ 的分解式与 $x,\ y,\ z$ 的表达式，那么容易看出，上面的解法就是解线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

的克莱姆(Gramer)法则.

习　　题

1. 证明下列各题:

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\lambda\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

(2) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2)$;

(3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

2. 设径矢 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$, 证明 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)+(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)+(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1)$垂直于 ABC 平面.

3. 设 $\boldsymbol{u}=a_1\boldsymbol{e}_1+b_1\boldsymbol{e}_2+c_1\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}=a_2\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+c_2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{w}=a_3\boldsymbol{e}_1+b_3\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3$, 试证明

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3).$$

4. 已知直角坐标系内矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的分量,判别这些矢量是否共面? 如果不共面,求出以它们为三邻边作成的平行六面体体积.

(1) $\boldsymbol{a}\{3,4,5\}$, $\boldsymbol{b}\{1,2,2\}$, $\boldsymbol{c}\{9,14,16\}$;

(2) $\boldsymbol{a}\{3,0,-1\}$, $\boldsymbol{b}\{2,-4,3\}$, $\boldsymbol{c}\{-1,-2,2\}$.

5. 已知直角坐标系内 A、B、C、D 四点坐标,判别它们是否共面? 如果不共面,求以它们为顶点的四面体体积和从顶点 D 所引出的高的长.

(1) $A(1,0,1)$, $B(4,4,6)$, $C(2,2,3)$, $D(10,14,17)$;

(2) $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,4,8)$.

*§1.10　三矢量的双重矢性积

现在我们来研究三个矢量的另一种乘积.

定义 1.10.1　给定空间三矢量,先作其中两个矢量的矢性积,再作所得矢量与第三个矢量的矢性积,那么最后的结果仍然是

一矢量，叫做所给三矢量的双重矢性积简称为三矢矢积.

例如$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$就是三矢量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$的一个双重矢性积.

首先我们可以明确：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$是和$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$共面且垂直于$\boldsymbol{c}$的矢量，这是因为根据矢性积的定义，立即知道$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$与矢量$\boldsymbol{c}$垂直，并且它与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直，而$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$也与$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直，所以$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$共面.

双重矢性积的上述几何关系可以概括为下面一个定理：

定理1.10.1

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}. \tag{1.10-1}$$

证 如果$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$中有一为零矢量，或$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，或$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$都垂直，那么(1.10-1)两边都为零矢量，定理显然成立.

现在设$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$为三个非零矢量，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，为了证明这时(1.10-1)也成立，我们先证明(1.10-1)中当$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$时成立，即有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^2)\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

由于$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$共面，而$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，从而可设

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}, \tag{2}$$

(2)式两边先后与$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$作数性积得

$$\lambda(\boldsymbol{a}^2)+\mu(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})=0, \tag{3}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{b}^2)=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2. \tag{4}$$

利用公式(1.8-7)由(3)、(4)解得

$$\lambda=-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b},\quad \mu=\boldsymbol{a}^2, \tag{5}$$

(5)代入(2)即得(1).

下面证(1.10-1)成立. 因为三矢量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$不共面，所以对于空间的任意矢量$\boldsymbol{c}$，根据(1.4-3)总有

$$\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{6}$$

从而有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times[\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]$$
$$=\alpha[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]-\beta[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}],$$

利用(1)式可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}&=\alpha[(\boldsymbol{a}^2)\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{a}]-\beta[(\boldsymbol{b}^2)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{b}]\\&=[\alpha(\boldsymbol{a}^2)+\beta(\boldsymbol{ab})]\boldsymbol{b}-[\alpha(\boldsymbol{ab})+\beta(\boldsymbol{b}^2)]\boldsymbol{a}\\&=[\boldsymbol{a}\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))]\boldsymbol{b}\\&\quad-[\boldsymbol{b}\cdot(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))]\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a}\mathbf{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\mathbf{c})\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

即(1.10-1)成立,定理证毕.

必须指出,在一般情况下

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c}),$$

这是因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})&=-(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})\times\boldsymbol{a}=(\mathbf{c}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a}\mathbf{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{ab})\mathbf{c},\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})=(\boldsymbol{a}\mathbf{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{ab})\mathbf{c}. \qquad (1.10\text{-}2)$$

比较公式(1.10-1)和(1.10-2)可知,$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\mathbf{c})$和$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\mathbf{c}$在一般情况下是两个不同的矢量,因此双重矢性积不满足结合律.

但公式(1.10-1)和(1.10-2)有共同的易于记忆的规律:三矢量的双重矢性积等于中间的矢量与其余两矢量的数性积的乘积减去括弧中另一个矢量与其余两矢量的数性积的乘积.

利用公式(1.10-1)可以证明拉格朗日(Lagrange)恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}' & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}' & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}'\end{vmatrix}. \qquad (1.10\text{-}3)$$

这是因为由公式(1.9-3),(1.10-1)得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}']\boldsymbol{b}'\\&=[(\boldsymbol{aa}')\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{ba}')\boldsymbol{a}]\boldsymbol{b}'\\&=(\boldsymbol{aa}')(\boldsymbol{bb}')-(\boldsymbol{ab}')(\boldsymbol{ba}'),\end{aligned}$$

这就是(1.10-3).

拉格朗日恒等式的一个特殊情况是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

这就是(1.8-7).

例 1 试证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 因为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$
$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b},$$
$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

三式相加得$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例 2 证明

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')&=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}')\boldsymbol{a}'-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}')\boldsymbol{b}'\\&=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}')\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}')\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

证 (1) 设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}$, 于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')&=\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')\\&=(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}')\boldsymbol{a}'-(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}')\boldsymbol{b}'\\&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}']\boldsymbol{a}'-[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}']\boldsymbol{b}'\\&=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}')\boldsymbol{a}'-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}')\boldsymbol{b}'.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')&=-(\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{b}')\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=-[(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]\\&=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}')\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}')\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

习　　题

1. 在直角坐标系内已经知道 $\boldsymbol{a}\{1,0,-1\}$, $\boldsymbol{b}\{1,-2,0\}$, $\boldsymbol{c}\{-1,2,1\}$, 求$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

2. 证明对于任意矢量 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,3,4)$下式成立:

$(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_4)+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3)\cdot(\boldsymbol{r}_4\times\boldsymbol{r}_2)+(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_4)\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3)=0$.

3. 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}$.

4. 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$.

5．证明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共面.

6．对于任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$，证明

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}.$$

结 束 语

解析几何是用代数的方法来研究几何，从而把几何问题的讨论，从定性的研究推进到可以计算的定量的层面．为了把代数的方法引入到几何中来，这就必须把空间的几何结构代数化，这也是解析几何的基础．在这一章里，我们系统地介绍了矢量代数的基本知识，它实质上是一个使空间几何结构代数化的过程．

我们知道，当空间取定一点 O 后，空间的任意点 P 就与它的径矢 $\overrightarrow{OP}$ 成一一对应，这样关于点的几何问题就与矢量联系起来了，由于矢量可以进行运算，因此通过矢量也就把代数运算引入到几何中来了．

对于矢量的运算，我们首先介绍了矢量的线性运算，即矢量的加法与数乘(即数乘矢量)，对于矢量的加法，它具有下面的运算规律：

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

对于数乘它具有下面的运算规律：

5) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

6) $\lambda(\mu)\boldsymbol{a}=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

8) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

利用矢量的线性运算，就可以解决几何中的与共线、共面、定比

分点等有关的仿射性质的几何问题；为了解决几何中的与长度、交角等有关的度量问题，我们又介绍了两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数性积或称内积。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}).$$

内积具有下面的运算规律：

9) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

10) $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ ①;

11) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2>0,\ (\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$.

为了解决空间的几何问题，我们还介绍了两矢量的矢性积或称外积，三矢量的混合积；最后介绍的三矢量的二重矢性积，它的公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

就使得三个以上矢量的相乘总可以转化为三矢量的相乘，从而我们就没有必要讨论三个以上的矢量相乘了.

我们在这里所说的矢量，都可以理解为有向线段，如果我们不考虑矢量的这种具体的含意，而只考虑 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, … 等元素构成的集合 V，在这集合中规定了满足 1)—4) 的加法与满足 5)—8) 的数乘两种运算，其中 λ, μ 都是实数，那么我们在高等代数里可以看到，集合 V 就称为实数域上的矢量空间(或称线性空间)，如果我们在这个集合 V 里再规定满足 9)—10) 的内积，那么我们就称 V 为欧几里得矢量空间. 因此，我们在这一章中，在空间引进了以有向线段来表示的矢量与满足 1)—4) 的矢量的加法，满足 5)—8) 的矢量的数乘，以及满足 9)—11) 的矢量的内积，它实际上是把空间的几何结构代数化为欧几里得矢量空间的一个具体的模型，我们所说的用矢量方法来处理几何问题，实际上就是把几何学的一

① $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 等价于下列两式：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

些推理转化为在这个欧几里得矢量空间模型上的以矢量的运算规律为基础的代数的演算,这样,代数的方法也就引入到几何中来了.

在这一章中,我们又通过矢量引进了标架与坐标的概念,这样就使得矢量与有序实数组(即坐标或称分量),点与有序实数组(即坐标)建立了一一对应的关系,这样就使得空间的几何结构数量化了,从而矢量的运算,也就转化为数的运算,这对我们在计算上带来很大的方便,但是必须注意,在解决实际问题时,必须适当的选取坐标系,使计算简化.

在这里还要指出,我们在这一章中,所介绍的矢量运算的定义与运算的规律,是和坐标系的选取无关的. 矢量运算的坐标表达式,因选取不同的坐标系将会出现不同的表达式,例如两矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的数性积在直角坐标系下为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2, \tag{1}$$

其中 X_1, Y_1, Z_1 与 X_2, Y_2, Z_2 分别为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的直角坐标,但是如果选取一般的仿射坐标系,设

$$\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{e}_1+Y_1\boldsymbol{e}_2+Z_1\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{b}=X_2\boldsymbol{e}_1+Y_2\boldsymbol{e}_2+Z_2\boldsymbol{e}_3,$$

那么根据数性积的运算规律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=&X_1X_2\boldsymbol{e}_1^2+Y_1Y_2\boldsymbol{e}_2^2+Z_1Z_2\boldsymbol{e}_3^2+(X_1Y_2+X_2Y_1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\\&+(X_1Z_2+X_2Z_1)\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3+(Y_1Z_2+Y_2Z_1)\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3,\end{aligned} \tag{2}$$

它的值决定于坐标系的基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 间的数性积,它对给定的坐标系都是已知的. 对于矢量的模与两点间的距离也可以得出类似的公式. 比较(1), (2)两式,十分清楚,(1)式要简单得多,因此我们在讨论长度、角度等度量问题时,我们总是尽可能采用直角坐标系,以简化我们的公式,但是在涉及到相交、共线、共面等仿射性质问题时,采用直角坐标系与一般仿射坐标系其结论是相同的,有时采用仿射坐标系将会更方便.

第二章 轨迹与方程

在平面上或空间取定了标架之后，平面上或空间的点就与有序实数组(x, y)或(x, y, z)建立了一一对应的关系，在此基础上，我们将进一步建立作为点的轨迹的曲线、曲面与其方程之间的联系，把研究曲线与曲面的几何问题，归结为研究其方程的代数问题，从而为用代数的方法对一些曲线与曲面进行研究创造了条件.

§2.1 平面曲线的方程

在这里，平面上的曲线(包括直线)，都是看成具有某种特征性质的点的集合. 曲线上点的特征性质，包含着两方面的意思，就是：①曲线上的点都具有这些性质；②具有这些性质的点都在曲线上. 因此曲线上点的特征性质，也可以说成是点在曲线上的充要条件.

曲线上点的特征性质，在建立了坐标系的平面上，它反映为曲线上点的两个坐标x与y所应满足的相互制约条件，一般用方程

$$F(x, y)=0$$

或

$$y=f(x)$$

来表达.

定义 2.1.1 当平面上取定了标架之后，如果一个方程与一条曲线有着关系：① 满足方程的(x, y)必是曲线上某一点的坐标；② 曲线上任何一点的坐标(x, y)满足这个方程，那么这个方程就叫做这条*曲线的方程*，而这条曲线叫做这个方程的*图形*.

为了方便起见，“点的坐标满足方程”这句话常说成“点满足方程”.

根据曲线方程的定义，曲线上的点与其方程的解之间有着一

一对应关系．这样，研究曲线的几何问题，就可以转化为研究其方程的代数问题了．

对于一条给定的曲线，要求出它的方程，实际上就是在给定的坐标系下，将这条曲线上的点的特征性质，用关于曲线上的点的两个坐标 x, y 的方程来表达，现举例说明于下：

例 1 求圆心在原点，半径为 R 的圆的方程．

解 根据圆的定义，圆上任意点 $M(x, y)$ 的特征性质，即 $M(x, y)$ 在圆上的充要条件是 M 到圆心 O 的距离等于半径 R，即

$$|\overrightarrow{OM}|=R.$$

应用两点距离公式，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=R, \tag{1}$$

两边平方得

$$x^2+y^2=R^2, \tag{2.1-1}$$

由于方程(2.1-1)与(1)同解，所以(2.1-1)即为所求圆的方程．

完全类似地，可以求得圆心在(a, b)半径为 R 的圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{2.1-2}$$

求曲线的方程，有时在化简过程中，会增添不属于给定条件的内容．这时，必须从方程开始检查一下，把方程中代表那些不符合给定条件的点限制掉．

例 2 已知两点 $A(-2, -2)$ 和 $B(2, 2)$，求满足条件 $|\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{MB}|=4$ 的动点 M 的轨迹方程．

解 动点 M 在轨迹上的充要条件是

$$|\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{MB}|=4,$$

用点 M 的坐标(x, y)来表达就是

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=4, \tag{2}$$

移项得

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+4,$$

两边平方整理得

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=x+y-2, \qquad (3)$$

再两边平方整理得

$$xy=2. \qquad (4)$$

因为方程(2)与(3)同解，而方程(4)与(3)却不同解，但当方程(4)附加了条件 $x+y-2\geqslant 0$ 即 $x+y\geqslant 2$ 后，方程(4)与(3)同解，从而方程(4)与(2)同解，所以方程

$$xy=2, \ (x+y\geqslant 2)$$

为所求动点 M 的轨迹方程.

这里在方程 $xy=2$ 中附加了条件 $x+y\geqslant 2$，其意思就是在方程 $xy=2$ 中除去使 $x+y<2$ 的解，因为这些是不符合给定条件的多余的部分. 所求的轨迹是反比函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象——双曲线的一支，即第一象限中的部分(图 2-1 中的实线部分).

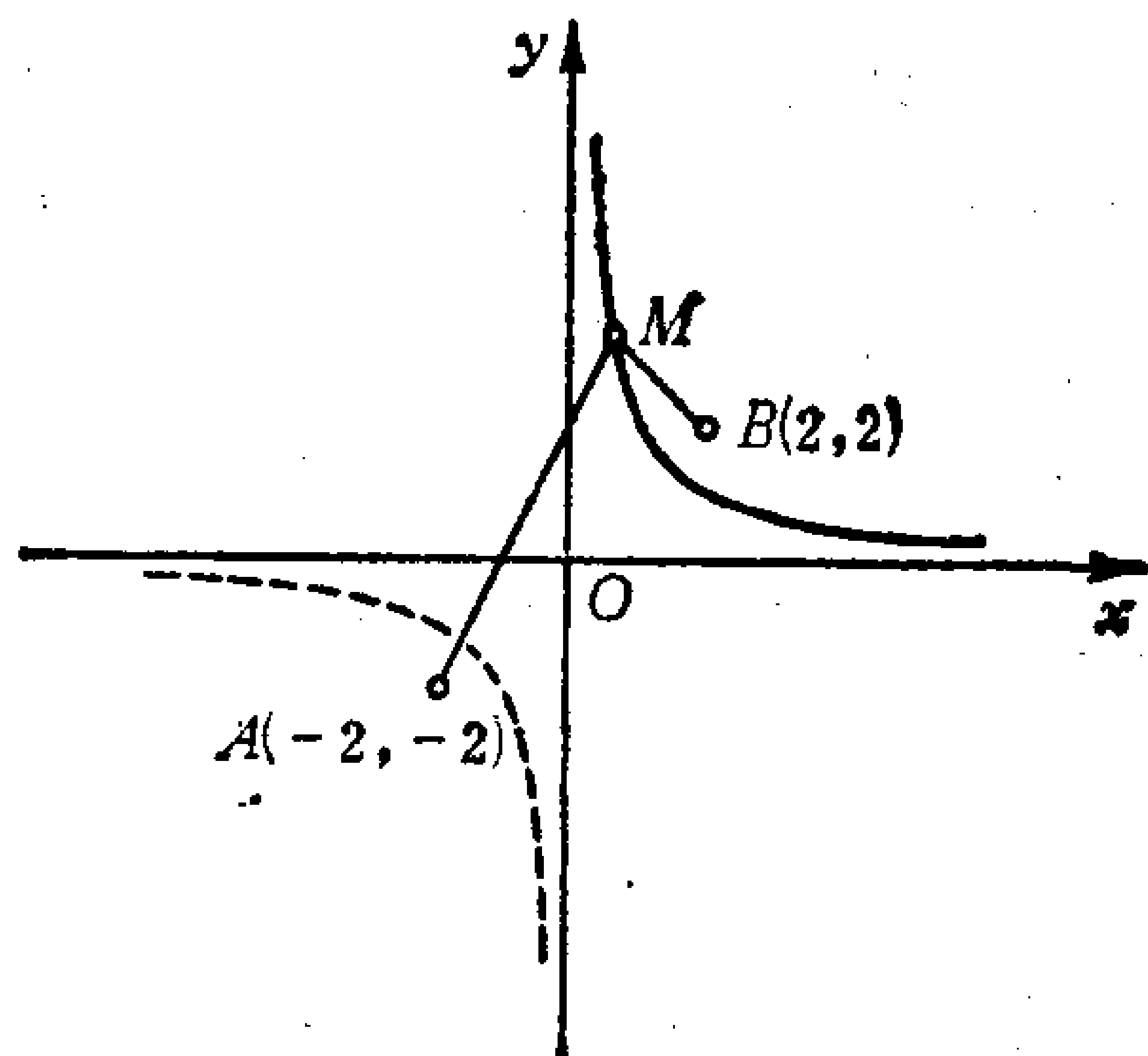


图 2-1

在解析几何中，曲线又常常表现为一个动点运动的轨迹，但是运动的规律往往不是直接反映为动点的两个坐标 x 与 y 之间的关系，而是直接表现为动点的位置随着时间 t 改变的规律. 当动点按照某种规律运动时，与它对应的径矢也将随着时间 t 的不同而改变(模与方向的改变)，这样的径矢，我们称它为变矢，记做 $\boldsymbol{r}(t)$. 如果变数 $t(a\leqslant t\leqslant b)$ 的每一个值对应于变矢 $\boldsymbol{r}$ 的一个完全确定的值(模与方向) $\boldsymbol{r}(t)$，那么我们就说 $\boldsymbol{r}$ 是变数 t 的矢性函数，并把它记做

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ a\leqslant t\leqslant b. \qquad (2.1\text{-}3)$$

显然当 t 变化时,矢量 $\boldsymbol{r}$ 的模与方向一般也都随着改变.

设平面上取定的标架为 $\{O;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$,矢量就可用它的分量来表达,这样矢性函数(2.1-3)就可以写为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2,\ (a\leqslant t\leqslant b), \qquad (2.1\text{-}4)$$

其中 $x(t)$, $y(t)$是 $\boldsymbol{r}(t)$的分量,它们分别是变数 t 的函数.

定义 2.1.2 若取 $t(a\leqslant t\leqslant b)$的一切可能取的值,由(2.1-4)表示的径矢 $\boldsymbol{r}(t)$的终点总在一条曲线上;反过来,在这条曲线上的任意点,总对应着以它为终点的径矢,而这径矢可由 t 的某一值 $t_0(a\leqslant t_0\leqslant b)$通过(2.1-4)完全决定,那么就把表达式(2.1-4)叫做曲线的*矢量式参数方程*,其中的 t 为*参数*.

换句话说,(2.1-4)叫做一条曲线的矢量式参数方程,如果当 t 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 内变动时,径矢 $\boldsymbol{r}(t)$的终点 $P(x(t),\ y(t))$就描绘出这条曲线来(图 2-2).

因为曲线上点的径矢 $\boldsymbol{r}(t)$的分量为 $x(t)$, $y(t)$,所以曲线的参数方程也常写成下列形式

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} (a\leqslant t\leqslant b). \qquad (2.1\text{-}5)$$

我们把表达式(2.1-5)叫做曲线的*坐标式参数方程*.

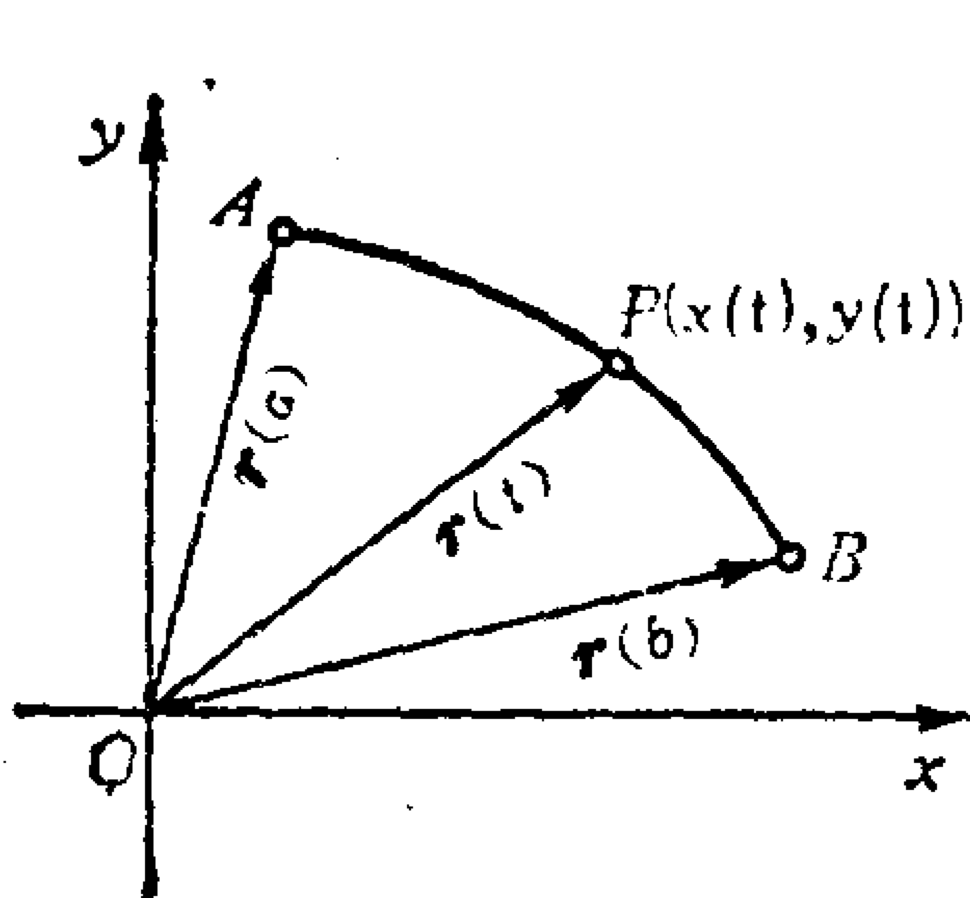


图 2-2

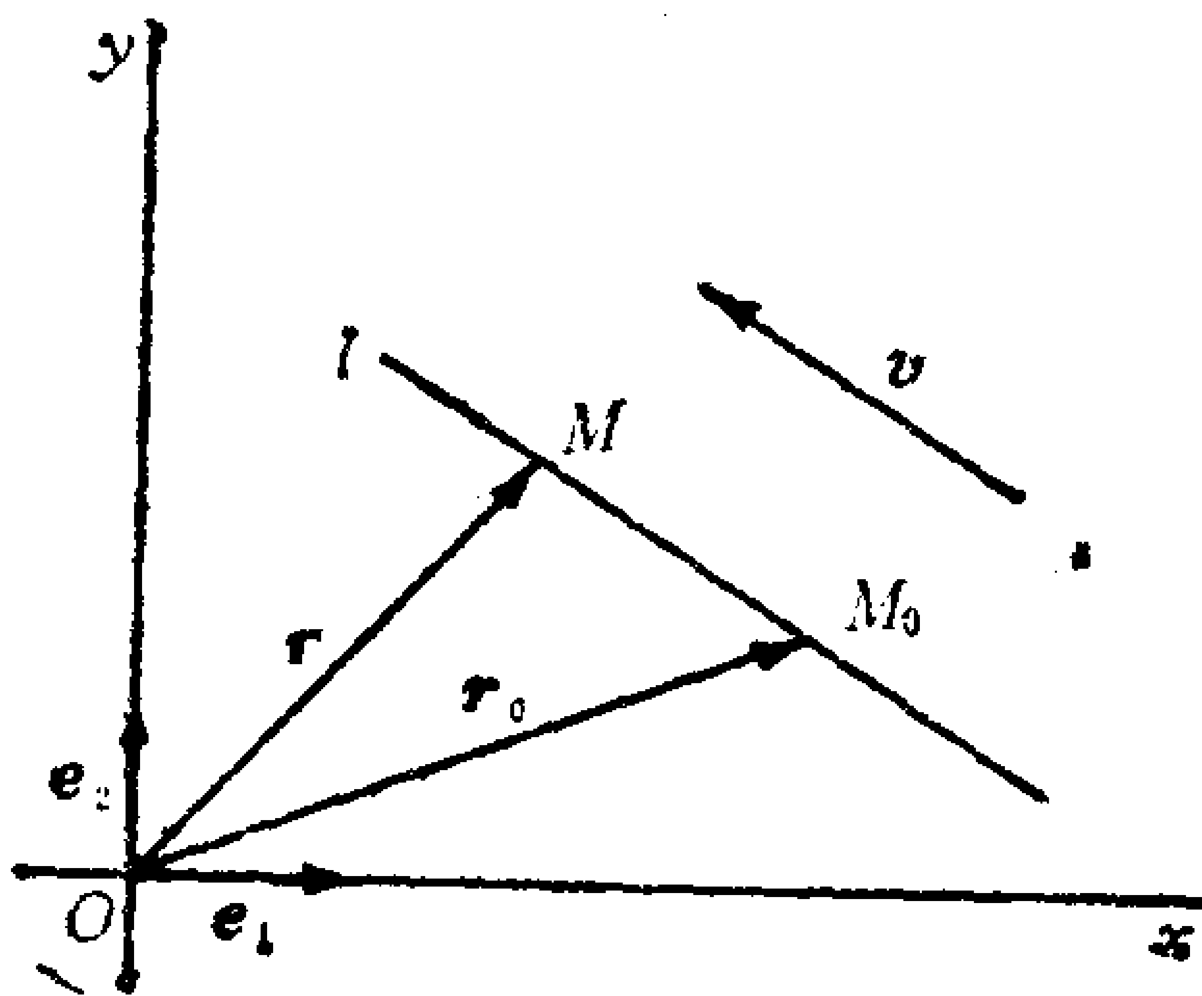


图 2-3

如果从(2.1-5)中消去参数t(如果可能的话)，那么就能得出曲线的普通方程

$$F(x, y)=0.$$

例 3 已知直线 l 通过定点 $M_0(x_0, y_0)$，并且它与非零矢量 $\boldsymbol{v}=\{X, Y\}$共线,求直线 l 的方程.

解 设 $M(x, y)$为直线 l 上的任意点，并设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$(图 2-3),那么点 M 在 l 上的充要条件为矢量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线,也就是

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{v}.$$

这里的 t 是随着点 M 而定的实数. 又因为

$$\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0,$$

所以
$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{v},$$

即
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}. \tag{2.1-6}$$

这就是直线 l 的矢量式参数方程,式中的 $t(-\infty<t<+\infty)$为参数.

由(2.1-6)容易得到直线 l 的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt. \end{cases} \tag{2.1-7}$$

直线的参数方程中的参数 t, 有一个简单的几何意义, 这就是当 $\boldsymbol{v}$ 是单位矢量时,那么点 M 与 M_0 之间的距离就等于$|t|$,这是

因为
$$|\overrightarrow{M_0M}|=|t\boldsymbol{v}|=|t|.$$

与直线 l 共线的非零矢量 $\boldsymbol{v}$ 叫做直线 l 的方向矢量,显然,任何一个与直线 l 共线的非零矢量,都可以作为直线 l 的方向矢量.

由直线的参数方程(2.1-7)消去参数 t 得

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}, ① \tag{2.1-8}$$

---

① 当直线的方向矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 X, Y 中有一为零,比如 $X=0$ 时, (2.1-8)应理解为 $x-x_0=0$.

方程(2.1-8)叫做直线的对称式方程或标准方程，它是一个二元一次方程，可以把它写成

$$Ax+By+C=0, \tag{2.1-9}$$

这里 $A=Y,\ B=-X,\ C=-(Yx_0-Xy_0)$.

反过来，任意一个二元一次方程(2.1-9)都表示直线，这是因为它总能化成(2.1-8)的形式．事实上，在方程(2.1-9)中任取一组解 $x_0,\ y_0$，那么有

$$Ax_0+By_0+C=0,$$

所以(2.1-9)可以改写为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

或

$$\frac{x-x_0}{B}=\frac{y-y_0}{-A}.$$

方程(2.1-9)叫做直线的一般方程．从上面我们看到直线一般方程(2.1-9)中系数 A 与 B 的几何意义是：矢量 $\boldsymbol{q}=\{B,\ -A\}$ 是直线(2.1-9)的一个方向矢量，在直角坐标系下，显然有 $\boldsymbol{p}=\{A,\ B\}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{q}$，从而 $\boldsymbol{p}$ 垂直于直线(2.1-9)，我们称 $\boldsymbol{p}=\{A,\ B\}$ 为直线(2.1-9)的法矢量．

给定两直线

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0,$$

那么 l_1 与 l_2 的方向矢量分别为 $\boldsymbol{v}_1=\{B_1,\ -A_1\}$, $\boldsymbol{v}_2=\{B_2,\ -A_2\}$，由两直线的方向矢量读者容易知道两直线 l_1 与 l_2 相交的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}, \tag{2.1-10}$$

两直线 l_1 与 l_2 平行的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}, \tag{2.1-11}$$

两直线 l_1 与 l_2 重合的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}, \tag{2.1-12}$$

而在直角坐标系下，两直线 l_1 与 l_2 的交角为

$$\cos\angle(l_1,\ l_2)=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \tag{2.1-13}$$

从而有

$$\operatorname{tg}\angle(l_1,\ l_2)=\pm\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{2.1-14}$$

例 4 一个圆在一直线上无滑动地滚动，求圆周上的一点 P 的轨迹.

解 取直角坐标系，设半径为 a 的圆在 x 轴上滚动，开始时点 P 恰好在原点 O(图 2-4)，经过一段时间的滚动，圆与直线的切点移到 A 点，圆心移到 C 的位置，这时有

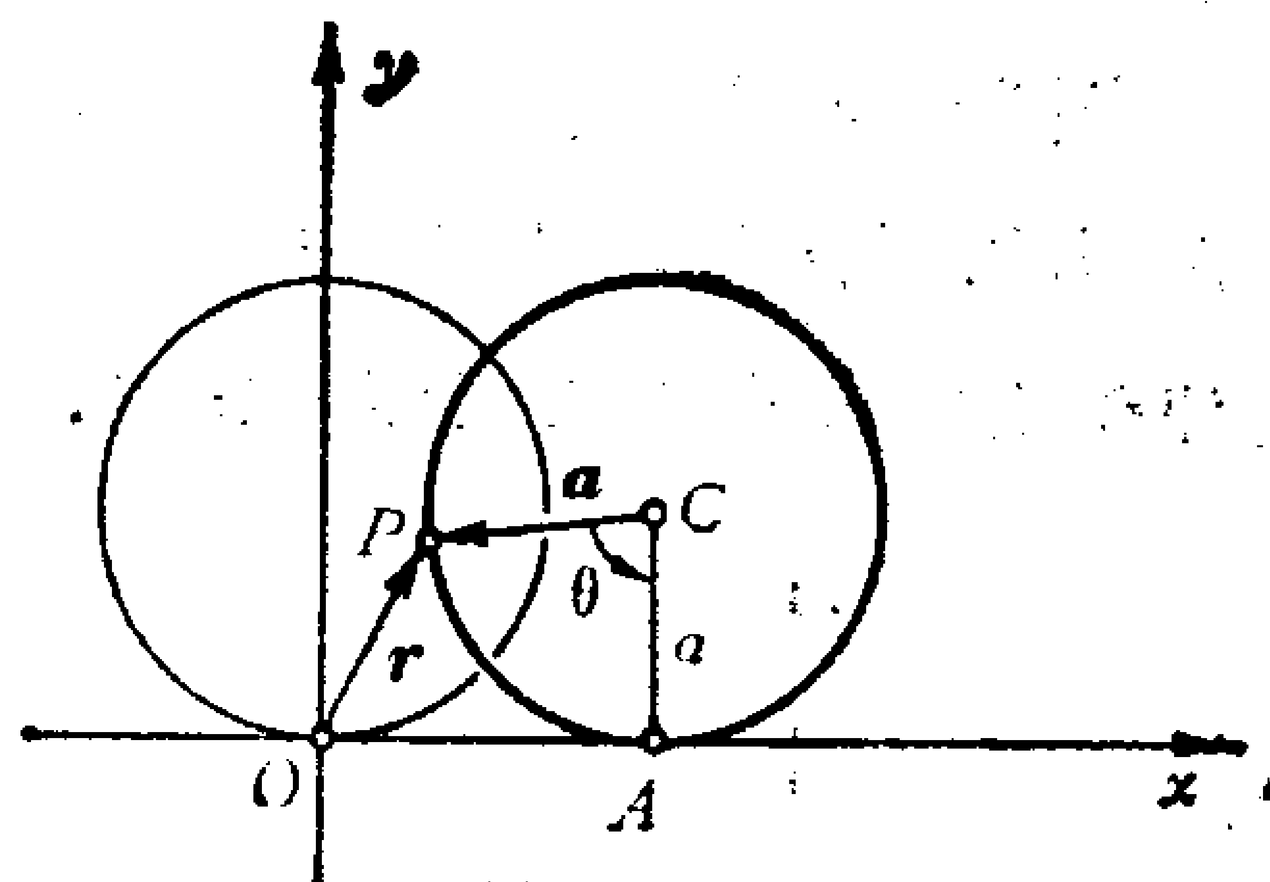


图 2-4

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}.$$

设 $\theta=\measuredangle(\overrightarrow{CP},\ \overrightarrow{CA})$，于是矢量 $\overrightarrow{CP}$ 对 x 轴所成的有向角为

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{CP})=-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),$$

则

$$\overrightarrow{CP}=\boldsymbol{i}a\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\boldsymbol{j}a\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=(-a\sin\theta)\boldsymbol{i}+(-a\cos\theta)\boldsymbol{j}.$$

又

$$\because\quad |\overrightarrow{OA}|=\overset{\frown}{AP}=a\theta,$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{OA}=a\theta\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{AC}=a\boldsymbol{j},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=a(\theta-\sin\theta)\boldsymbol{i}+a(1-\cos\theta)\boldsymbol{j}. \tag{2.1-15}$$

(2.1-15)是 P 点轨迹的矢量式参数方程，其中 $\theta(-\infty<\theta<+\infty)$ 为参数. 设 P 点的坐标为(x, y)，那么由(2.1-15)式容易得 P 点的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta), \end{cases} \quad (-\infty<\theta<+\infty) \tag{2.1-16}$$

取 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时，消去参数 θ，便得到 P 点轨迹在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时的一段的普通方程

$$x=a\arccos\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}. \tag{2.1-17}$$

这个方程要比参数方程(2.1-16)复杂得多.

当圆在直线上每转动一周时，点 P 在一周前后的运动情况总是相同的，因此曲线是由一系列完全相同的拱形曲线组成(图 2-5)，这种曲线叫做旋轮线或称为摆线.

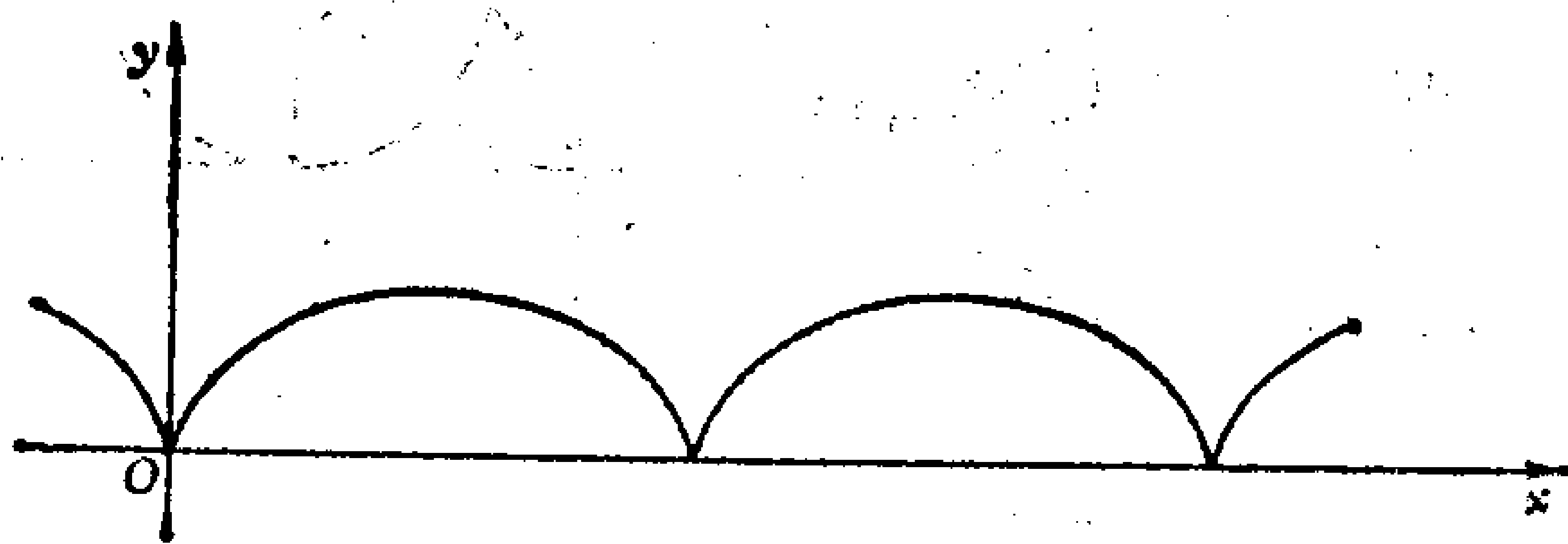


图 2-5

例 5 已知大圆半径为 a，小圆半径为 b，设大圆不动，而小圆在大圆内无滑动地滚动，动圆周上某一定点 P 的轨迹叫做内旋轮线(或称内摆线)，求内旋轮线的方程.

解 设运动开始时动点 P 与大圆周上的点 A 重合，并取大圆中心 O 为原点，OA 为 x 轴，过 O 点垂直于 OA 的直线为 y 轴(图 2-6)，经过某一过程之后，小圆与大圆的接触点为 B，并设小圆中

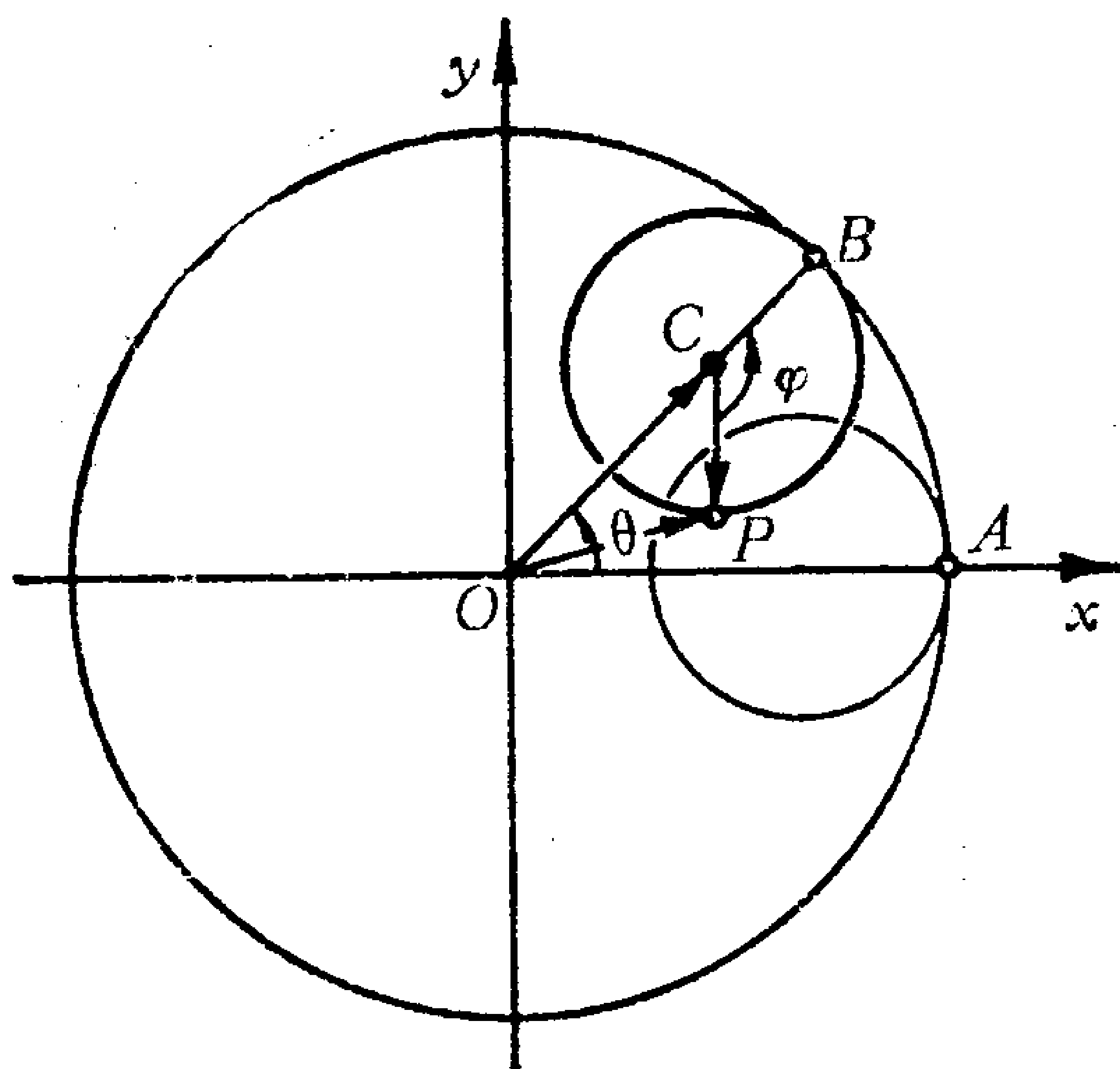


图 2-6

心为 C，那么 C 一定在半径 OB 上，显然有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP},$$

设 $$\theta=\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OC}),\ \ \varphi=\measuredangle(\overrightarrow{CP},\ \overrightarrow{CB}),$$

那么 $$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{i}(a-b)\cos\theta+\boldsymbol{j}(a-b)\sin\theta,$$

且有 $$a\theta=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{PB}=b\varphi,$$

所以 $$\varphi=\frac{a}{b}\theta,$$

矢量 $\overrightarrow{CP}$ 对 x 轴所成的有向角为

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{CP})=\theta-\varphi=\frac{b-a}{b}\theta,$$

由于 $|\overrightarrow{CP}|=b$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=\boldsymbol{i}b\cos\frac{b-a}{b}\theta+\boldsymbol{j}b\sin\frac{b-a}{b}\theta\\&=\boldsymbol{i}b\cos\frac{a-b}{b}\theta-\boldsymbol{j}b\sin\frac{a-b}{b}\theta,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{r}=\left[(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{a-b}{b}\theta\right]\boldsymbol{i}$$
$$+\left[(a-b)\sin\theta-b\sin\frac{a-b}{b}\theta\right]\boldsymbol{j}. \qquad (2.1\text{-}18)$$

此式就是内旋轮线的矢量式参数方程，式中 $\theta(-\infty<\theta<+\infty)$ 为参数. 设 P 点的坐标为 (x, y)，那么由(2.1-18)式容易得内旋轮线的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos\theta+b\cos\dfrac{a-b}{b}\theta, \\ y=(a-b)\sin\theta-b\sin\dfrac{a-b}{b}\theta; \end{cases} \qquad (2.1\text{-}19)$$
$$(-\infty<\theta<+\infty).$$

特殊地，当 $a=4b$ 时，应用公式

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta,$$

曲线方程(2.1-19)便化为

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta. \end{cases} \qquad (2.1\text{-}20)$$

这条曲线叫做四尖点星形线(图 2-7).

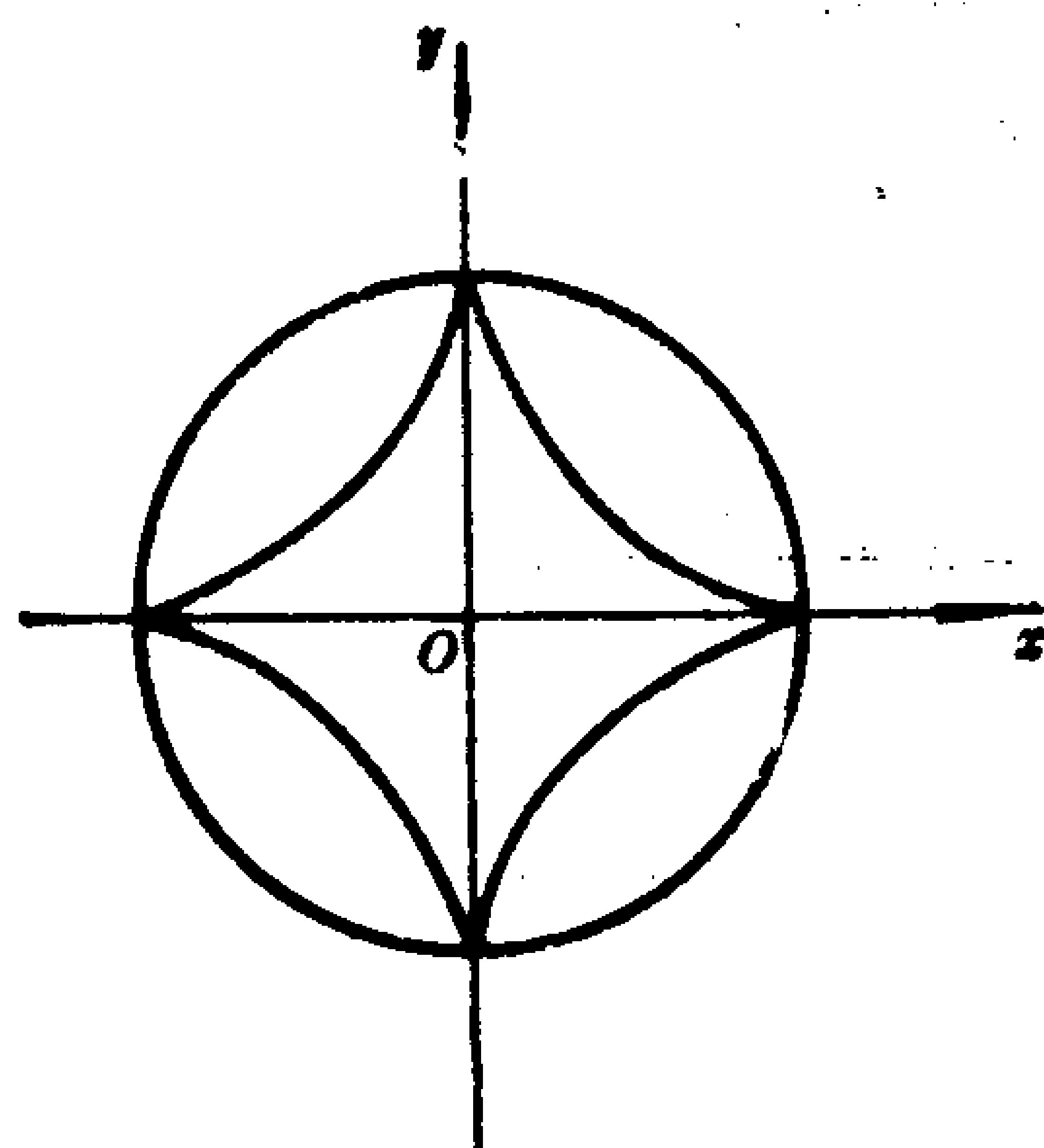


图 2-7

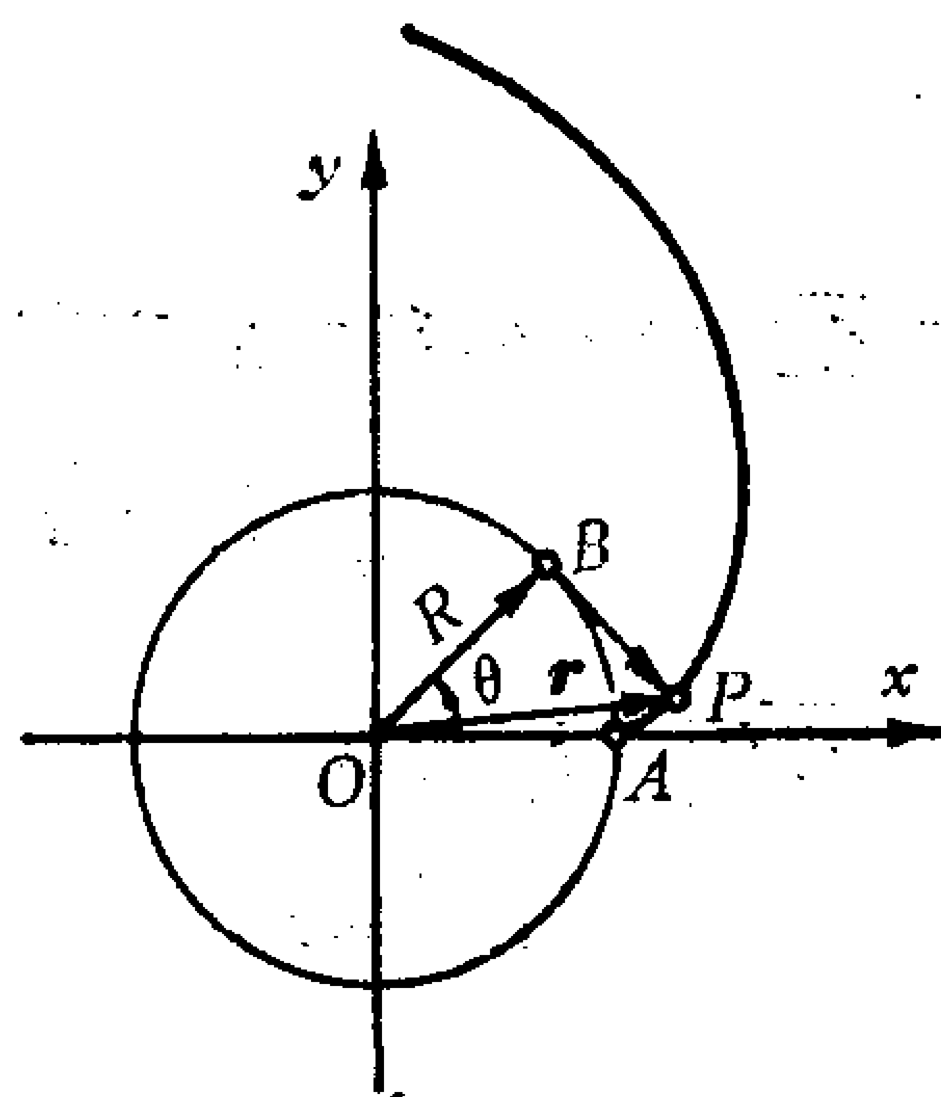


图 2-8

例 6 把线绕在一个固定圆周上，将线头拉紧后向反方向旋转，以把线从圆周上解放出来，使放出来的部分成为圆的切线，求线头的轨迹.

解 设圆的半径为 R，线头 P 的最初位置是圆周上的点 A，以圆心为原点，OA 为 x 轴，经过某一过程后，切点移至 B，PB 为切线(图 2-8)，那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP},$$

设 $\theta=\measuredangle(\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OB})$，那么

$$\overrightarrow{OB}=R(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta),$$

且矢量 $\overrightarrow{BP}$ 对 x 轴所成的有向角为

$$\measuredangle(\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{BP})=\theta-\frac{\pi}{2},$$

而
$$|\overrightarrow{BP}|=\overset{\frown}{BA}=R\theta,$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BP}|\left[\boldsymbol{i}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\boldsymbol{j}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$=R\theta(\boldsymbol{i}\sin\theta-\boldsymbol{j}\cos\theta),$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r}=R(\cos\theta+\theta\sin\theta)\boldsymbol{i}+R(\sin\theta-\theta\cos\theta)\boldsymbol{j},\qquad (2.1\text{-}21)$$

(2.1-21) 就是所求 P 点轨迹的矢量式参数方程，其中 θ 为参数.如果设 P 的坐标为$(x,\ y)$，那么由(2.1-21)得该轨迹的坐标式参数方程为

$$\begin{cases}x=R(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\ y=R(\sin\theta-\theta\cos\theta).\end{cases}\qquad (2.1\text{-}22)$$

由(2.1-21)或(2.1-22)表示的曲线，叫做圆的渐伸线或称切展线，这种曲线，在工业上常被采用为齿廓曲线.

曲线的参数方程，是解析几何联系实际的一个重要的工具，有的时候运用参数方程来表达曲线，要比普通方程简单得多，甚至有的曲线只能用参数方程表示，而不能用普通方程表示，即不能用

x, y 的初等函数来表示，例如参数方程

$$\begin{cases} x=e^t+t+\lg t^2, \\ y=t+\sin t+\arcsin t, \end{cases}$$

便是这样的例子.

消去曲线参数方程中的参数就得曲线的普通方程，反过来，我们也可以把曲线的普通方程改写为参数方程的形式，一般地适当选取参数 t，找出变数 x 与参数 t 的关系式 $x=x(t)$，然后代入原方程求出 $y=y(t)$，那么 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 就是曲线的参数方程. 在这里当然也可先找出 y 与 t 的关系式 $y=y(t)$，然后代入原方程求出 $x=x(t)$，从而得曲线的参数方程.

例 7 把椭圆的普通方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 改写为参数方程.

解 设 $x=a\cos\theta$，代入原方程得

$$y=\pm b\sin\theta,$$

如果取 $y=-b\sin\theta$，令 $\theta=-t$，那么

$$x=a\cos\theta,\ y=-b\sin\theta$$

可以变形为
$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,$$

所以取 θ 为参数，且 $-\pi\leqslant\theta<\pi$，那么椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases} \quad (-\pi\leqslant\theta<\pi).$$

在化曲线的普通方程为参数方程时，由于选取的参数不是唯一的，所以关系式 $x=x(t)$ 可以有不同的形式，从而同一条曲线的参数方程也可以有多种表达形式. 例如在例 7 中，如果设

$$y=tx+b,$$

代入原方程得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(tx+b)^2}{b^2}=1.$$

由此解得 $$x=0,\ x=-\frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2},$$

在第二式中取 $t=0$，得 $x=0$，所以舍去第一式，取

$$x=-\frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2},$$

从而得 $$y=\frac{b(b^2-a^2t^2)}{b^2+a^2t},$$

如果令 $u=-t$，那么有

$$x=\frac{2a^2bu}{b^2+a^2u^2},\quad y=\frac{b(b^2-a^2u^2)}{b^2+a^2u^2},$$

所以椭圆的参数方程另一种表达形式为

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}, \\ y=\dfrac{b(b^2-a^2t^2)}{b^2+a^2t^2}, \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty).$$

在第二种解法中，我们设 $y=tx+b$，它实际上是在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上取定一点 $(0,\ b)$，作以点 $(0,\ b)$ 为中心的直线束，而这时的椭圆的参数方程恰为直线束中的直线与椭圆交点的坐标的一般表达式。由于这时过点 $(0,\ b)$ 的 y 轴的斜率不存在，因此尚需补上点 $(0,\ -b)$，或者把它看成当 $t\to\infty$ 时的交点。仿此，在化方程

$$y^2(2a-x)=x^3,\ (a>0)$$

为参数方程时，我们只要设 $y=tx$，就能求得它的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{2at^3}{1+t^2}, \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty).$$

在曲线的参数方程与普通方程互化时，必须注意两种不同形式的方程应该等价，因为它们是代表同一条曲线。但是在互化时，

往往由于变数的允许值可能产生变化，因而可能导致两者所表示的曲线不完全一样，例如化方程 $y=2x^2+1$ 为参数方程时，如果令 $x=\cos\theta$，那么参数方程为

$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=2+\cos 2\theta, \end{cases} \quad (0\leqslant\theta<2\pi).$$

因为 $-1\leqslant\cos n\theta\leqslant1$，所以有 $-1\leqslant x\leqslant1$，$1\leqslant y\leqslant3$. 因此，这时参数方程所表示的曲线只是原曲线的一部分，两方程不等价. 但如果令 $x=t$，代入原方程得

$$\begin{cases} x=t, \\ y=2t^2+1, \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty).$$

这参数方程所表示的曲线与原曲线一致，所以它与原方程等价，也就是说它是原曲线的参数方程.

再如参数方程 $x=t^4$，$y=t^2$，由于 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，所以表示的曲线只是第一象限里的部分，而消去参数后得普通方程为 $y^2=x$，它表示整条抛物线，与原曲线比较增添了第四象里的部分. 但是如果附加了条件 $y\geqslant0$，那么两方程就等价了，因此它的普通方程应写成

$$y^2=x,\ (y\geqslant0).$$

习　题

1．一动点 M 到 $A(3,0)$ 的距离恒等于它到点 $B(-6,0)$ 的距离的一半，求此动点 M 的轨迹方程，并指出此轨迹是什么图形？

2．有一长度为 $2a(a>0)$ 的线段，它的两端点分别在 x 轴正半轴与 y 轴的正半轴上移动，试求此线段中点的轨迹.

3．一动点到两定点的距离的乘积等于定值 m^2，求此动点的轨迹（这轨迹叫做卡西尼卵形线）.

4．设 P、Q、R 是等轴双曲线上任意三点，求证 $\triangle PQR$ 的垂心 H 必在同一等轴双曲线上.

5. 任何一圆交等轴双曲线 $xy=c^2$ 于四点 $P\left(ct_1,\ \frac{c}{t_1}\right)$, $Q\left(ct_2,\ \frac{c}{t_2}\right)$, $R\left(ct_3,\ \frac{c}{t_3}\right)$ 及 $S\left(ct_4,\ \frac{c}{t_4}\right)$, 那么一定有 $t_1t_2t_3t_4=1$.

6. 求旋轮线

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t, \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的弧与直线 $y=\frac{3}{2}$ 的交点.

7. 消去下面的平面曲线的参数方程中的参数 t, 化为普通方程.

(1) $\begin{cases} x=at^2; \\ y=2at; \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$

(2) $\begin{cases} x=\sin t+5, \\ y=-2\cos t-1; \end{cases} \quad (0\leqslant t<2\pi)$

(3) $\begin{cases} x=r(3\cos t+\cos 3t), \\ y=r(3\sin t-\sin 3t), \end{cases} \quad (0\leqslant t<2\pi)$.

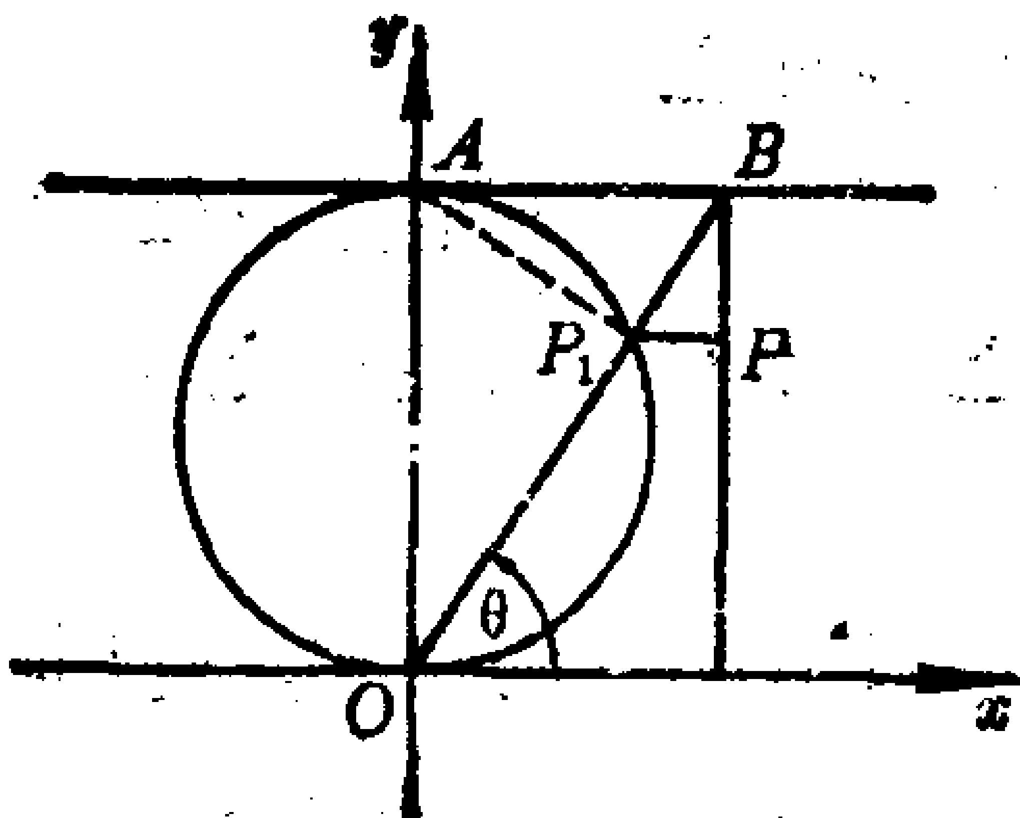
8. 把下面的平面曲线的普通方程化为参数方程.

(1) $y^2=x^3$; (2) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $(a>0)$;

(3) $x^3+y^3-3axy=0$, $(a>0)$.

9. 当一圆沿着一个定圆的外部作无滑动地滚动时, 动圆上一点的轨迹叫做外旋轮线, 如果我们用 a 与 b 分别表示定圆与动圆的半径, 试导出其参数方程(当 $a=b$ 时, 曲线叫做心脏线).

10. 设 $OA=a$ 为一圆的直径, 过 O 任意作一直线 OB, 与圆上 A 点的切线相交于 B 点, 设 OB 与圆交于另一点 P_1, 过 P_1 及 B 作相交于 P 点的直线使 $P_1P\perp OA$, $BP\,/\!/\,OA$, 求 P 点的轨迹(这轨迹叫做箕舌线).



第10题

§2.2 曲面的方程

1. 曲面的方程

空间曲面方程的意义和平面曲线的方程是一样的，那就是在空间建立坐标系之后，把曲面(作为点的轨迹)上的点的特征性质，用点的坐标 x, y 与 z 之间的关系式来表达，一般是用方程

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

或

$$z=f(x, y) \tag{1'}$$

来表达；反过来，每一个形如(1)或(1′)的方程通常表示空间的一个曲面．例如在空间取定一个坐标系后，满足(1′)的任意一组解(x, y, z)就确定一个点，而当 x, $y(a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d)$ 连续变动时，点$(x, y, f(x, y))$就画出一个图形来(图 2-9)，这就是(1′)的图形，一般地它是一个曲面．

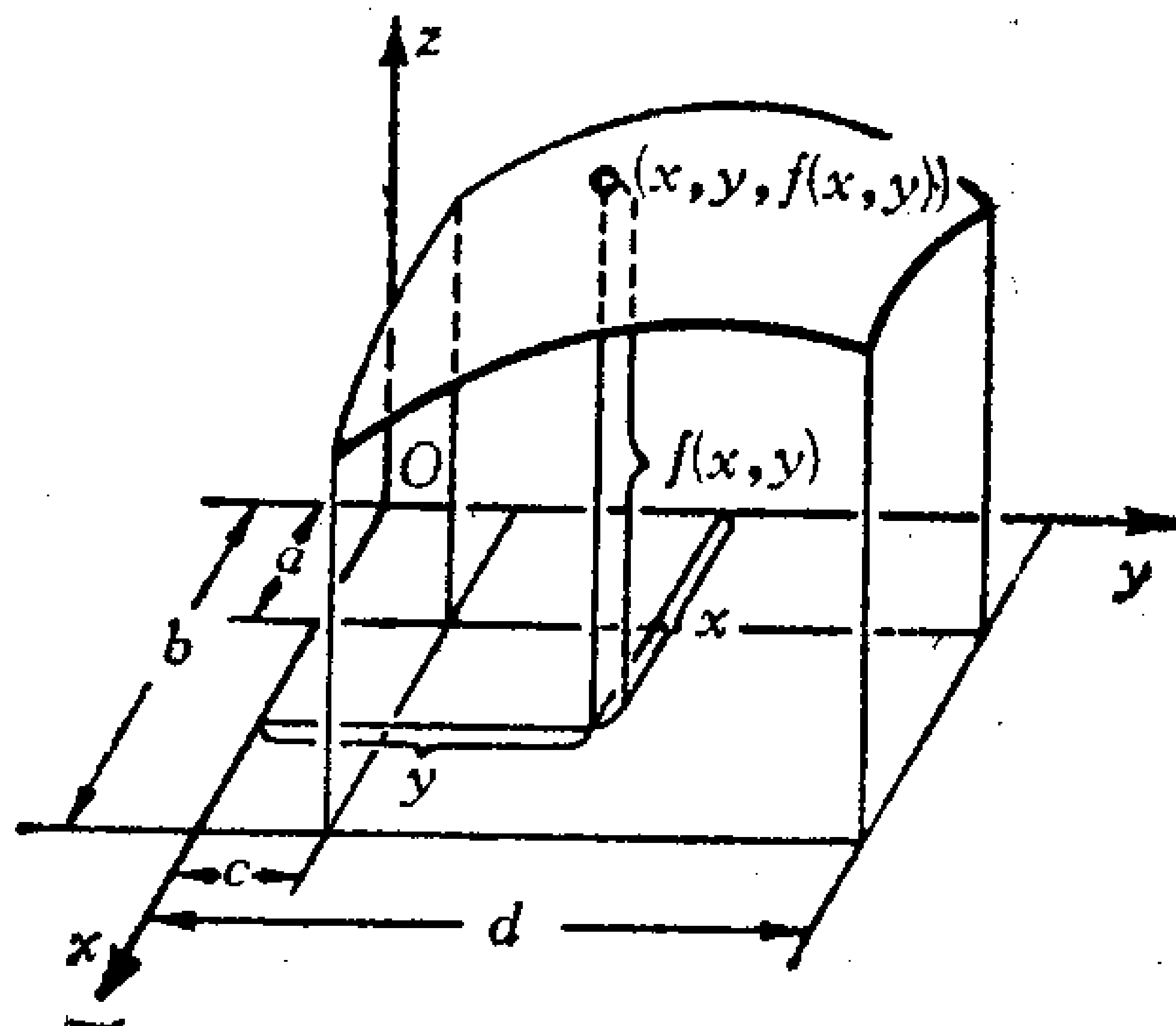


图 2-9

定义 2.2.1 如果一个方程(1)或(1′)与一个曲面 Σ 有着关系：① 满足方程(1)或(1′)的(x, y, z)是曲面 Σ 上的点的坐标；② 曲面 Σ 上的任何一点的坐标(x, y, z)满足方程(1)或(1′)，那么方程(1)或(1′)就叫做曲面 Σ 的方程，而曲面 Σ 叫做方程(1)或(1′)的图形．

曲面的方程有时没有实点满足它，这时方程不表示任何实图形，我们称它为虚曲面，如 $x^2+y^2+z^2+1=0$；有时只有一个实点满足它，例如方程 $x^2+y^2+z^2=0$，只有点$(0, 0, 0)$满足它，因此它

只表示坐标原点；也有时代表一条曲线，例如方程 $x^2+y^2=0$，只有当 $x=0$，$y=0$ 的点 $(0, 0, z)$ 能满足它，因而它表示 z 轴，是一条直线.

下面我们举例说明怎样从曲面(作为点的轨迹)上点的特征性质来导出曲面的方程.

例 1 求连结两点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(2, -1, 4)$ 的线段的垂直平分面的方程.

解 垂直平分面可以看成到两定点 A 和 B 为等距离的动点 $M(x, y, z)$ 的轨迹，因此垂直平分面上的点 M 的特征性质为

$$|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{BM}|,$$

而
$$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2},$$
$$|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

从而得

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

化简得
$$2x-6y+2z-7=0,$$

即为所求的垂直平分面的方程.

例 2 求两坐标面 xOz 和 yOz 所成二面角的平分面方程.

解 因为所求的平分面是与两坐标平面 xOz 和 yOz 有等距离的点的轨迹，因此点 $M(x, y, z)$ 在平分面上的充要条件是

$$|y|=|x|,$$

所以
$$y=\pm x,$$

或写成
$$x\pm y=0;$$

因此所求的平分面的方程是

$$x+y=0 \quad 与 \quad x-y=0.$$

例 3 求坐标平面 yOz 的方程.

解 很明显，这平面是 x 坐标为零的点的轨迹，因此它的方程

是 $x=0$.

同样，坐标平面 xOz 与 xOy 的方程分别是 $y=0$ 与 $z=0$.

例 4 一平面平行于坐标平面 xOz，且在 y 轴的正向一侧与平面 xOz 相隔距离为 k，求它的方程.

解 所求的平面上各点的 y 坐标都等于 k，所以平面方程为 $y=k$.

例 5 设球面的中心是点 $C(a, b, c)$，而且半径等于 r，求它的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上的任意点，那么根据球的定义，球面上的点 M 的特征性质是

$$|\overrightarrow{CM}|=r,$$

而
$$|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

得所求的球面方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (2.2\text{-}1)$$

特别地，以原点为球心的球面方程是

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (2.2\text{-}2)$$

将(2.2-1)展开后得

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0.$$

因此球面方程是一个三元二次方程，它的所有平方项的系数相等，交叉项消失.

反过来，如果三元二次方程

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+L=0,$$

当 $A=B=C\neq0$, $D=E=F=0$ 时，方程可化为

$$x^2+y^2+z^2+2gx+2hy+2kz+l=0 \qquad (2.2\text{-}3)$$

的形式，配方得

$$(x+g)^2+(y+h)^2+(z+k)^2=g^2+h^2+k^2-l.$$

如果 $g^2+h^2+k^2-l>0$，那么(2.2-3)表示实的球面.

如果 $g^2+h^2+k^2-l=0$, 那么(2.2-3)表示空间一点.

如果 $g^2+h^2+k^2-l<0$, 那么(2.2-3)表示无实图形.

习惯上，我们把上面的点叫做点球，无实图形时叫做虚球面，这三种情形统称为球面．因此球面的方程是一个平方项系数相等而交叉项消失的三元二次方程；反过来，任何一个三元二次方程，如果它的二次项系数相等，而且交叉项消失，那么它一定表示一个球面(实球面，点或虚球面).

2．曲面的参数方程

我们知道，平面曲线的参数方程，是以单参数的矢函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

或

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2$$

定义的(§2.1)，空间曲面的参数方程与平面曲线的参数方程非常类似．设在两个变数 u, v 的变动区域内定义了双参数矢函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v) \tag{2.2-4}$$

或

$$\boldsymbol{r}(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{e}_1+y(u, v)\boldsymbol{e}_2+z(u, v)\boldsymbol{e}_3, \tag{2.2-5}$$

这里 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$是变矢 $\boldsymbol{r}(u, v)$的分量，它们都是变数 u, v 的函数．当 u, v 取遍变动区域的一切值时，径矢

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{e}_1+y(u, v)\boldsymbol{e}_2+z(u, v)\boldsymbol{e}_3$$

的终点 $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$所画成的轨迹，一般为一张曲面(图 2-10).

定义 2.2.2 如果取 u, $v(a\leqslant u\leqslant b,\ c\leqslant v\leqslant d)$的一切可能取的值，由(2.2-5)表示的径矢 $\boldsymbol{r}(u, v)$的终点 M 总在一个曲面上；反过来，在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的径矢，而这径矢可由 u, v 的值($a\leqslant u\leqslant b$, $c\leqslant v\leqslant d$)通过(2.2-5)完全决定，那么我们就把表达式(2.2-5)叫做曲面的矢量式参数方程，其中 u, v 为参数.

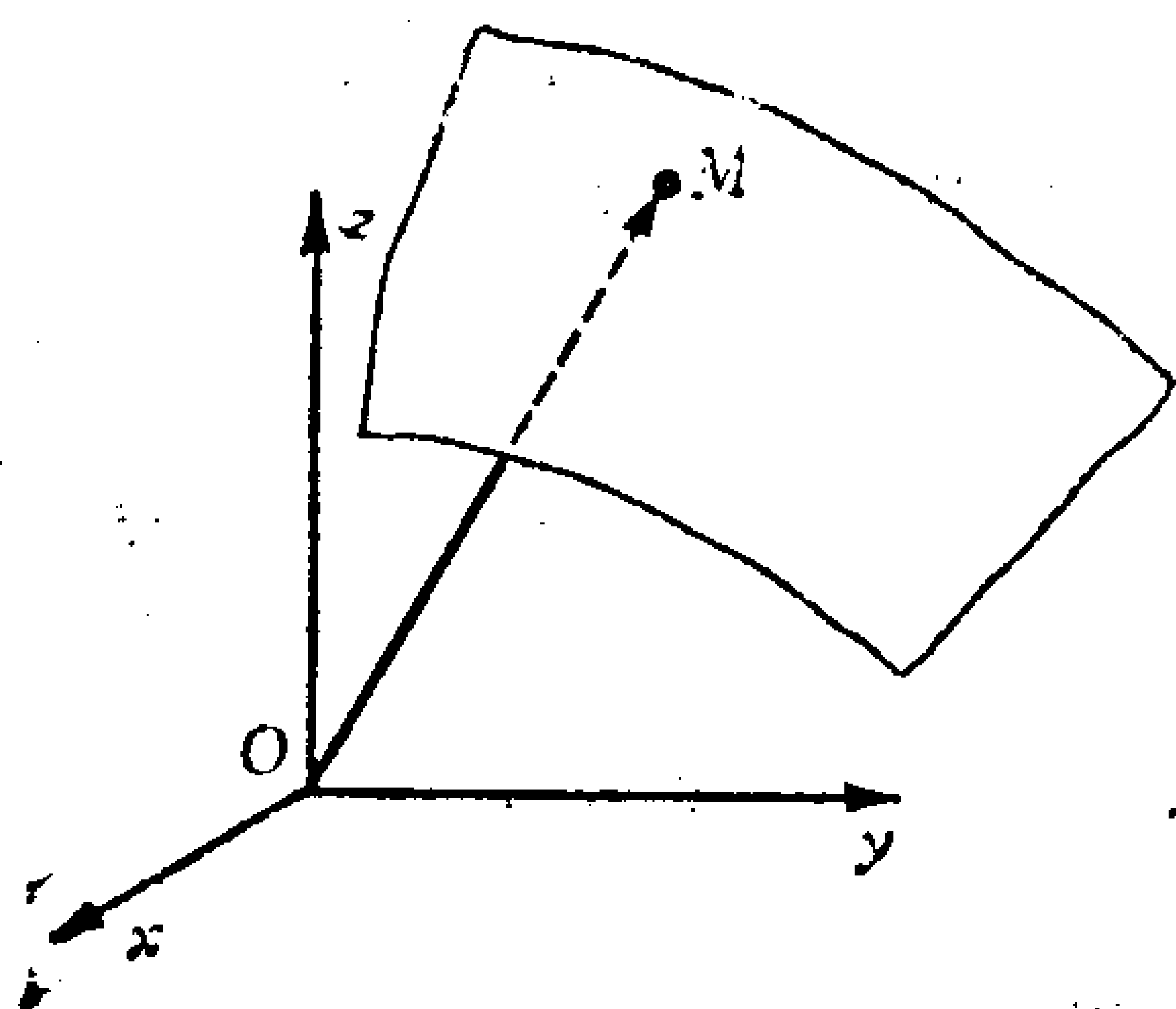


图 2-10

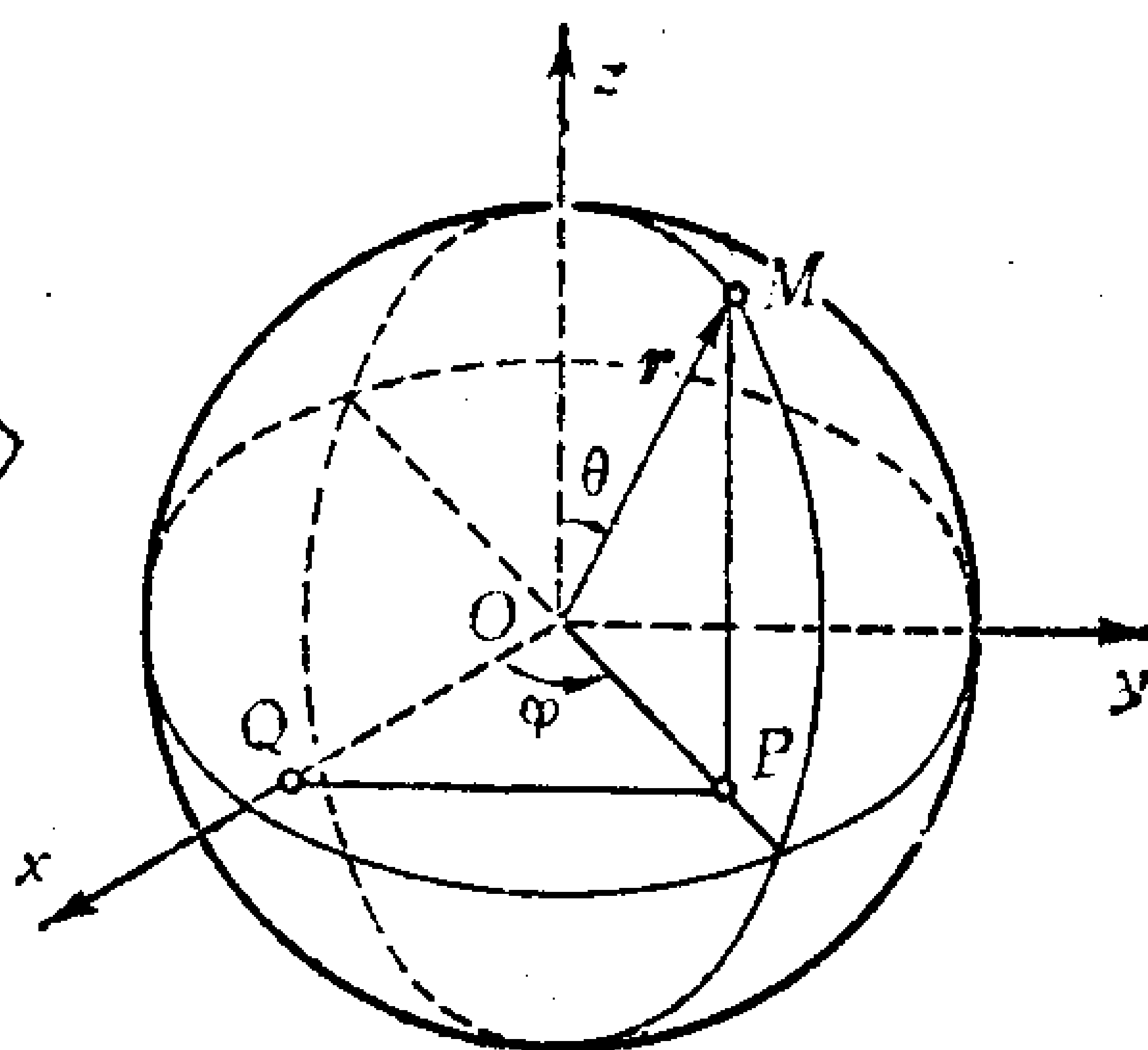


图 2-11

因为径矢 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的分量为 $\{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\}$，所以曲面的参数方程也常写成

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v). \end{cases} \tag{2.2-6}$$

表达式(2.2-6)叫做曲面的坐标式参数方程.

例 6 求中心在原点，半径为 r 的球面的参数方程.

解 设 M 是以坐标原点为中心，r 为半径的球面上的任一点，M 在 xOy 坐标面上的射影为 P，而 P 在 x 轴上的射影为 Q. 又设在坐标面上的有向角 $\measuredangle(\boldsymbol{i},\overrightarrow{OP})=\varphi$，$Oz$ 轴与 $\overrightarrow{OM}$ 的交角 $\angle zOM=\theta$ (图 2-11)，那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM},$$

且

$$\overrightarrow{PM}=(r\cos\theta)\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{QP}=(|\overrightarrow{OP}|\sin\varphi)\boldsymbol{j}=(r\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{OQ}=(|\overrightarrow{OP}|\cos\varphi)\boldsymbol{i}=(r\sin\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=(r\sin\theta\cos\varphi)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta\sin\varphi)\boldsymbol{j}+(r\cos\theta)\boldsymbol{k}. \tag{2.2-7}$$

这就是中心在原点，半径为 r 的球面的矢量式参数方程. 它的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta. \end{cases} \tag{2.2-8}$$

(2.2-7)或(2.2-8)中的 θ 与 φ 为参数，它们的取值范围分别是 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 与 $-\pi\leqslant\varphi<\pi$.

例 7 求以 z 轴为对称轴，半径为 R 的圆柱面的参数方程.

解 设 M 是圆柱面上的任意一点，M 在 xOy 坐标面上的射影为 P(图 2-12). 再设 xOy 面上的有向角 $\varphi=\measuredangle(\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OP})$, P 在 x 轴上的射影为 Q, 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PM},$$

而 $\overrightarrow{OQ}=(R\cos\varphi)\boldsymbol{i}$,

$\overrightarrow{QP}=(R\sin\varphi)\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{PM}=u\boldsymbol{k}$,

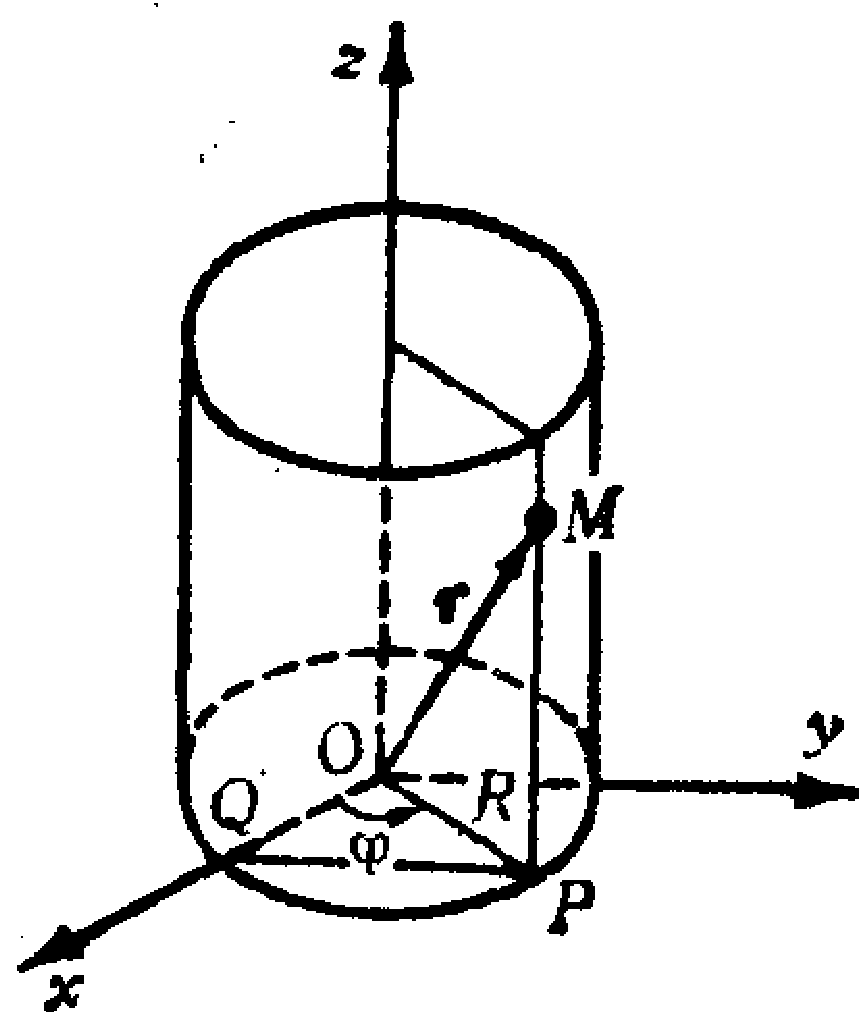


图 2-12

所以

$$\boldsymbol{r}=(R\cos\varphi)\boldsymbol{i}+(R\sin\varphi)\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}. \tag{2.2-9}$$

这就是圆柱面的矢量式参数方程，它的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\varphi, \\ y=R\sin\varphi, \\ z=u. \end{cases} \tag{2.2-10}$$

(2.2-9)或(2.2-10)中的 φ 与 u 为参数，它们的取值范围分别是 $-\pi\leqslant\varphi<\pi$, $-\infty<u<+\infty$.

空间曲面的参数方程与平面上的曲线的参数方程一样，它的表达形式也不是唯一的. 比如例 1 中，如果把参数 θ 改为由 $\overrightarrow{OP}$ 到 $\overrightarrow{OM}$ 的有向角，那么球面的参数方程为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi, \\ y=r\cos\theta\sin\varphi, \\ z=r\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2} \\ -\pi\leqslant\varphi<\pi \end{pmatrix}. \tag{2.2-11}$$

习　题

1. 一动点移动时，与 $A(4,0,0)$ 及 xOy 平面等距离，求该动点的轨迹方程.

2. 在空间，选取适当的坐标系，求下列点的轨迹方程：

(1) 到两定点距离之比等于常数的点的轨迹；

(2) 到两定点距离之和等于常数的点的轨迹；

(3) 到两定点距离之差等于常数的点的轨迹；

(4) 到一定点和一定平面距离之比等于常数的点的轨迹.

3. 求下列各球面的方程：

(1) 中心 $(2, -1, 3)$ 半径为 $R=6$；

(2) 中心在原点，且经过点 $(6, -2, 3)$；

(3) 一条直径的两个端点是 $(2, -3, 5)$ 与 $(4, 1, -3)$；

(4) 通过原点与 $(4, 0, 0)$，$(1, 3, 0)$，$(0, 0, -4)$.

4. 求下列球面的中心与半径：

(1) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$；

(2) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$；

(3) $36x^2+36y^2+36z^2-36x+24y-72z-95=0$.

5. 试求中心在 $C(a, b, c)$，半径为 r 的球面的参数方程.

§2.3　母线平行于坐标轴的柱面方程

假设动点 $P(x, y, z)$ 的坐标间的关系是不含变数 z 的方程

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

在 xOy 平面上，这方程表示一条曲线 L，这曲线 L 上的点的坐标满足这方程. 假定 L 上的一点 Q 对于 xOy 平面上的平面坐标系的坐标是 $Q(x_1, y_1)$，那么点 Q 在空间坐标系里的坐标是 $(x_1, y_1, 0)$，显然 $(x_1, y_1, 0)$ 满足(1)，因此 Q 点在曲面(1)上，从而曲线 L 上的各点均在(1)所表示的曲面上. 不仅如此，自 Q 作 Oz 轴的平行线 QR，并于其上任意取一点 P_1（图 2-13）. 假定 $QP_1=k$，那么点 P_1 的坐标是 (x_1, y_1, k)，容易知道 (x_1, y_1, k) 满足(1)，因此 P_1 也在曲

面(1)上，从而整个直线在曲面(1)上；反过来，如果 $P'_1(x'_1, y'_1, z)$ 在曲面(1)上，那么有

$$F(x'_1, y'_1)=0,$$

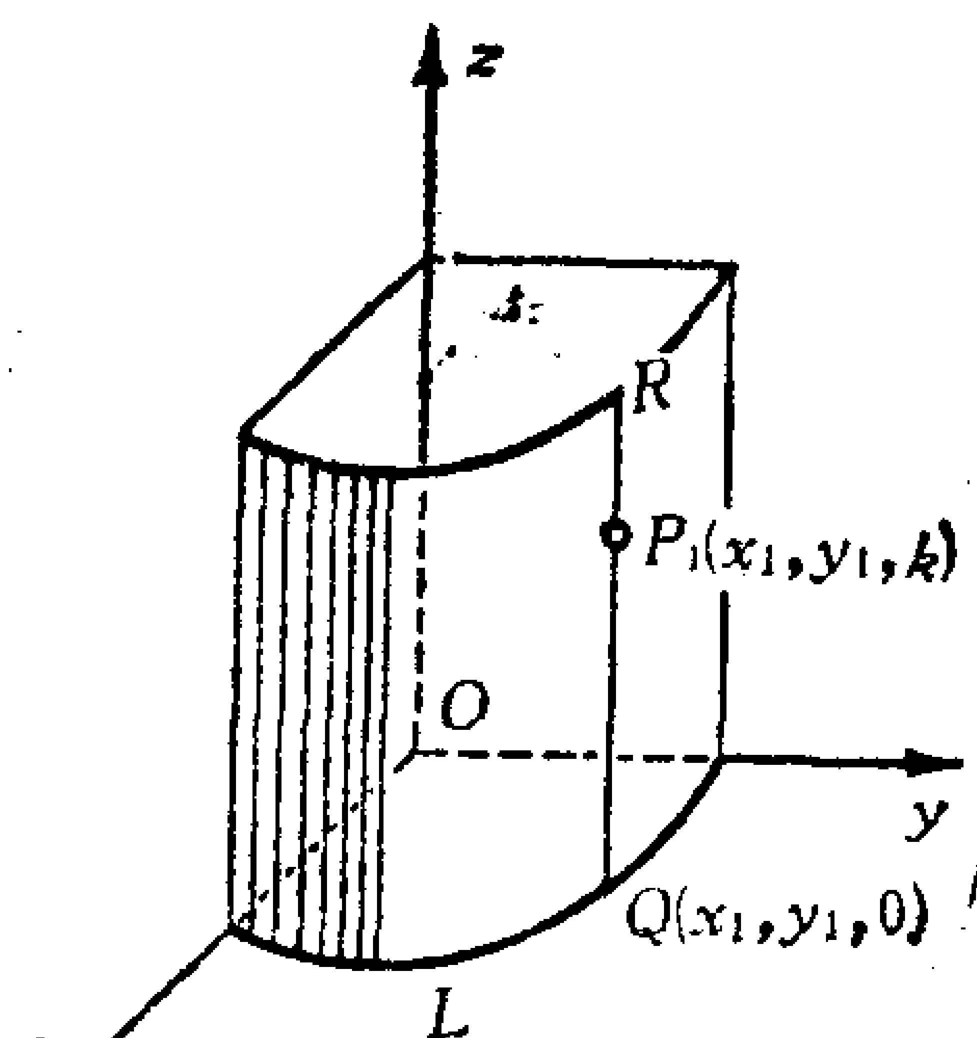


图 2-13

所以 P'_1 在平行于 z 轴且过曲线 L 上的点 $(x'_1, y'_1, 0)$ 的直线上. 所以曲面(1)是由平行于 z 轴的直线沿曲线 L 移动而成，这样的曲面叫做**柱面**，曲线 L 叫做它的**准线**，形成柱面的动直线叫做它的**母线**. 因此方程 $F(x, y)=0$ 决定一个母线平行于 z 轴的柱面.

同理，$F(y, z)=0$ 与 $F(x, z)=0$ 都表示柱面，它们的母线分别平行于 x 轴与 y 轴.

例如方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.3-1}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2.3-2}$$

$$y^2=2px; \tag{2.3-3}$$

分别表示一个柱面，母线都平行于 z 轴，它们在 xOy 平面上的准线分别是椭圆、双曲线和抛物线，所以分别叫做**椭圆柱面**(图 2-14)，**双曲柱面**(图 2-15)与**抛物柱面**(图 2-16). 它们的方程都

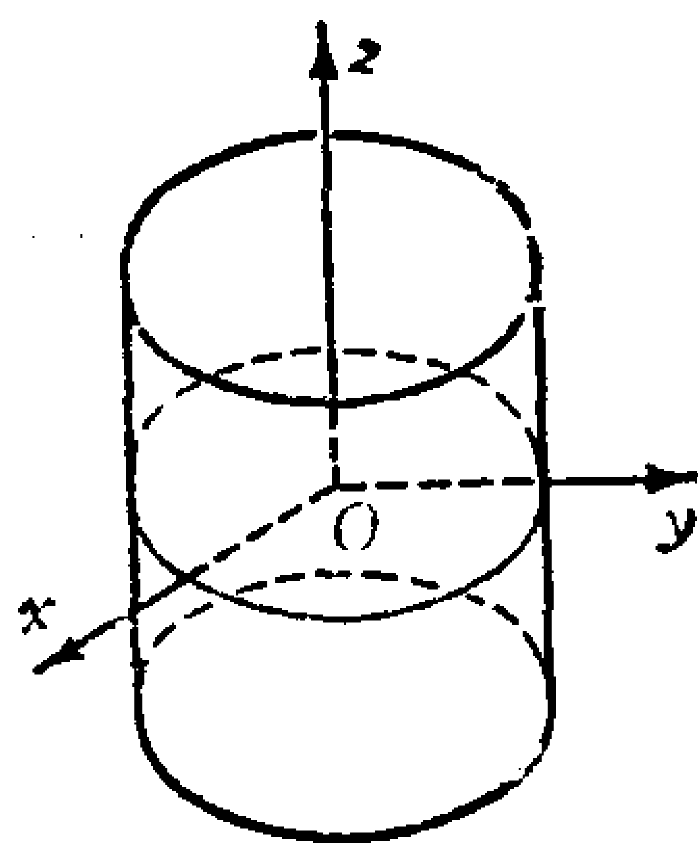


图 2-14

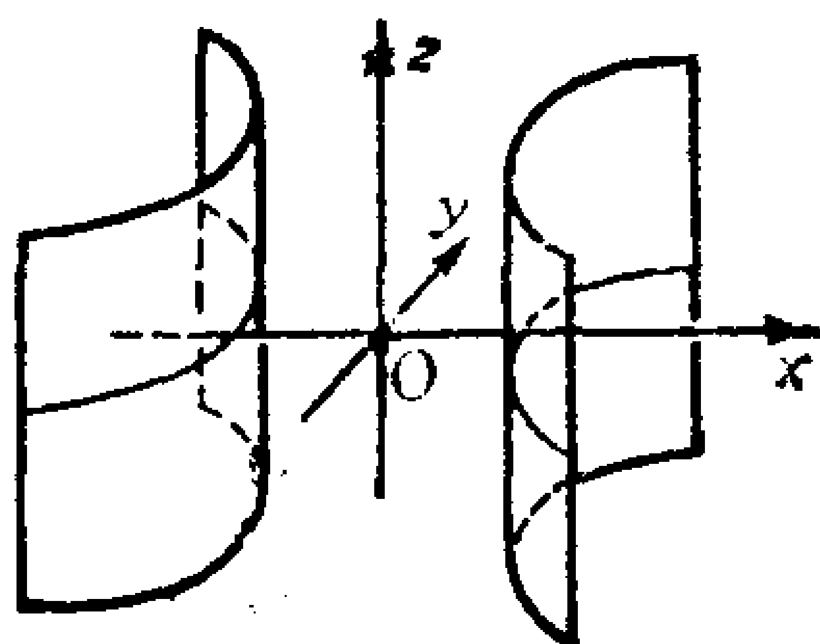


图 2-15

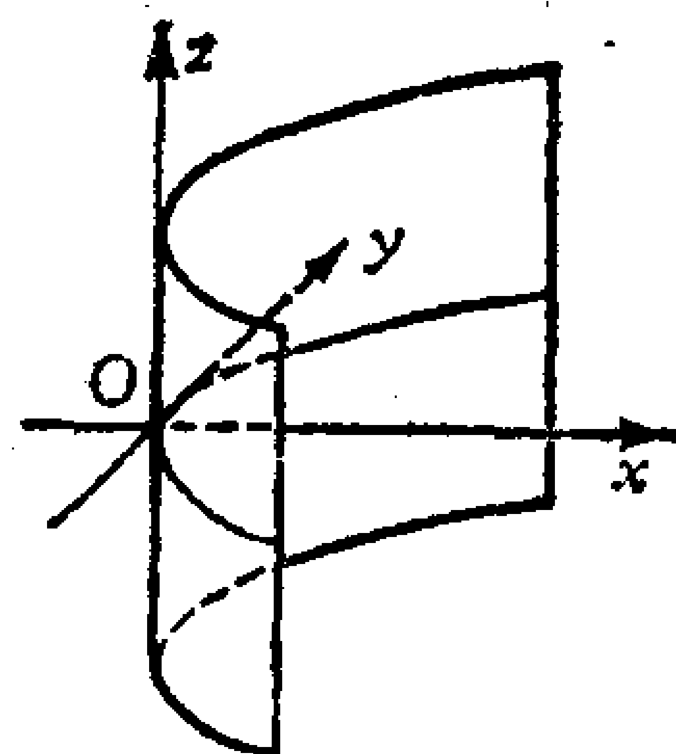


图 2-16

是二次的，所以都叫做二次柱面。

习　题

画出下列方程所表示的曲面的图形

(1) $4x^2+9y^2=36$;　　(2) $y^2-z^2=4$;

(3) $x^2=4z$;　　(4) $x^2-2x+y=0$。

§2.4　空间曲线的方程

空间曲线，可以看成两个曲面的交线。

设
$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0 \end{cases} \tag{2.4-1}$$

是这样的两个曲面方程，它们相交于曲线 L. 这样，曲线 L 上的任意点，同时在两曲面上，它的坐标就满足方程组(2.4-1)；反过来满足方程组(2.4-1)的任何一组解所决定的点，同时在两曲面上，即在两曲面的交线上，因此方程组(2.4-1)表示一条空间曲线 L 的方程，我们把它叫做空间曲线的一般方程。

从代数上知道，任何方程组的解，也一定是与它等价的方程组的解，这说明空间曲线 L 可以用不同形式的方程组来表达。

例 1　写出 Oz 轴的方程.

解　Oz 轴可以看成是两坐标平面 yOz 与 xOz 的交线，所以 Oz 轴的方程可以写成

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases} \tag{1}$$

由于方程组(1)与方程组

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \tag{2}$$

同解，所以 Oz 轴的方程也可用(2)来表示。

例 2 求在 xOy 坐标面上,半径等于 R,圆心为原点的圆的方程.

解 因为空间的圆总可以看成是球面与平面的交线,在这里可以把所求的圆看成是以原点 O 为球心,半径为 R 的球面与坐标平面 xOy 的交线,所以所求的圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=0. \end{cases} \tag{3}$$

因为方程(3)与方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases} \tag{4}$$

同解,所以所求圆的方程也可以用(4)来表达. 这就是说所求圆也可以看成是以 z 轴为对称轴,半径为 R,母线平行于 z 轴的圆柱面与坐标平面 xOy 的交线.

因为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 都通过所求的圆,所以所求圆的方程也可以用方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

来表达.

空间曲线也象平面曲线那样,可用它的参数方程来表达,这是另一种表示空间曲线的常用方法,特别是把空间曲线看做质点的运动轨迹时,一般常采用参数表示法.

空间曲线的参数方程与平面曲线的参数方程(§2.1)完全类同. 在空间建立了坐标系后,设矢函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \tag{2.4-2}$$

或

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3, \tag{2.4-3}$$

当 t 在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 内变动时, $\boldsymbol{r}(t)$的终点 $M(x(t),\ y(t),\ z(t))$

全部都在空间曲线 L 上；反过来，空间曲线 L 上的任意点的径矢都可由 t 的某个值通过(2.4-2)或(2.4-3)来表示，那么(2.4-2)或(2.4-3)就叫做空间曲线 L 的矢量式参数方程，其中 $t(a\leqslant t\leqslant b)$ 为参数.

因为空间曲线上点的径矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 的分量为 $\{x(t), y(t), z(t)\}$，所以空间曲线的参数方程常写成

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b) \tag{2.4-4}$$

表达式(2.4-4)叫做空间曲线的坐标式参数方程，其中 t 为参数.

例3 一个质点一方面绕一条轴线作等角速度的圆周运动，另一方面作平行于轴线的直线运动，其速度与角速度成正比，求这个质点运动的轨迹方程.

解 在空间取标架 $\{O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$，使 Oz 轴重合于轴线，并设质点运动的起点为 $A(a, 0, 0)$，质点作圆周运动的角速度为 ω，那么在 t 秒后质点从起点 A 运动到 P 的位置(图 2-17)，P 在 xOy 坐标面上的射影为 Q，那么

$$\angle(\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ})=\omega t, \ \overrightarrow{QP}=b\omega t\boldsymbol{k}$$

$\left(\text{这里假设直线运动 } v \text{ 与角速度 } \omega \text{ 之比为 } b, \text{ 即 } \frac{v}{\omega}=b\right)$，因此有

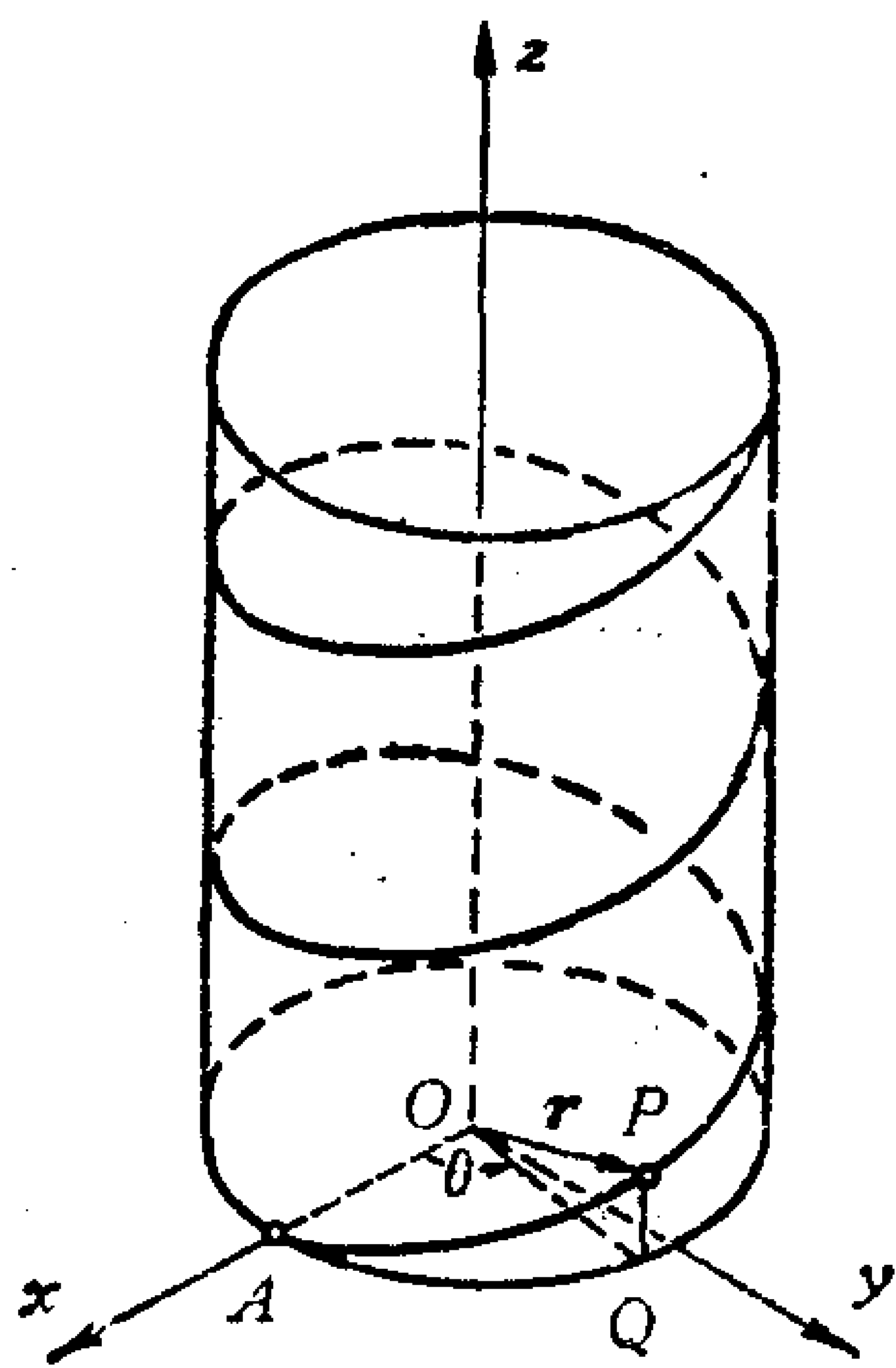


图 2-17

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP},$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos\omega t+\boldsymbol{j}a\sin\omega t+\boldsymbol{k}b\omega t, \quad (-\infty<t<+\infty). \tag{2.4-5}$$

这就是质点运动轨迹的矢量式参数方程，其中 t 为参数，它的坐标式参数方程为：

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t, \\ z=b\omega t. \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty) \qquad (2.4\text{-}6)$$

设 $\omega t=\theta$，那么(2.4-5)，(2.4-6)分别写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}a\cos\theta+\boldsymbol{j}a\sin\theta+\boldsymbol{k}b\theta, \ (-\infty<\theta<+\infty) \qquad (2.4\text{-}5')$$

与

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta, \end{cases} \quad (-\infty<\theta<+\infty) \qquad (2.4\text{-}6')$$

其中 θ 为参数，这条曲线叫做圆柱螺旋线。

从(2.4-6′)消去参数 θ，可以得到圆柱螺旋线方程的一般式为

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ y=a\sin\dfrac{z}{b}, \end{cases} \qquad (2.4\text{-}7)$$

比较(2.4-6′)与(2.4-7)，我们可以看出参数方程(2.4-6′)不仅表示出明确的质点运动的意义，而且从它也比较容易想象出轨迹的图形．因此在有些问题中，空间曲线的参数方程将显示出它的优越性．

例 4 已知一半径为 a 的球面与一个直径等于球的半径的圆柱面，如果圆柱面通过球心，那么这时球面与圆柱面的交线叫做维维安尼(Viviani)曲线，试建立维维安尼曲线的一般方程与参数方程．

解 如图 2-18，取球心为坐标原点，通过球心的圆柱面的一条母线为 z 轴，过球心的圆柱面的直径为 x 轴建立右手直角坐标系，那么球面与圆柱面的方程分别为

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad 与 \quad x^2+y^2-ax=0,$$

因此维维安尼曲线的一般方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2-ax=0. \end{cases} \tag{5}$$

为了要求得维维安尼曲线的参数方程，我们也可以象把平面曲线的普通方程化为参数方程那样由(5)而得到．先把(5)式中的圆柱面方程

$$x^2+y^2-ax=0,$$

利用平面上圆的参数方程改写为

$$\begin{cases} x=a\cos^2\theta, \\ y=a\cos\theta\sin\theta, \end{cases} \quad (0\leqslant\theta<\pi)$$

代入球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 得

$$z=\pm a\sin\theta.$$

因此我们有

$$\begin{cases} x=a\cos^2\theta, \\ y=a\cos\theta\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<\pi) \\ z=a\sin\theta, \end{cases} \tag{6}$$

与

$$\begin{cases} x=a\cos^2\theta, \\ y=a\cos\theta\cdot\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<\pi). \\ z=-a\sin\theta, \end{cases} \tag{7}$$

但如果令 $t=\theta+\pi$，即 $\theta=t-\pi$，代入(7)，那么(7)就变成(6)的形式

$$\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\cos t\cdot\sin t, \quad (\pi\leqslant t<2\pi). \\ z=a\sin t, \end{cases}$$

所以维维安尼曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^2\theta, \\ y=a\cos\theta\cdot\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<2\pi). \\ z=a\sin\theta, \end{cases}$$

它的图形如图 2-18 所示.

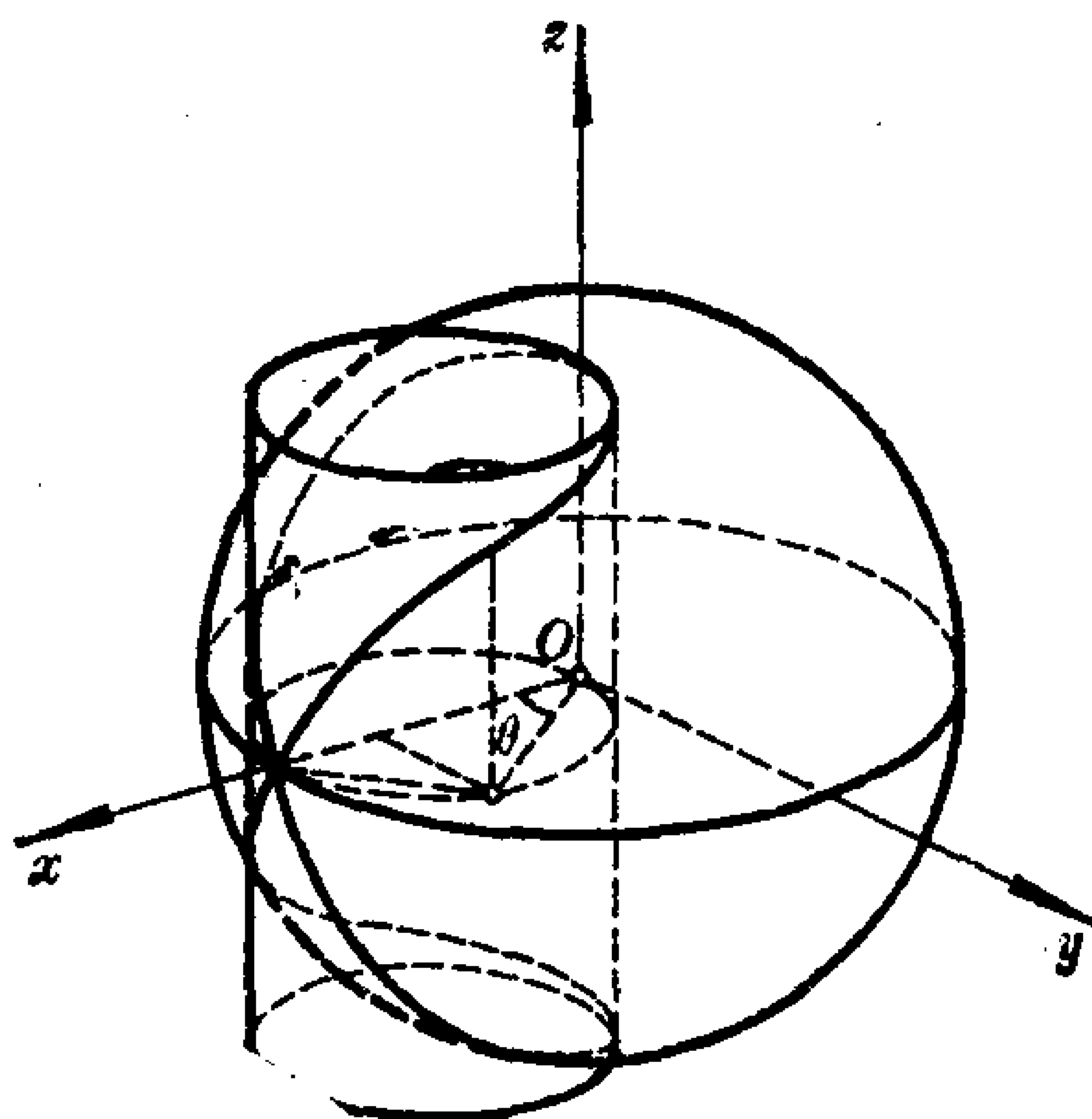


图 2-18

通过空间曲线 L 作柱面，使其母线平行于坐标轴 Ox, Oy 或 Oz 轴，设这样的柱面方程分别为

$$\begin{aligned} &F_1(y, z)=0, \\ &F_2(x, z)=0, \\ &F_3(x, y)=0. \end{aligned} \qquad (2.4\text{-}8)$$

这三个柱面分别叫做曲线 L 对 yOz、xOz 与 xOy 坐标面的射影柱面，因此(2.4-1)所表示的曲线 L，可以用它的对三个坐标面的任意两个射影柱面来表示．要求出(2.4-8)，可以从(2.4-1)分别消去一个元而得到，因此在代数上从两个三元方程消去一个元，这样的几何意义就是求空间曲线 L 的射影柱面，例如从

$$\begin{cases} 2x^2+z^2+4y=4z; \\ x^2+3z^2-8y=12z; \end{cases}$$

分别消去 y 及 z，得

$$\begin{cases} x^2+z^2=4z, \\ x^2+4y=0, \end{cases}$$

前一个射影柱面是一个准线在 xOz 坐标面上的圆

$$x^2+(z-2)^2=4,$$

母线平行于 y 轴的圆柱面，而

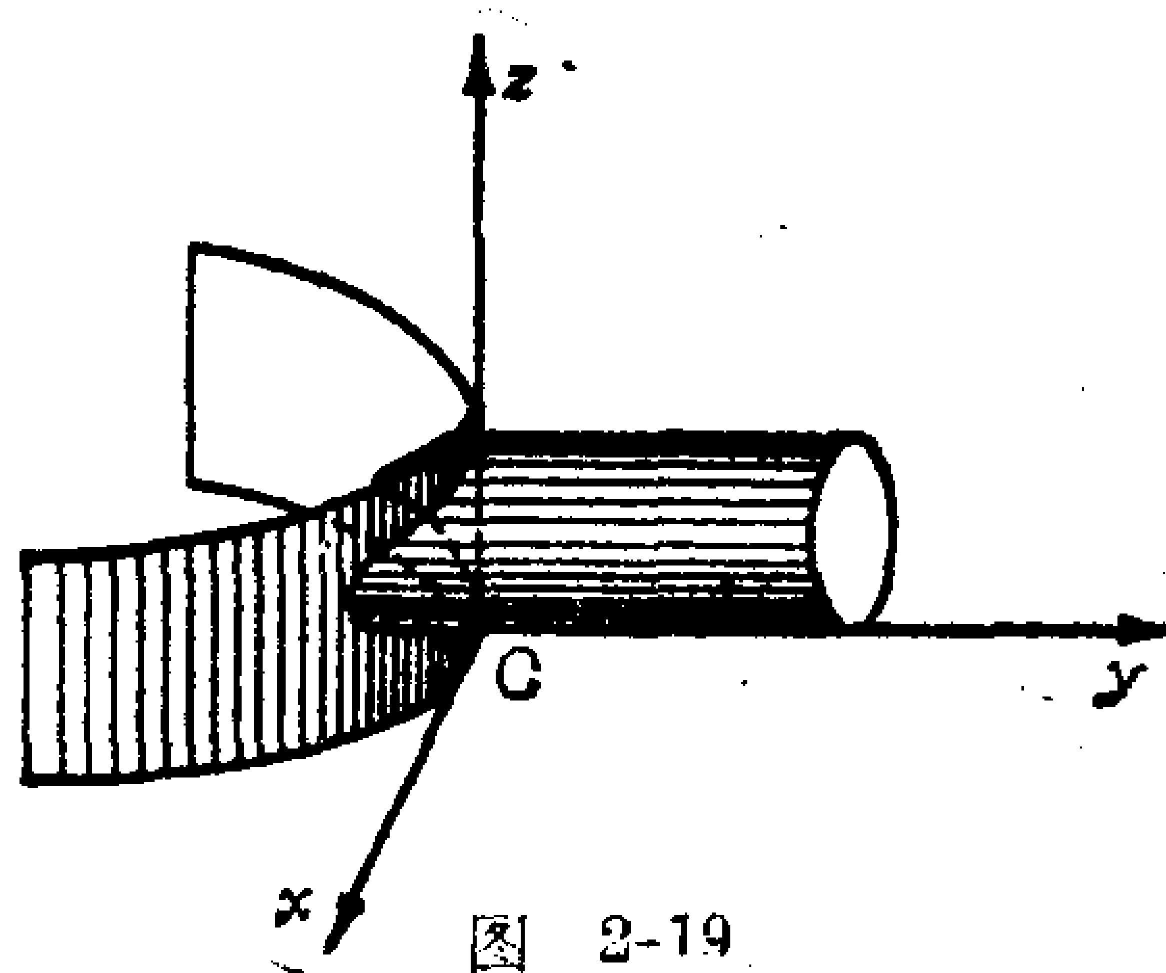


图 2-19

后一个射影柱面是一个准线在 xOy 坐标面上的抛物线 $x^2=-4y$，母线平行于 z 轴的抛物柱面，因此曲线可以看成是这两个柱面的交线，它的形状如图 2-19. 从这里我们可以看到，利用空间曲线的射影柱面来表达空间曲线，对我们认识空间曲线的形状是有利的。

习　　题

1. 平面 $x=0$ 与 $x^2+y^2-2x=0$ 的公共点组成怎样的轨迹？

2. 指出下列曲面与三个坐标面的交线分别是什么曲线？

(1) $x^2+y^2+16z^2=64$;　　(2) $x^2+4y^2-16z^2=64$;

(3) $x^2-4y^2-16z^2=64$;　　(4) $x^2+9y^2=10z$;

(5) $x^2-9y^2=10z$;　　(6) $x^2+4y^2-16z^2=0$.

3. 求下列空间曲线对三个坐标面的射影柱面方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ z=x+1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+z^2-3yz-2x+3z-3=0, \\ y-z+1=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+6z=5, \\ 3x-2y-10z=7; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1. \end{cases}$

4. 试求出下列曲线与曲面的交点：

(1) $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}t\cos\pi t+\boldsymbol{j}t\sin\pi t+t\boldsymbol{k}$ 与 $x^2+y^2=4$;

(2) $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}\cos\pi t+\boldsymbol{j}\sin\pi t+t\boldsymbol{k}$ 与 $x^2+y^2+z^2=10$.

5. 要证明空间曲线 $x=f(t), y=\varphi(t), z=\psi(t)$ 完全在曲面 $F(x, y, z)=0$ 上，我们可用什么办法？试用这个法则证明 $x=t,\ y=2t,\ z=2t^2$ 所表示的曲线完全在曲面 $2(x^2+y^2)=5z$ 上。

6. 把下列曲线的参数方程化为一般方程：

(1) $\begin{cases} x=6t+1, \\ y=(t+1)^2, \\ z=2t, \end{cases}\quad (-\infty<t<+\infty)$;

(2) $\begin{cases} x=3\sin t, \\ y=5\sin t, \\ z=4\cos t, \end{cases}\quad (0\leqslant t<2\pi)$.

7. 求空间曲线

$$\begin{cases} y^2-4z=0, \\ x+z^2=0, \end{cases}$$

的参数方程.

8. 有一质点，沿着已知圆锥面的一条直母线自圆锥的顶点起，作等速直线运动，另一方面这一条母线在圆锥面上，过圆锥的顶点绕圆锥的轴（旋转轴）作等速的转动，这时质点在圆锥面上的轨迹叫做圆锥螺线，试建立圆锥螺线的方程.

9. 有两条互相直交的直线 l_1 与 l_2，其中 l_1 绕 l_2 作螺旋运动，即 l_1 一方面绕 l_2 作等速转动，另一方面又沿着 l_2 作等速直线运动，在运动中 l_1 永远保持与 l_2 直交，这样由 l_1 所画出的曲面叫做螺旋面，试建立螺旋面的方程.

结 束 语

在上一章已经建立起来的空间的点与径矢的对应和空间的点与有序实数组的对应的基础上，这一章进一步建立了轨迹与其方程的对应. 空间轨迹要比平面轨迹复杂得多，但它的方程的建立，以及某些问题的处理，两者却是非常相似的，我们只要对平面轨迹（平面曲线）的问题搞清楚了，空间轨迹（曲面与空间曲线）的问题也就不难了. 因此，在这一章里，我们先介绍平面曲线的方程，然后迅速地过渡到曲面与空间曲线方程的研究，这样不仅使我们对平面轨迹的问题作了复习与提高，而且使得一些看来较为复杂的空间轨迹问题也就迎刃而解了.

在介绍了空间轨迹方程之后，对缺某一坐标的方程代表何种轨迹，必须首先明确它是在什么范围内讨论，例如方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

在平面上，它表示椭圆，是一条平面曲线的方程，但是在空间，它却表示一个母线平行于 z 轴的椭圆柱面.

对于空间曲线的一般方程的定义，要充分理解它的意义，这里特别强调用两个通过曲线 L 的曲面方程

$$F_1(x, y, z)=0$$

与

$$F_2(x, y, z)=0$$

来表示，这两个曲面除去曲线 L 上的点是它们的公共点之外，再也没有别的公共点；反过来，联立任意给定的两个曲面方程，它们可能不表示任何空间曲线。例如给定两球面方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=2$，方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=2, \end{cases}$$

不表示任何空间曲线，因为这是两个同心球，没有任何的公共点。

通过轨迹方程的建立，就把几何问题归结为代数问题，从而可用代数的方法来解决几何问题，例如求三曲面的公共点的问题就归结为求三曲面方程的公共解，也就是解三元联立方程的问题，例如方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0, \\ F_3(x, y, z)=0, \end{cases}$$

如果有实数解，那么三曲面 $F_1(x, y, z)=0$，$F_2(x, y, z)=0$ 与 $F_3(x, y, z)=0$ 有公共点，它的解就是公共点的坐标；如果方程组无解，那么就意味着三曲面就没有公共点。

一个曲面方程 $F(x, y, z)=0$ 的左端，如果能分解因式，比如 $F(x, y, z)=f(x, y, z)\cdot\varphi(x, y, z)$，那么方程 $F(x, y, z)=0$ 所表示的曲面是两个曲面，它们的方程分别为 $f(x, y, z)=0$ 与 $\varphi(x, y, z)=0$。在这里不可把它写成方程组的形式，因为方程组

$$\begin{cases} f(x, y, z)=0 \\ \varphi(x, y, z)=0 \end{cases}$$

表示两曲面的交线(如果存在的话). 例如方程 $xy=0$ 表示两个坐标面 $x=0$ 与 $y=0$, 而方程组

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$$

却表示两个坐标面 yOz 与 xOz 的交线, 即 z 轴了.

第三章　平面与空间直线

§3.1　平面的方程

1. 由平面上一点与平面的方位矢量决定的平面方程

在空间给定了一点 M_0 与两个不共线的矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，那么通过点 M_0 且与矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 平行的平面 π 就唯一地被确定，矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 叫做平面 π 的方位矢量，显然任何一对与平面 π 平行的不共线矢量都可以作为平面 π 的方位矢量.

在空间，取标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，并设点 M_0 的径矢 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$，平面 π 上的任意一点 M 的径矢为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$（图 3-1），显然点 M 在平面 π 上的充要条件为矢量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共面，因为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以这个共面的条件可以写成：

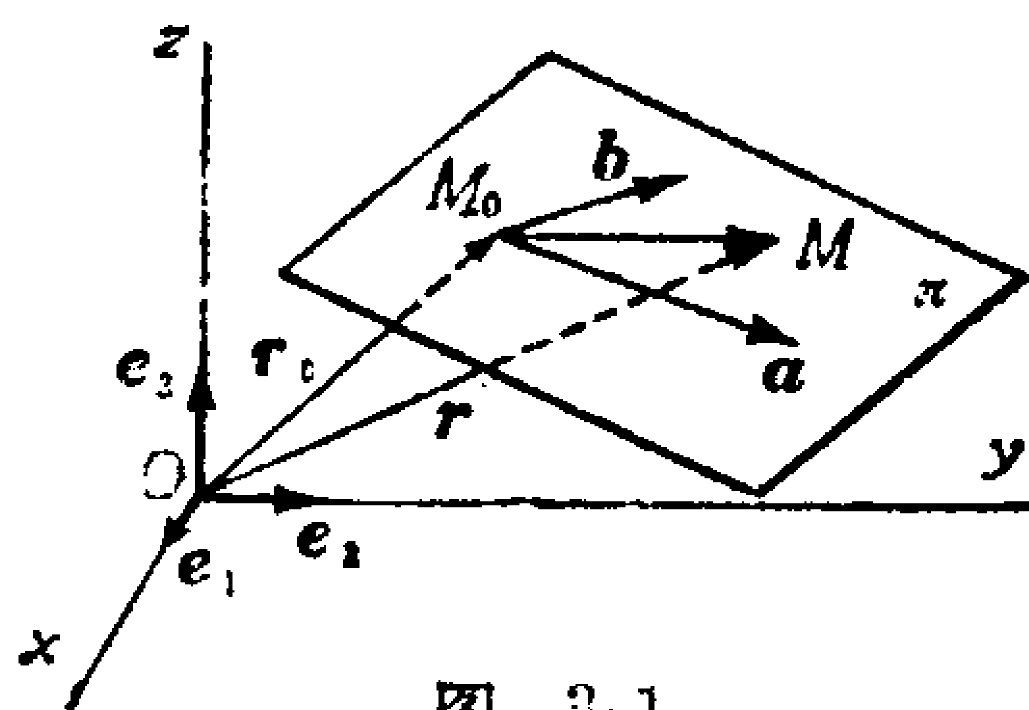


图 3-1

$$\overrightarrow{M_0M}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b},$$

又因为 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$，所以上式可改写为：

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$$

即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}, \tag{3.1-1}$$

方程(3.1-1)叫做平面 π 的矢量式参数方程，其中 u, v 为参数.

如果设点 M_0, M 的坐标分别为(x_0, y_0, z_0)，(x, y, z)那么

$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\},\quad \boldsymbol{r}=\{x, y, z\};$$

并设　　$\boldsymbol{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\},$

那么由(3.1-1)得

$$\begin{cases} x=x_0+X_1u+X_2v, \\ y=y_0+Y_1u+Y_2v, \\ z=z_0+Z_1u+Z_2v. \end{cases} \tag{3.1-2}$$

(3.1-2)叫做平面 π 的坐标式参数方程，其中 u, v 为参数.

从(3.1-1)或 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$ 两边与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 作数性积，消去参数 u, v 得

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0, \tag{3.1-3}$$

从(3.1-2)消去参数 u, v 得

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0, \tag{3.1-4}$$

(3.1-1), (3.1-2), (3.1-3), (3.1-4)都叫做平面的点位式方程.

例 1 已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$，求通过 M_1, M_2, M_3 三点的平面 π 的方程.

解 取平面 π 的方位矢量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}$，并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 π 上的任意一点(图 3-2)，那么

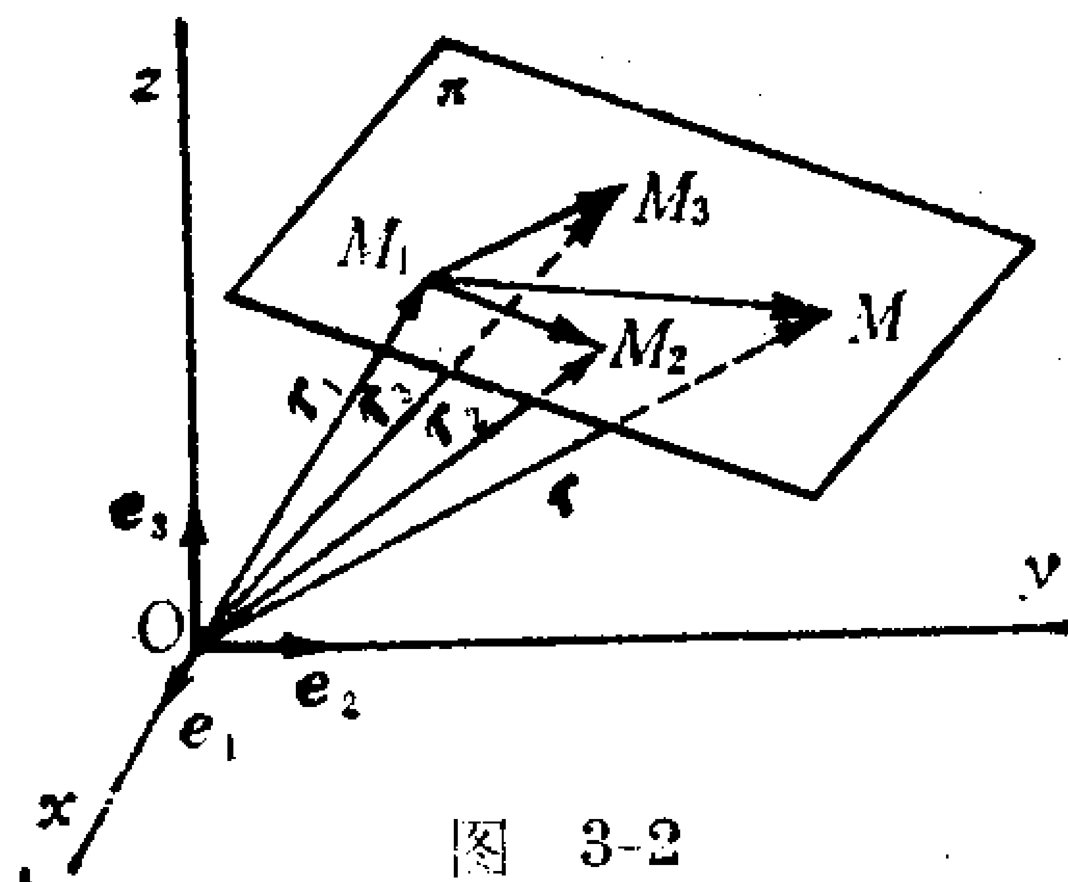


图 3-2

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i, y_i, z_i\},$$

$$(i=1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

$$=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},$$

$$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1=\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\},$$

因此平面 π 的矢量式参数方程为:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+v(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1); \tag{3.1-5}$$

坐标式参数方程为:

$$
\begin{cases}
x=x_1+u(x_2-x_1)+v(x_3-x_1), \\
y=y_1+u(y_2-y_1)+v(y_3-y_1), \\
z=z_1+u(z_2-z_1)+v(z_3-z_1);
\end{cases}
\tag{3.1-6}
$$

从(3.1-5)与(3.1-6)分别消去参数 u, v 得

$$
(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0; \tag{3.1-7}
$$

与

$$
\begin{vmatrix}
x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\
x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\
x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1
\end{vmatrix}=0; \tag{3.1-8}
$$

(3.1-8)又可改写为

$$
\begin{vmatrix}
x & y & z & 1 \\
x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\
x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\
x_3 & y_3 & z_3 & 1
\end{vmatrix}=0. \tag{3.1-8'}
$$

方程(3.1-5)—(3.1-8′)都叫做平面的三点式方程.

作为三点式的特例，如果已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$（其中 $abc\neq0$）（图 3-3），那么由(3.1-8)得

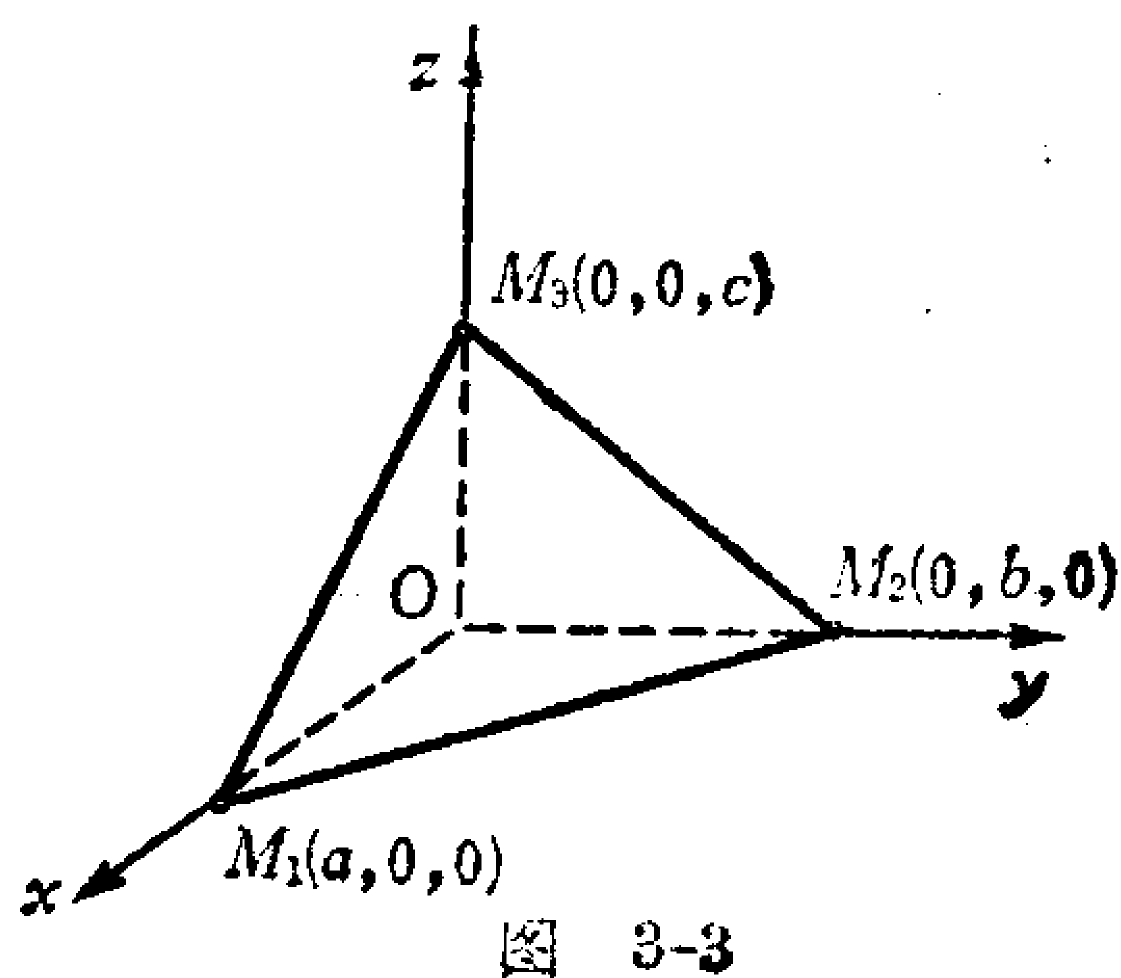


图 3-3

$$
\begin{vmatrix}
x-a & y & z \\
-a & b & 0 \\
-a & 0 & c
\end{vmatrix}=0,
$$

把它展开可写成

$$
bcx+acy+abz=abc,
$$

由于 $abc\neq0$, 上式可改写为

$$
\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{3.1-9}
$$

(3.1-9)叫做平面的截距式方程，其中 a, b, c 分别叫做平面在三坐标轴上的截距.

2. 平面的一般方程

因为空间任一平面都可以用它上面的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方位矢量 $\boldsymbol{a}=\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{X_2, Y_2, Z_2\}$ 确定. 因而任一平面都可以用方程(3.1-4)表示，把(3.1-4)展开就可写成:

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{3.1-10}$$

其中 $A=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 A, B, C 不全为零，这表明空间任一平面都可以用关于 x, y, z 的三元一次方程来表示.

反过来，也可证明，任一关于变元 x, y, z 的一次方程(3.1-10)都表示一个平面. 事实上，因为 A, B, C 不全为零，不失一般性，可设 $A\neq 0$，那么(3.1-10)可改写成

$$A^2\left(x+\frac{D}{A}\right)+ABy+ACz=0,$$

即
$$\begin{vmatrix} x+\frac{D}{A} & y & z \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix}=0,$$

显然，它表示由点 $M_0\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ 和两个不共线矢量 $\{B, -A, 0\}$ 和 $\{C, 0, -A\}$ 所决定的平面，因此我们证明了关于空间中平面的基本定理:

定理 3.1.1 空间中任一平面的方程都可表示成一个关于变数 x, y, z 的一次方程；反过来，每一个关于变数 x, y, z 的一次方程都表示一个平面.

方程(3.1-10)叫做平面的一般方程.

现在来讨论(3.1-10)的几种特殊情况，也就是当(3.1-10)中的某些系数或常数项等于零时，平面对坐标系来说具有某种特殊位置的情况.

1° $D=0$, (3.1-10)变为 $Ax+By+Cz=0$, 此时原点(0, 0, 0)满足方程，因此平面通过原点；反过来，如果平面(3.1-10)通过原点，那么显然有 $D=0$.

2° A, B, C 中有一为零，例如 $C=0$, (3.1-10)就变为

$$Ax+By+D=0,$$

当 $D\neq 0$ 时，z 轴上的任意点$(0, 0, z)$都不满足方程，所以平面与 z 轴平行；而当 $D=0$ 时，z 轴上的每一点都满足方程，这时 z 轴在平面上，即平面通过 z 轴. 反过来容易知道，当平面(3.1-10)平行于 z 轴时 $D\neq 0$, $C=0$; 当(3.1-10)通过 z 轴时，$D=C=0$.

对于 $A=0$, 或 $B=0$ 的情况，可以得出类似的结论.

因此，由 1° 与 2° 我们有:

当且仅当 $D=0$, 平面(3.1-10)通过原点.

当且仅当 $D\neq 0$, $C=0$($B=0$ 或 $A=0$), 平面(3.1-10)平行于 z 轴(y 轴或 x 轴)；当且仅当 $D=0$, $C=0$($B=0$ 或 $A=0$), 平面(3.1-10)通过 z 轴(y 轴或 x 轴).

3° A, B, C 中有两个为零的情况，我们由 1° 与 2° 立刻可得下面的结论:

当且仅当 $D\neq 0$, $B=C=0$($A=C=0$ 或 $A=B=0$), 平面(3.1-10)平行于 yOz 坐标面(xOz 面或 xOy 面)；当且仅当 $D=0$, $B=C=0$($A=C=0$ 或 $A=B=0$), 平面(3.1-10)即为 yOz 坐标面(xOz 面或 xOy 面).

例 2 求通过点 $M_1(2, -1, 1)$ 与 $M_2(3, -2.1)$, 且平行于 z 轴的平面的方程.

解 设平行于 z 轴的平面方程为

$$Ax+By+D=0,$$

因为它又要通过 $M_1(2,\ -1,\ 1)$ 与 $M_2(3,\ -2,\ 1)$，所以有

$$2A-B+D=0,$$

$$3A-2B+D=0,$$

由上两式得

$$A:B:D=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1:1:(-1).$$

所以所求的平面方程为

$$x+y-1=0.$$

3. 平面的法式方程

如果在空间给定一点 M_0 和一个非零矢量 $\boldsymbol{n}$，那么通过点 M_0 且与矢量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面也唯一地被确定．我们把与平面垂直的非零矢量 $\boldsymbol{n}$ 叫做平面的法矢量或简称平面的法矢．在空间直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下，设点 M_0 的径矢为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$，平面 π 上的任意一点 M 的径矢为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$（图 3-4）．显然点 M 在平面 π 上的充要条件是矢量 $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，这个条件可写成：

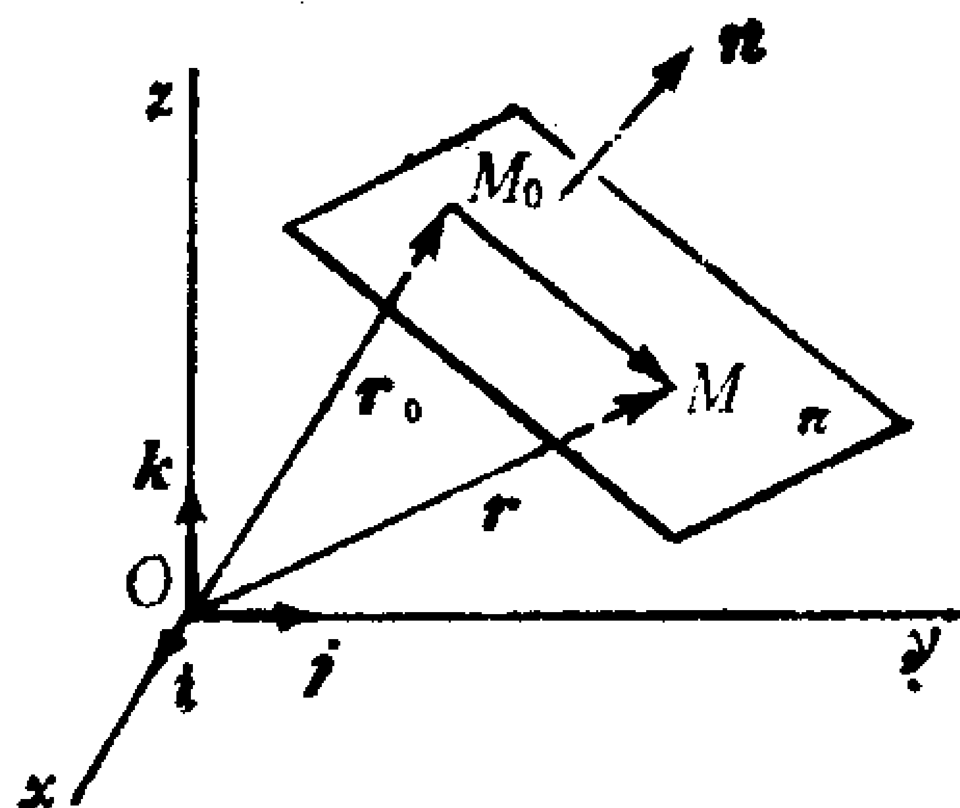


图 3-4

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0. \qquad (3.1\text{-}11)$$

如果设 $\boldsymbol{n}=\{A,\ B,\ C\}$，$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$M(x,\ y,\ z)$，那么

$$\boldsymbol{r}_0=\{x_0,\ y_0,\ z_0\},\ \boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ z\},$$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\},$$

于是(3.1-11)又可表示成：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (3.1\text{-}12)$$

方程(3.1-11)与(3.1-12)都叫做平面的点法式方程．

如果记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，那么(3.1-12)即成为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

由此可见，在直角坐标系下，平面 π 的一般方程(3.1-10)中一次项系数 A, B, C 有简明的几何意义，它们是平面 π 的一个法矢量 $\boldsymbol{n}$ 的分量.

如果平面上的点 M_0 特殊地取自原点 O 向平面 π 所引垂线的垂足 P，而 π 的法矢量取单位法矢量 $\boldsymbol{n}^0$，当平面不过原点时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向取做与矢量 $\overrightarrow{OP}$ 相同(图 3-5)；当平面通过原点时，$\boldsymbol{n}^0$ 的正向在垂直于平面的两个方向中任意取定一个，设

$$|\overrightarrow{OP}|=p,$$

那么点 P 的径矢 $\overrightarrow{OP}=p\boldsymbol{n}^0$，因此根据(3.1-11)，由点 P 和法矢量 $\boldsymbol{n}^0$ 决定的平面 π 的方程为：

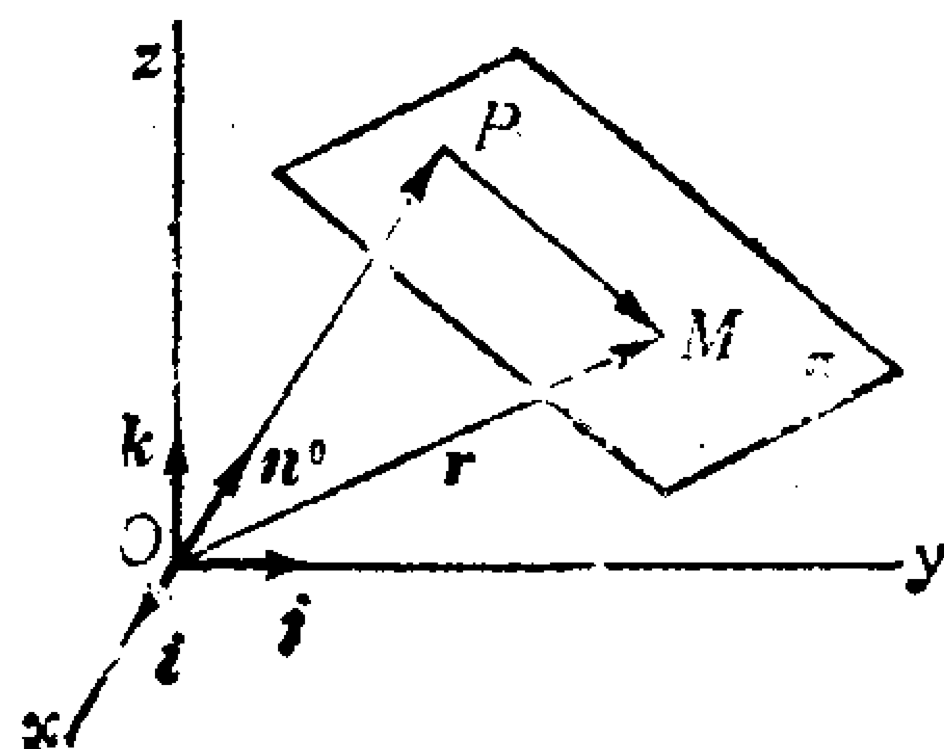


图 3-5

$$\boldsymbol{n}^0\cdot(\boldsymbol{r}-p\boldsymbol{n}^0)=0,$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是平面 π 上任意点 M 的径矢. 因为 $\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{n}^0=1$，所以上式可写成

$$\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{r}-p=0, \qquad (3.1\text{-}13)$$

(3.1-13)叫做平面的*矢量式法式方程*.

如果设 $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$，$\boldsymbol{n}^0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，那么由(3.1-13)得

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (3.1\text{-}14)$$

(3.1-14)叫做平面的*坐标式法式方程*或简称*法式方程*.

平面的法式方程(3.1-14)是具有下列两个特征的一种一般方程：① 一次项的系数是单位法矢量的分量，它们的平方和等于 1；② 因为 p 是原点 O 到平面 π 的距离，所以常数项 $-p\leqslant 0$.

根据平面的法式方程的两个特征，我们不难把平面的一般方

程(3.1-10),即 $Ax+By+Cz+D=0$ 化为平面的法式方程. 事实上,$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ 是平面的法矢量,而 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$,所以(3.1-10)可写成:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}+D=0, \tag{3.1-15}$$

把(3.1-15)与(3.1-13)比较可知,只要以

$$\lambda=\frac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

乘(3.1-10)就可得法式方程:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{Cz}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0, \tag{3.1-16}$$

其中 λ 的正负号选取一个,使它满足 $\lambda D=-p\leqslant 0$,或者说当 $D\neq 0$ 时,取 λ 的符号与 D 异号;当 $D=0$ 时,λ 的符号可以任意选取(正的或负的).

我们在前面已指出,在直角坐标系下,平面的一般方程(3.1-10)中一次项的系数 A, B, C 为平面的一个法矢量的分量,在这里我们又看到 $-\lambda D=p$ 等于原点到这平面的距离. 平面的一般方程(3.1-10)乘上取定符号的 λ 以后,便可得到平面的法式方程(3.1-16),通常我们称这个变形为方程(3.1-10)的法式化,而因子

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\quad(\text{在取定符号后})$$

就叫做法式化因子.

例 3 已知两点 $M_1(1, -2, 3)$ 与 $M_2(3, 0, -1)$,求线段 M_1M_2 的垂直平分面 π 的方程.

解 因为矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2, 2, -4\}=2\{1, 1, -2\}$ 垂直于平面 π,所以平面 π 的一个法矢量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,\ 1,\ -2\},$$

所求平面π又通过M_1M_2的中点$M_0(2,\ -1,\ 1)$，因此平面π的点法式方程为

$$(x-2)+(y+1)-2(z-1)=0,$$

化简整理得所求平面π的方程为

$$x+y-2z+1=0.$$

例 4 把平面π的方程$3x-2y+6z+14=0$化为法式方程，求自原点指向平面π的单位法矢量及其方向余弦，并求原点到平面的距离.

解 因为$A=3,\ B=-2,\ C=6,\ D=14>0$.

所以取法式化因子

$$\lambda=\frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=-\frac{1}{7},$$

将已知的一般方程乘上$\lambda=-\frac{1}{7}$，即得法式方程:

$$-\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z-2=0,$$

原点指向平面π的单位法矢量为$\boldsymbol{n}^0=\left\{-\frac{3}{7},\ \frac{2}{7},\ -\frac{6}{7}\right\}$，它的方向余弦为$\cos\alpha=-\frac{3}{7}$，$\cos\beta=\frac{2}{7}$，$\cos\gamma=-\frac{6}{7}$，原点$O$到平面$\pi$的距离为$p=2$.

习 题

1. 求下列各平面的坐标式参数方程和一般方程.

(1) 通过点$M_1(3,1,-1)$和$M_2(1,\ -1,\ 0)$且平行于矢量$\{-1,\ 0,\ 2\}$的平面;

(2) 通过点$M_1(1,\ -5,\ 1)$和$M_2(3,\ 2,\ -2)$且垂直于xOy坐标面的平面;

(3) 已知四点 $A(5, 1, 3)$, $B(1, 6, 2)$, $C(5, 0, 4)$, $D(4, 0, 6)$, 求通过直线 AB 且平行于直线 CD 的平面, 并求通过直线 AB 且与 $\triangle ABC$ 所在平面垂直的平面.

2. 化平面方程 $x+2y-z+4=0$ 为截距式与参数式.

3. 证明矢量 $\boldsymbol{v}=\{X, Y, Z\}$ 平行于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的充要条件为: $AX+BY+CZ=0$.

4. 已知连接两点 $A(3, 10, -5)$ 和 $B(0, 12, z)$ 的线段平行于平面 $7x+4y-z-1=0$, 求 B 点的 z 坐标.

5. 求下列平面的一般方程:

(1) 通过点 $M_1(2, -1, 1)$ 和 $M_2(3, -2, 1)$ 且分别平行于三坐标轴的三个平面;

(2) 过点 $M(3, 2, -4)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距分别为 -2 和 -3 的平面;

(3) 与平面 $5x+y-2z+3=0$ 垂直且分别通过三个坐标轴的三个平面;

(4) 已知两点 $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -2, -1)$, 通过 M_1 且垂直于 M_1M_2 的平面;

(5) 原点 O 在所求平面上的正投影为 $P(2, 9, -6)$;

(6) 过点 $M_1(3, -5, 1)$ 和 $M_2(4, 1, 2)$ 且垂直于平面 $x-8y+3z-1=0$ 的平面.

6. 将下列平面的一般方程化为法式方程:

(1) $x-2y+5z-3=0$;　　(2) $x-y+1=0$;

(3) $x+2=0$;　　(4) $4x-4y+7z=0$;

7. 求自坐标原点向以下各平面所引垂线的长和指向平面的单位法矢量的方向余弦:

(1) $2x+3y+6z-35=0$;

(2) $x-2y+2z+21=0$.

8. 已知三角形顶点为 $A(0, -7, 0)$, $B(2, -1, 1)$, $C(2, 2, 2)$, 求平行于 $\triangle ABC$ 所在的平面且与它相距为 2 个单位的平面方程.

9. 求与原点距离为 6 个单位, 且在三坐标轴 Ox, Oy 与 Oz 上的截距之比为 $a:b:c=-1:3:2$ 的平面.

10. 平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 分别与三个坐标轴交于点 A, B, C, 求 $\triangle ABC$

的面积.

11. 设从坐标原点到平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离为 p, 求证:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

§3.2 平面与点的相关位置

空间中平面与点的相关位置,有且只有两种情况,就是点在平面上,或点不在平面上,点在平面上的条件是点的坐标满足平面的方程. 下面我们在直角坐标系下来讨论点不在平面上的情况.

1. 点与平面间的距离

在求点与平面间的距离之前, 我们先引进点关于平面的离差的概念.

定义 3.2.1 如果自点 M_0 到平面 π 引垂线, 其垂足为 Q, 那么矢量 $\overrightarrow{QM_0}$ 在平面 π 的单位法矢量 $\boldsymbol{n}^0$ 上的射影叫做点 M_0 与平面 π 间的离差,记做

$$\delta=\text{射影}_{\boldsymbol{n}^0}\overrightarrow{QM_0}. \tag{3.2-1}$$

容易看出,空间的点与平面间的离差, 当且仅当点 M_0 位于平面 π 的单位法矢量 $\boldsymbol{n}^0$ 所指向的一侧, $\overrightarrow{QM_0}$ 与 $\boldsymbol{n}^0$ 同向 (图 3-6), 离差 $\delta>0$; 在平面 π 的另一侧, $\overrightarrow{QM_0}$ 与 $\boldsymbol{n}^0$ 方向相反(图 3-7), 离

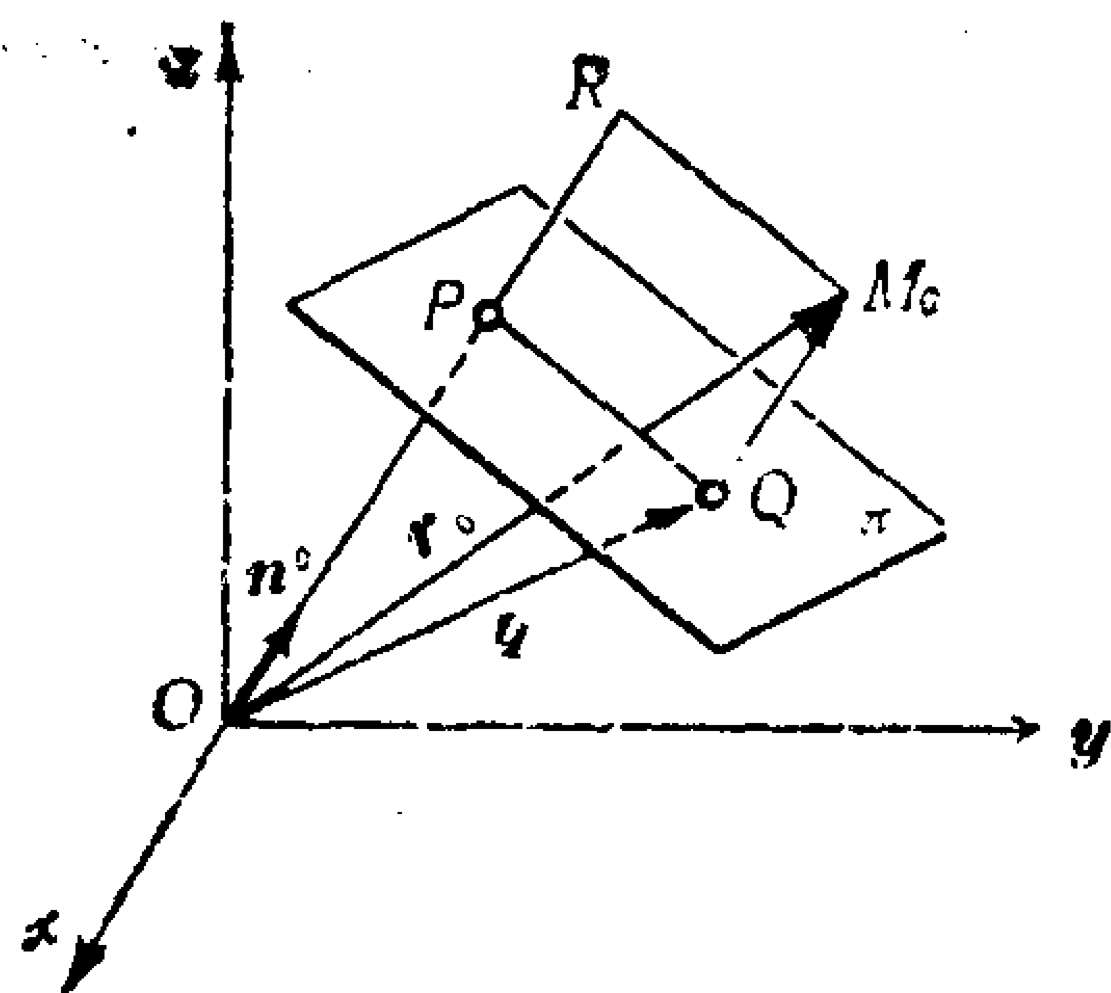


图 3-6

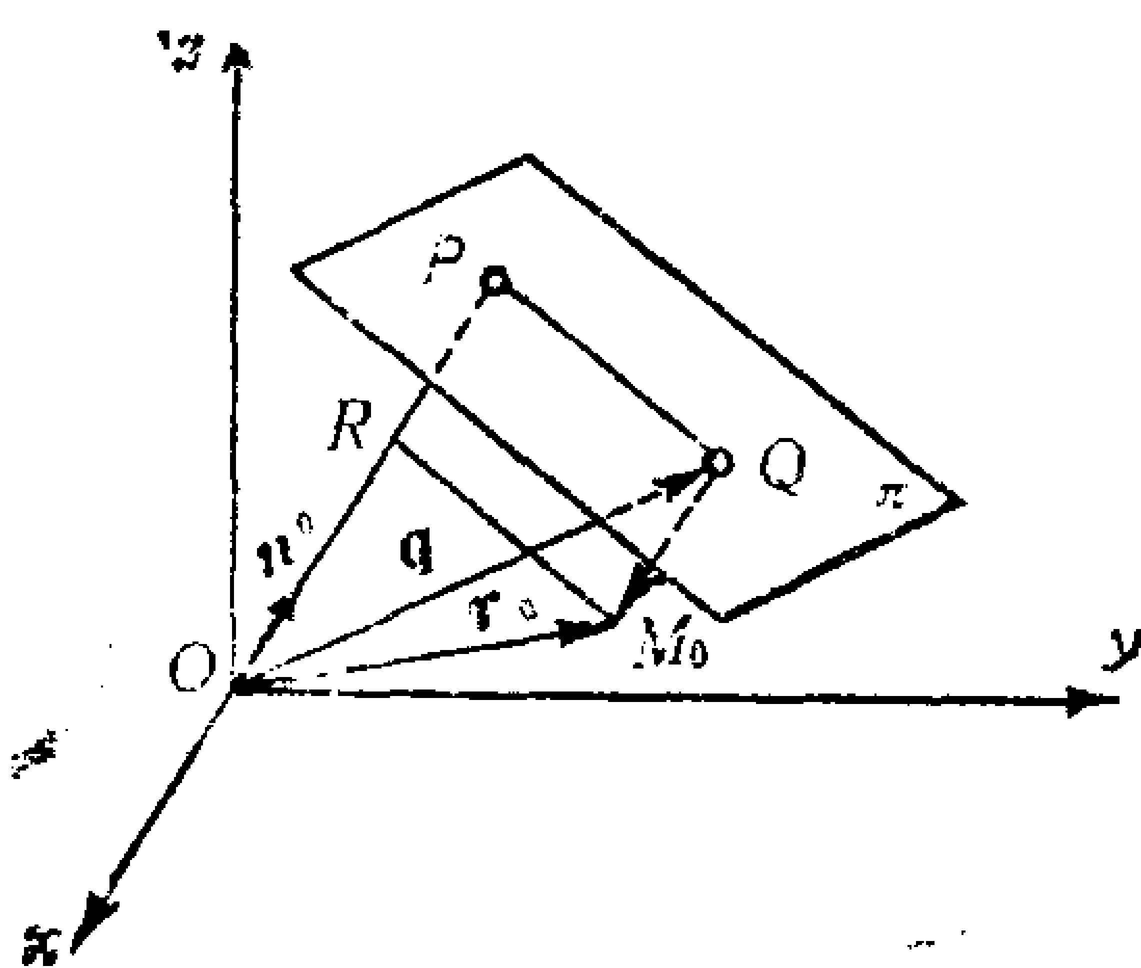


图 3-7

差 $\delta<0$; 当且仅当 M_0 在平面 π 上时, 离差 $\delta=0$.

显然, 离差的绝对值 $|\delta|$, 就是点 M_0 与平面 π 之间的距离 d.

定理 3.2.1 点 M_0 与平面(3.1-13)间的离差为

$$\delta=\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{r}_0-p, \tag{3.2-2}$$

这里 $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$.

证 根据定义 3.2.1(图 3-6 或图 3-7)得

$$\delta=\text{射影}_{\boldsymbol{n}^0}\overrightarrow{QM_0}=\boldsymbol{n}^0\cdot(\overrightarrow{OM_0}-\overrightarrow{OQ})$$

$$=\boldsymbol{n}^0\cdot(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{q})=\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{q},$$

而 Q 在平面(3.1-13)上, 因此 $\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{q}=p$, 所以

$$\delta=\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{r}_0-p.$$

推论 1 点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 与平面(3.1-14)间的离差是

$$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p. \tag{3.2-3}$$

推论 2 点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 间的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.2-4}$$

2. 平面划分空间问题　三元一次不等式的几何意义

设平面 π 的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

那么, 空间任何一点 $M(x,\ y,\ z)$ 对平面的离差为

$$\delta=\lambda(Ax+By+Cz+D),$$

式中 λ 为平面 π 的法化因子, 所以有

$$Ax+By+Cz+D=\frac{1}{\lambda}\delta. \tag{3.2-5}$$

对于平面 π 同侧的点, δ 的符号相同; 对于在 π 异侧的点, δ 有不同的符号. 这是因为当 M_1 与 M_2 是 π 同侧的点时 $\overrightarrow{Q_1M_1}$, 与 $\overrightarrow{Q_2M_2}$ 同向(图 3-8); 当 M_1 与 M_2 是 π 异侧的点时 $\overrightarrow{Q_1M_1}$ 与 $\overrightarrow{Q_2M_2}$

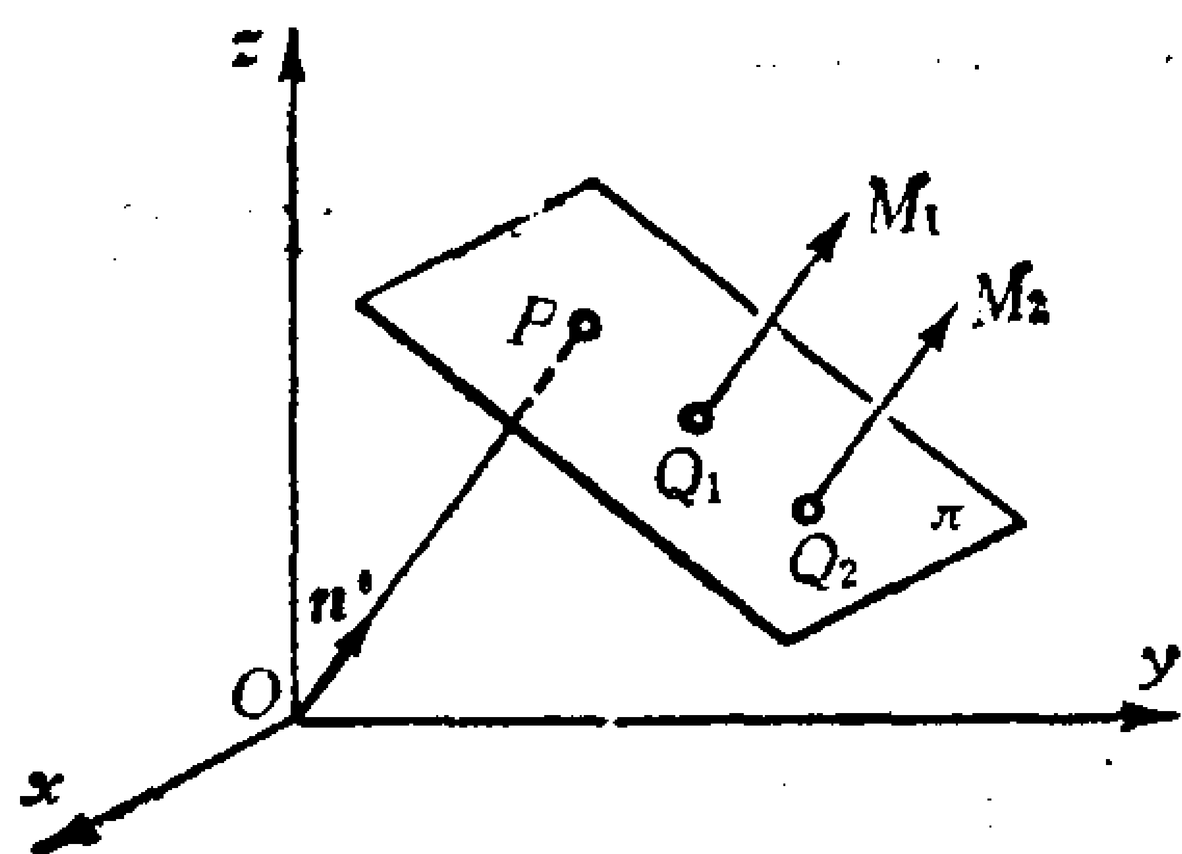


图 3-8

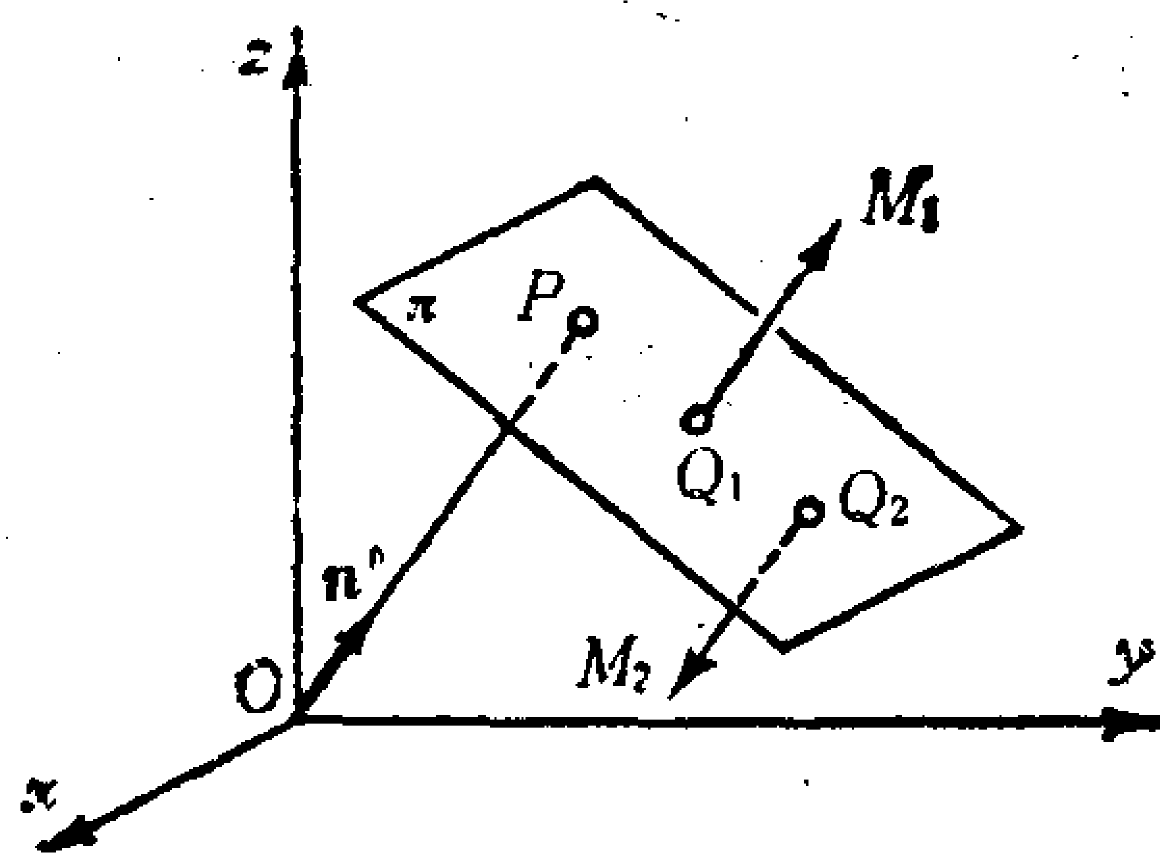


图 3-9

方向相反(图 3-9)．因此由(3.2-5)式可以知道平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 把空间划分为两部分，对于某一部分的点 $Ax+By+Cz+D>0$；而对于另一部分的点，则有 $Ax+By+Cz+D<0$，在平面 π 上的点 $Ax+By+Cz+D=0$．

习　题

1．计算下列点和平面间的离差和距离:

(1) $M(-2, 4, 3)$，π: $2x-y+2z+3=0$;

(2) $M(1, 2, -3)$，π: $5x-3y+z+4=0$．

2．求下列各点坐标:

(1) 在 y 轴上且到平面 $x+2y-2z-2=0$ 距离等于 4 个单位的点;

(2) 在 z 轴上且到点 $M(1, -2, 0)$ 与到平面 $3x-2y+6z-9=0$ 距离相等的点;

(3) 在 x 轴上且到平面 $12x-16y+15z+1=0$ 和 $2x+2y-z-1=0$ 距离相等的点．

3．已知四面体的四个顶点为 $S(0, 6, 4)$，$A(3, 5, 3)$，$B(-2, 11, -5)$，$C(1, -1, 4)$．计算从顶点 S 向底面 ABC 所引的高．

4．求中心在 $C(3, -5, -2)$ 且与平面 $2x-y-3z+11=0$ 相切的球面方程．

5．求通过 x 轴且与点 $M(5, 4, 13)$ 相距 8 个单位的平面方程．

6．求与下列各对平面距离相等的点的轨迹:

(1) $3x+6y-2z-7=0$ 和 $4x-3y-5=0$;

(2) $9x-y+2z-14=0$ 和 $9x-y+2z+6=0$.

7. 设平面 π 为 $Ax+By+Cz+D=0$, 它与连接二点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线相交于点 M, 且 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$, 求证:

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

8. 已知平面 π: $x+2y-3z+4=0$, 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 4)$, $B(1, 0, -2)$, $C(2, 0, 2)$, $D(0, 0, 4)$, $E(1, 3, 0)$, $F(-1, 0, 1)$. 试区分上述各点哪些在平面 π 的某一侧, 哪些在 π 的另一侧, 哪些点在平面上?

9. 判别点 $M(2, -1, 1)$ 和 $N(1, 2, -3)$ 在由下列相交平面所构成的同一个二面角内, 还是分别在相邻二面角内, 或是在对顶的二面角内?

(1) π_1: $3x-y+2z-3=0$ 与 π_2: $x-2y-z+4=0$;

(2) π_1: $2x-y+5z-1=0$ 与 π_2: $3x-2y+6z-1=0$.

10. 试求由平面 π_1: $2x-y+2z-3=0$ 与 π_2: $3x+2y-6z-1=0$ 所构成的二面角的角平分面的方程, 在此二面角内有点 $M(1, 2, -3)$.

§3.3 两平面的相关位置

空间两个平面的相关位置有三种情形, 即相交、平行和重合, 而且当且仅当两平面有一部分公共点时它们相交, 当且仅当两平面无公共点时它们相互平行, 当且仅当一个平面上的所有点就是另一个平面的点时, 这两平面重合. 因此如果设两平面的方程为

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$

$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{2}$$

那么两平面 π_1 与 π_2 是相交还是平行或是重合, 就决定于由方程 (1) 与 (2) 构成的方程组是有解还是无解, 或是方程 (1) 与 (2) 仅相差一个不为零的数因子, 因此我们就得到了下面的定理.

定理 3.3.1 两平面 (1) 与 (2) 相交的充要条件是

$$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2, \tag{3.3-1}$$

平行的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}, \tag{3.3-2}$$

重合的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (3.3\text{-}3)$$

在直角坐标系下，由于两平面 π_1 与 π_2 的法矢量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\}与\boldsymbol{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\},$$

而当且仅当 $\boldsymbol{n}_1$ 不平行于 $\boldsymbol{n}_2$ 时，π_1 与 π_2 相交；当且仅当 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$ 时，π_1 与 π_2 平行或重合．因此我们同样可得两平面 π_1 与 π_2 相交的充要条件是(3.3-1)，平行或重合的充要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.3\text{-}4)$$

现在让我们在直角坐标系下来研究两平面的交角．

设两平面 π_1 与 π_2 间的二面角用 $\angle(\pi_1,\ \pi_2)$ 来表示，而两平面的法矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角记为 $\theta=\angle(\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2)$，那么显然有（图 3-10）

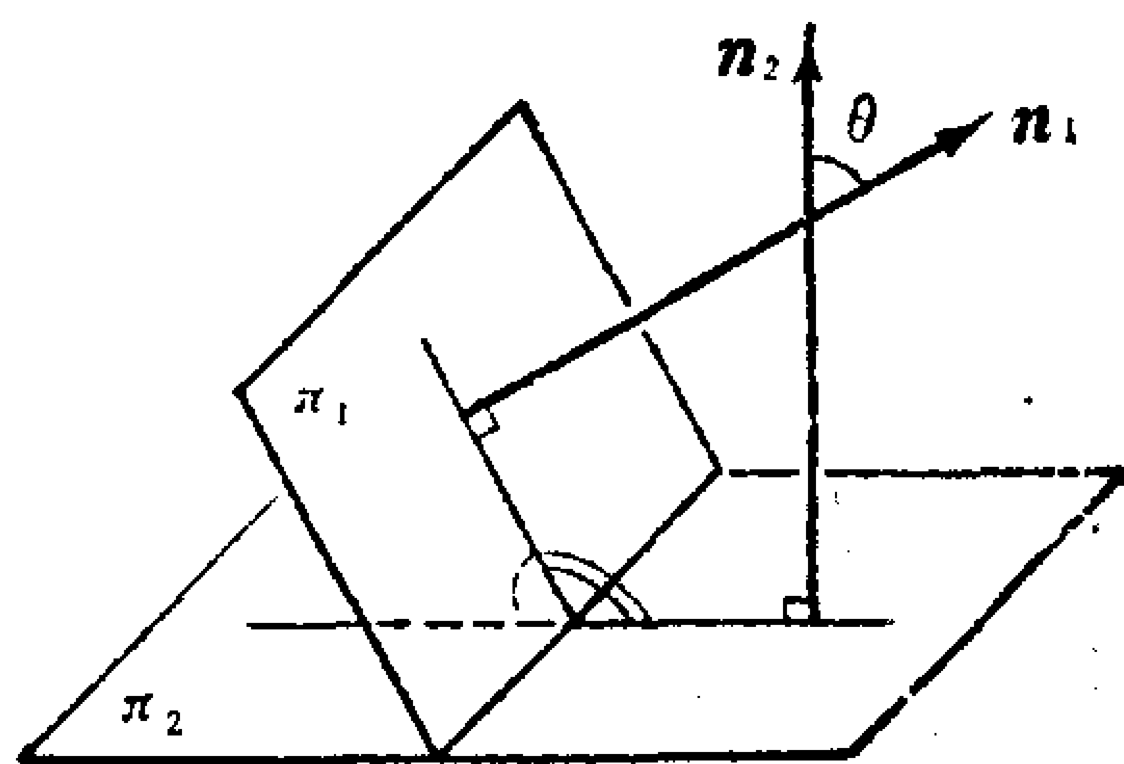


图 3-10

$\angle(\pi_1,\ \pi_2)=\theta$ 或 $\pi-\theta$．因此我们得到：

$$\cos\angle(\pi_1,\ \pi_2)=\pm\cos\theta=\pm\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}$$

$$=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (3.3\text{-}5)$$

显然平面 π_1 与 π_2 互相垂直的充分必要条件为 $\angle(\pi_1,\ \pi_2)=\frac{\pi}{2}$，即 $\cos\angle(\pi_1,\ \pi_2)=0$，因此从(3.3-5)我们得

定理 3.3.2 两平面(1)与(2)相互垂直的充要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.3\text{-}6)$$

习　题

1. 判别下列各对平面的相关位置:

(1) $x+2y-4z+1=0$ 与 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}-z-3=0$;

(2) $2x-y-2z-5=0$ 与 $x+3y-z-1=0$;

(3) $6x+2y-4z+3=0$ 与 $9x+3y-6z-\frac{9}{2}=0$.

2. 分别在下列条件下确定 l, m, n 的值:

(1) 使 $(l-3)x+(m+1)y+(n-3)z+8=0$ 和 $(m+3)x+(n-9)y+(l-3)z-16=0$ 表示同一平面;

(2) 使 $2x+my+3z-5=0$ 与 $lx-6y-6z+2=0$ 表示二平行平面;

(3) 使 $lx+y-3z+1=0$ 与 $7x-2y-z=0$ 表示二互相垂直的平面.

3. 求下列两平行平面间的距离:

(1) $19x-4y+8z+21=0$, $19x-4y+8z+42=0$;

(2) $3x+6y-2z-7=0$, $3x+6y-2z+14=0$.

4. 求下列各组平面所成的角:

(1) $x+y-11=0$, $3x+8=0$;

(2) $2x-3y+6z-12=0$, $x+2y+2z-7=0$.

5. 求下列平面的方程:

(1) 通过点 $M_1(0, 0, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 0)$ 且与坐标面 xOy 成 $60°$ 角的平面;

(2) 过 z 轴且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 $60°$ 角的平面.

6. 设三平行平面 π_i: $Ax+By+Cz+D_i=0(i=1, 2, 3)$, L, M, N 是分别属于平面 π_1, π_2, π_3 的任意点, 求 $\triangle LMN$ 的重心的轨迹.

§3.4 空间直线的方程

1. 由直线上一点与直线的方向所决定的直线方程

在空间给定了一点 M_0 与一个非零矢量 $\boldsymbol{v}$, 那么通过点 M_0 且与矢量 $\boldsymbol{v}$ 平行的直线 l 就唯一地被确定, 矢量 $\boldsymbol{v}$ 叫做直线 l 的方向矢量. 显然, 任何一个与直线 l 平行的非零矢量都可以作为直

线 l 的方向矢量.

现按给定条件导出直线的方程. 在空间取标架 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, 并设点 M_0 的径矢为 $\overrightarrow{OM_0}=\boldsymbol{r}_0$, 直线 l 上的任意点 M 的径矢为 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$(图 3-11), 那么, 显然点 M 在直线 l 上的充要条件为 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ 共线, 也就是

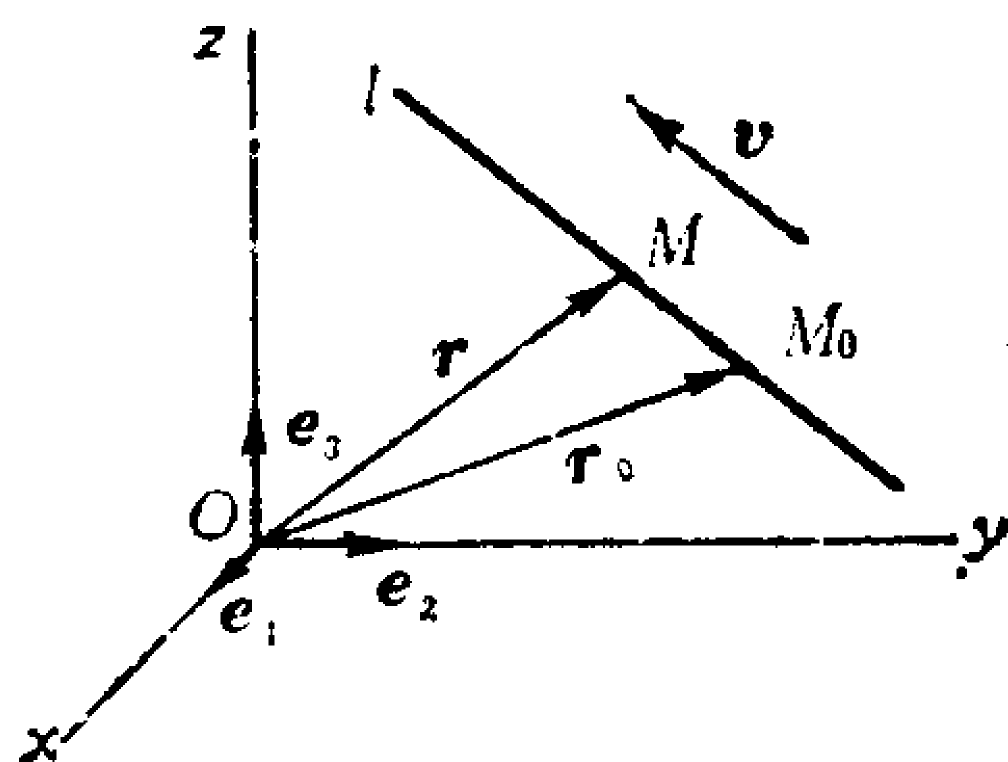


图 3-11

$$\overrightarrow{M_0M}=t\boldsymbol{v},$$

即 $$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=t\boldsymbol{v},$$

所以 $$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}. \tag{3.4-1}$$

(3.4-1) 叫做直线 l 的矢量式参数方程, 其中 t 为参数.

如果设点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, 那么 $\boldsymbol{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$, $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$; 又设 $\boldsymbol{v}=\{X, Y, Z\}$, 那么由 (3.4-1) 式得

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt. \end{cases} \tag{3.4-2}$$

(3.4-2) 叫做直线 l 的坐标式参数方程.

由 (3.4-2) 消去参数 t, 那么得到

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \tag{3.4-3}$$

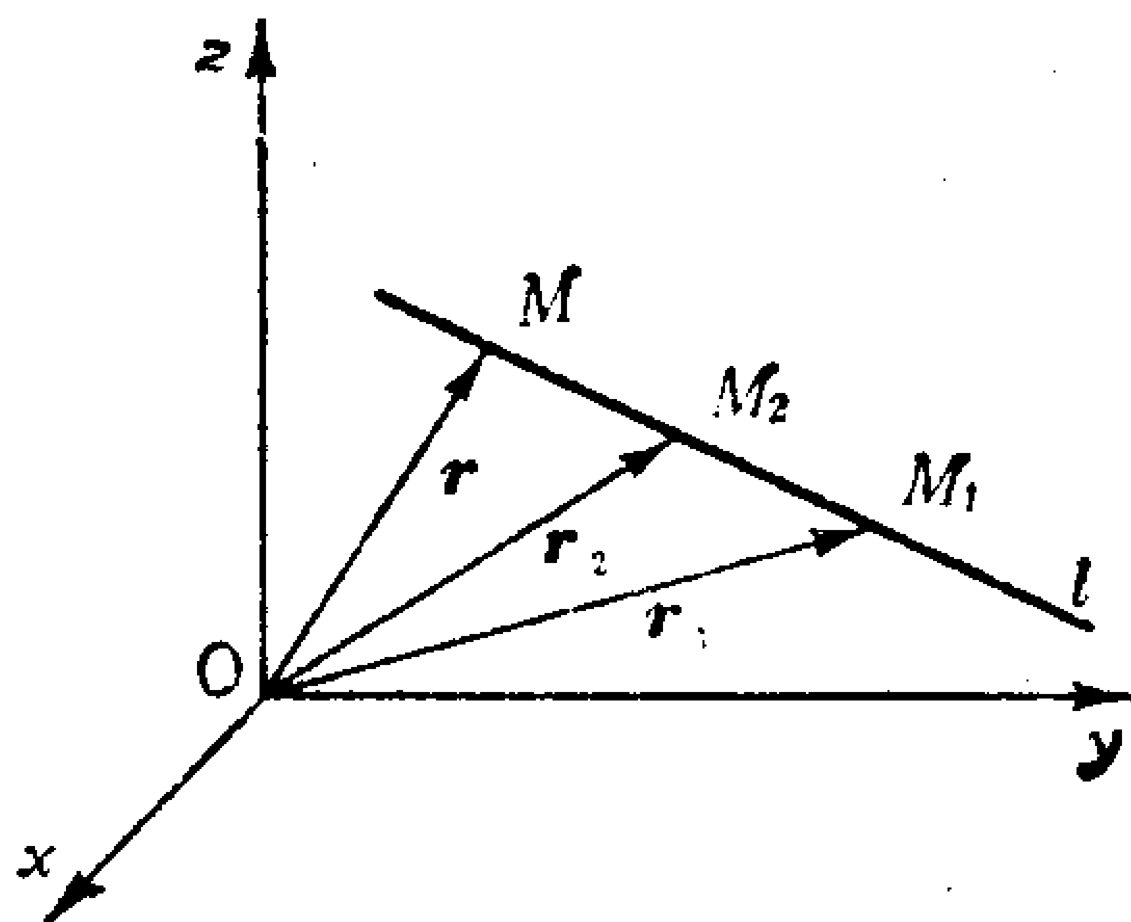


图 3-12

(3.4-3) 叫做直线 l 的对称式方程或称直线 l 的标准方程.

例 1 求通过空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l 的方程.

解 取 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 作为直线 l 的方向矢量, 设 $M(x, y, z)$ 为

直线 l 上的任意点(图 3-12), 那么

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\},$$

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM_i}=\{x_i, y_i, z_i\}, \ (i=1, 2)$$

$$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},$$

所以直线 l 的矢量式参数方程为:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1); \tag{3.4-4}$$

坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1), \\ y=y_1+t(y_2-y_1), \\ z=z_1+t(z_2-z_1); \end{cases} \tag{3.4-5}$$

对称式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.4-6}$$

方程(3.4-4), (3.4-5), (3.4-6)都叫做直线 l 的两点式方程。

在直角坐标系下, 直线的方向矢量常常取单位矢量

$$\boldsymbol{v}^0=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

这时直线 l 的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}^0, \tag{3.4-7}$$

或

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\cos\beta, \\ z=z_0+t\cos\gamma, \end{cases} \tag{3.4-8}$$

直线 l 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}, \tag{3.4-9}$$

这时(3.4-7)中的 t 的绝对值恰好是直线 l 上的两点 M_0 与 M 间的距离, 这是因为

$$|t|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=|\overrightarrow{MM_0}|.$$

直线的方向矢量的方向角 α, β, γ 与方向余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 分别叫做直线的方向角与方向余弦；直线的方向矢量的分量 X, Y, Z 或与它成比例的一组数 l, m, n($l:m:n=X:Y:Z$)叫做直线的方向数．由于与直线共线的任何非零矢量，都可以作为直线的方向矢量，因此 $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ 以及 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$, $\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$，也可以分别看作是直线的方向角与方向余弦．显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系：

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\tag{3.4-10}$$

或
$$\cos\alpha=-\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos\beta=-\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=-\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.\tag{3.4-10'}$$

由于这里所讨论的直线，一般都不是有向直线，而且两非零矢量 $\{X, Y, Z\}$ 与 $\{X', Y', Z'\}$ 共线的充要条件为

$$\frac{X}{X'}=\frac{Y}{Y'}=\frac{Z}{Z'},$$

或写成
$$X:Y:Z=X':Y':Z'.$$

所以我们将用 $X:Y:Z$ 来表示与非零矢量 $\{X, Y, Z\}$ 共线的直线的方向(数)；同样，在平面上用 $X:Y$ 表示与矢量 $\{X, Y\}$ 共线的直线的方向(数)．

2. 直线的一般方程

设有两个平面 π_1 和 π_2 的方程为：

$$\left.\begin{aligned}\pi_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ \pi_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{3.4-11}$$

如果 $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$，即方程组(3.4-11)中的系数行列式

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零，那么平面 π_1 与 π_2 相交，它们的交线设为直线 l，因为直线 l 上的任意一点同在两平面上，所以它的坐标必满足方程组(3.4-11)；反过来，坐标满足方程组(3.4-11)的点同在两平面上，因而一定在两平面的交线即直线 l 上. 因此方程组(3.4-11)表示直线 l 的方程，我们把它叫做**直线的一般方程**.

直线的标准方程(3.4-3)是一般方程的特殊情形. 事实上，我们总可以将标准方程(3.4-3)表示为一般方程的形式，这是因为在(3.4-3)中 X, Y, Z 不全为零，不妨设 $Z \neq 0$，那么(3.4-3)可先改写成

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{X} = \dfrac{z-z_0}{Z}, \\ \dfrac{y-y_0}{Y} = \dfrac{z-z_0}{Z}; \end{cases}$$

经过整理得下列形式:

$$\begin{cases} x = az + c, \\ y = bz + d, \end{cases} \tag{3.4-12}$$

式中 $a = \dfrac{X}{Z}$，$b = \dfrac{Y}{Z}$，

$$c = x_0 - \frac{X}{Z} z_0, \quad d = y_0 - \frac{Y}{Z} z_0,$$

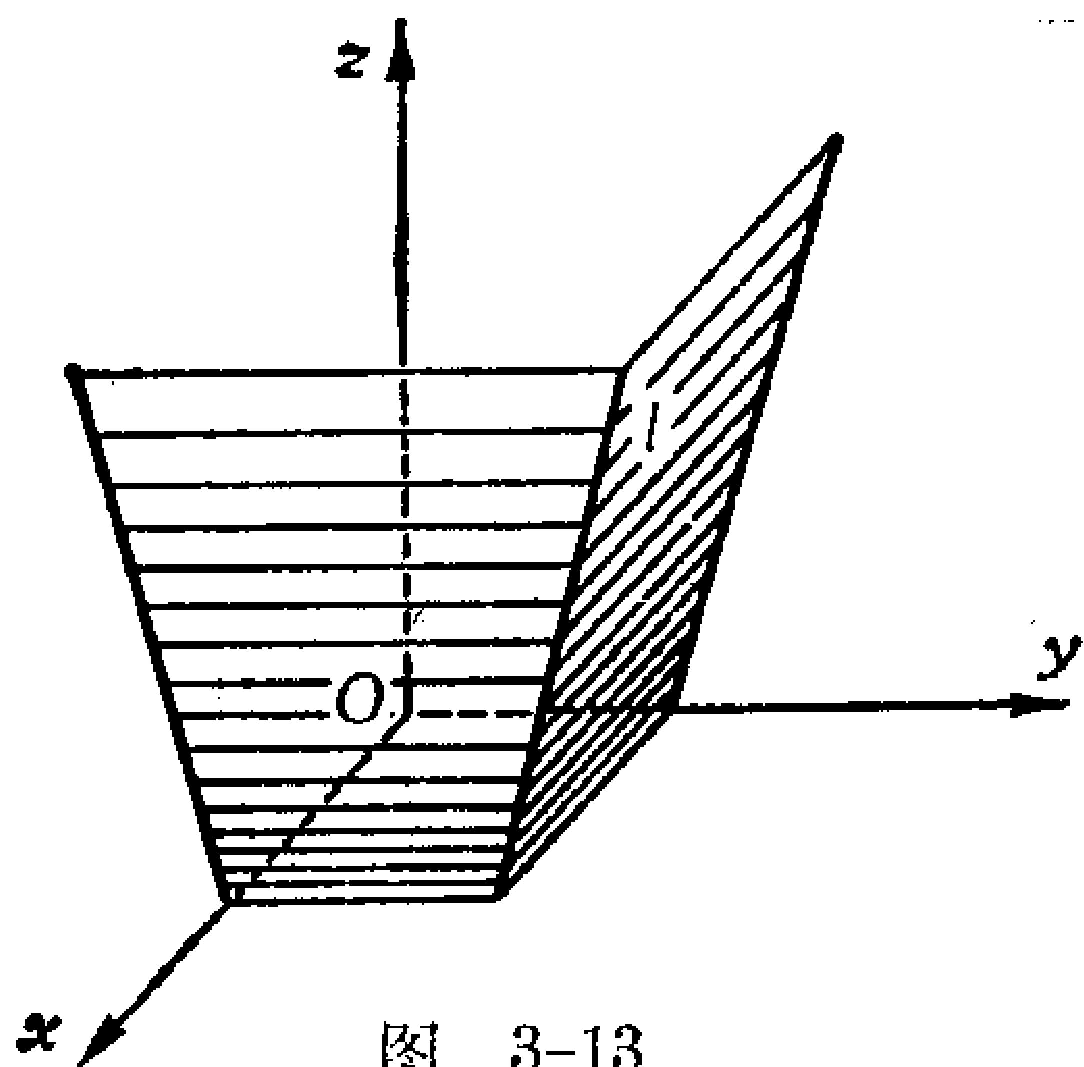


图 3-13

显然这是一种特殊的一般方程. (3.4-3)表示的直线 l 可以看作是用(3.4-12)中两个方程表示的两个平面的交线，而这两个平面是通过该直线且分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴的平面，在直角坐标系下它们又分别垂直于坐标面 xOz

与 yOz(图 3-13)，我们把(3.4-12)叫做直线 l 的射影式方程.

反过来，直线的一般方程(3.4-11)也总可以化为标准方程(3.4-3)的形式,这是因为(3.4-11)中三个系数行列式

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零,不失一般性,设

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么由(3.4-11)中的两式分别消去 y 与 x 得直线的射影式方程为:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \end{cases}$$

从而得直线的标准方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

式中

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad z_0 = 0.$$

从上可以看出,给定了直线的一般方程(3.4-11),我们立刻可以写出它的一组方向数，这就是方程组(3.4-11)的三个二阶系数行列式

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

由于这三个二阶行列式不能全为零，例如 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，那么我们就可使 z 取任意指定的值 $z=z_0$（特别地可取 $z=0$），解方程组(3.4-11)得 $x=x_0$，$y=y_0$，那么 (x_0, y_0, z_0) 为方程组(3.4-11)的一个特解，点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 就是直线上的一点，于是同样地得到了直线(3.4-11)的标准方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

例 2 化直线 l 的一般方程

$$\begin{cases} 2x+y+z-5=0, \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

为标准方程.

解法一 因为 y, z 的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$，所以可由原方程组分别消去 z 和 y，得直线 l 的射影式方程为：

$$\begin{cases} y=-2x+4, \\ z=1, \end{cases}$$

所以直线 l 的标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-1}{0}.$$

解法二 因为直线 l 的方向数为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4:8:0=1:(-2):0.$$

再设 $x=0$. 解得 $y=4$, $z=1$，那么 $(0, 4, 1)$ 为直线上的一点①，所

① 化直线的一般方程为标准方程，可取直线上任意指定的点。

以直线 l 的标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-1}{0}.$$

在直角坐标系下，(3.4-11)中的两平面的法矢量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\},\ \boldsymbol{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\},$$

所以直线 l 的方向矢量可取为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\}.$$

例 3 把直线 l 的一般方程

$$\begin{cases}x-2y+3z-4=0,\\ x-2y-z=0.\end{cases}$$

化为标准方程.

解 因直线 l 平行于矢量

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{1,\ -2,\ 3\}\times\{1,\ -2,\ -1\}$$
$$=\{8,\ 4,\ 0\}=4\{2,\ 1,\ 0\},$$

所以矢量 $\boldsymbol{v}=\{2,\ 1,\ 0\}$ 为直线 l 的方向矢量. 其次由于

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0,$$

因此令 $y=0$，解方程组得 $x=1,\ z=1$，那么 $(1,\ 0,\ 1)$ 为直线 l 上的一点，所以直线 l 的标准方程为:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}.$$

习　　题

1. 求下列各直线的方程:

(1) 通过点 $A(-3,\ 0,\ 1)$ 和 $B(2,\ -5,\ 1)$ 的直线;

(2) 通过点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 且平行于两相交平面 π_i: $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\ (i=1,\ 2)$ 的直线;

(3) 通过点 $M(1,\ -5,\ 3)$且与 $x,\ y,\ z$ 三轴分别成角 $60°,\ 45°,\ 120°$ 的直线;

(4) 通过点 $M(1, 0,\ -2)$且与两直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 和 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$ 垂直的直线;

(5) 通过点 $M(2,\ -3,\ -5)$且与平面 $6x-3y-5z+2=0$ 垂直的直线.

2. 求以下各点的坐标:

(1) 在直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-8}{3}$ 上与原点相距 25 个单位的点;

(2) 关于直线 $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ 与点 $P(2,\ 0,\ -1)$ 对称的点.

3. 求下列各平面的方程:

(1) 通过点 $P(2,\ 0,\ -1)$, 且又通过直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 的平面;

(2) 通过直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z+1}{-1}$ 且与直线

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$$

平行的平面;

(3) 通过直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ 且与平面 $3x+2y-z-5=0$ 垂直的平面;

(4) 通过直线 $\begin{cases} 5x+8y-3z+9=0 \\ 2x-4y+z-1=0 \end{cases}$ 向三坐标面所引的三个射影平面.

4. 化下列直线的一般方程为射影式方程与标准方程, 并求出直线的方向余弦.

(1) $\begin{cases} 2x+y-z+1=0, \\ 3x-y-2z-3=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+z-6=0, \\ 2x-4y-z+6=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x=2. \end{cases}$

5. 一直线与三坐标轴间的角分别为 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, 证明

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2.$$

§3.5 直线与平面的相关位置

空间直线与平面的相关位置有直线与平面相交, 直线与平面

平行和直线在平面上的三种情况，现在我们来求直线与平面相互位置关系的条件．设直线 l 与平面 π 的方程分别为

$$l:\ \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \tag{1}$$

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0, \tag{2}$$

为了求出直线 l 与平面 π 相互位置关系的条件，我们来求直线 l 与 π 的交点，为此将直线 l 的方程改写为参数式

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt; \end{cases} \tag{3}$$

(3)代入(2)，经整理可得

$$(AX+BY+CZ)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D), \tag{4}$$

因此，当且仅当 $AX+BY+CZ\neq 0$ 时，(4)有唯一解

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{AX+BY+CZ},$$

这时直线 l 与平面 π 有唯一公共点；当且仅当 $AX+BY+CZ=0$，$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ 时，方程(4)无解，这时直线 l 与平面 π 没有公共点；当且仅当 $AX+BY+CZ=0$，$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ 时，方程(4)有无数解，这时直线 l 与平面 π 有无数公共点，即直线 l 在平面 π 上．这样我们就得到了下面的定理：

定理 3.5.1 直线(1)与平面(2)的相互位置关系有下面的充要条件：

1° 相交：

$$AX+BY+CZ\neq 0; \tag{3.5-1}$$

2° 平行：

$$\begin{aligned} &AX+BY+CZ=0, \\ &Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0; \end{aligned} \tag{3.5-2}$$

3° 直线在平面上:

$$AX+BY+CZ=0,$$
$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{3.5-3}$$

由于直线 l 的方向矢量为 $\boldsymbol{v}=\{X, Y, Z\}$，而在直角坐标系下，平面 π 的法矢量为 $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$，因此在直角坐标系下，直线 l 与平面 π 的相互位置关系，从几何上看，直线 l 与平面 π 的相交条件

$$AX+BY+CZ\neq 0$$

就是 $\boldsymbol{v}$ 不垂直于 $\boldsymbol{n}$；直线 l 与平面 π 平行的条件

$$AX+BY+CZ=0,$$
$$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$$

就是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$，且直线 l 上的点 (x_0, y_0, z_0) 不在平面 π 上；直线 l 在平面 π 上的条件

$$AX+BY+CZ=0,\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

就是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$，且直线 l 上的点 (x_0, y_0, z_0) 在平面 π 上.

当直线 l 与平面 π 相交时，我们在直角坐标系下再来求它们的交角.

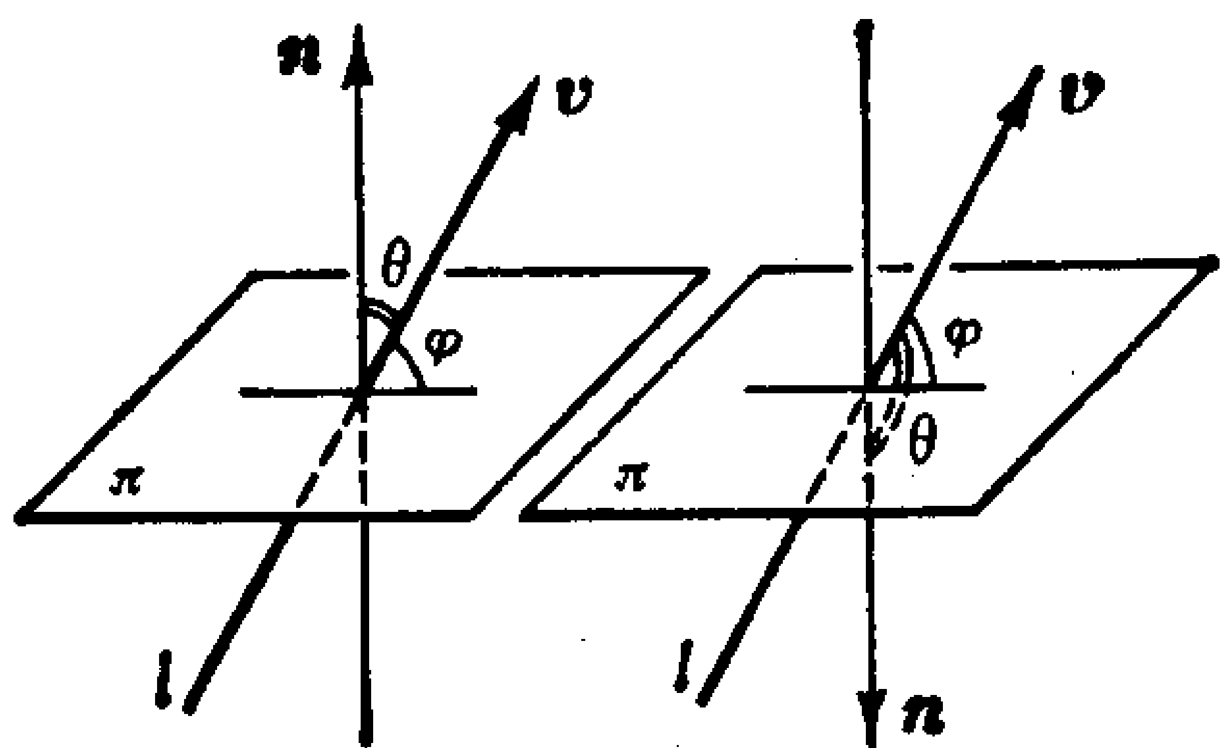


图 3-14

根据初等几何里的定义，当直线不和平面垂直时，直线与平面间的角 φ 是指这直线和它在这平面上的射影所构成的锐角(图 3-14)；当直线垂直于平面时，这直线垂直于平面内所有直线，这时我们规定直线与平面间的角 φ 为直角.

直线 l 与平面 π 间的角 φ 可以由直线 l 的方向矢量 $\boldsymbol{v}$ 和平面 π 的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 来决定. 如果设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\angle(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v})=\theta$

$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，那么 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-\theta\right|$，因而

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{v}|}$$

$$=\frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \qquad (3.5\text{-}4)$$

从(3.5-4)直接可以得到直线 l 和平面 π 平行或 l 在平面 π 上的充要条件是

$$AX+BY+CZ=0; \qquad (3.5\text{-}5)$$

而直线 l 与平面 π 垂直的充要条件显然是 $\boldsymbol{v}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$，即

$$\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}=\frac{C}{Z}. \qquad (3.5\text{-}6)$$

习　　题

1．判别下列直线与平面的相关位置：

(1) $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 与 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0\\2x-y-z-1=0\end{cases}$ 与 $4x-3y+7z-7=0$；

(4) $\begin{cases}x=t\\y=-2t+9\\z=9t-4\end{cases}$ 与 $3x-4y+7z-10=0$。

2．试验证直线 l：$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与平面 π：$2x+y-z-3=0$ 相交，并求出它们的交点和交角．

3．确定 l、m 的值使

(1) 直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$ 与平面 $lx+3y-5z+1=0$ 平行；

(2) 直线 $\begin{cases}x=2t+2\\y=-4t-5\\z=3t-1\end{cases}$ 与平面 $lx+my+6z-7=0$ 垂直；

4. 决定直线$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0\\A_2x+B_2y+C_2z=0\end{cases}$和平面$(A_1+A_2)x+(B_1+B_2)y+(C_1+C_2)z=0$的相互位置.

5. 设直线与三坐标平面的交角为λ、μ、ν，试证：

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=2.$$

6. 求下列球面的方程：

(1) 与平面$x+2y+2z+3=0$相切于点$M(1,\ 1,\ -3)$且半径$r=3$的球面；

(2) 与两平行平面$6x-3y-2z-35=0$和$6x-3y-2z+63=0$都相切且与其中之一相切于点$M(5,\ -1,\ -1)$的球面.

§3.6 空间两直线的相关位置

1. 空间两直线的相关位置

空间两直线的相关位置有异面与共面，在共面中又有相交、平行与重合的三种情况. 现在我们来导出这些相关位置成立的条件.

设两直线l_1与l_2的方程为：

$$l_1:\quad \frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}, \tag{1}$$

$$l_2:\quad \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}, \tag{2}$$

这里的直线l_1是由点$M_1(x_1, y_1, z_1)$与矢量$\boldsymbol{v}_1=\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}$决定的，$l_2$是由点$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$与矢量$\boldsymbol{v}_2=\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}$决定的. 从图3-15容易看出，两直线$l_1$与$l_2$的相关位置决定于三矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$，

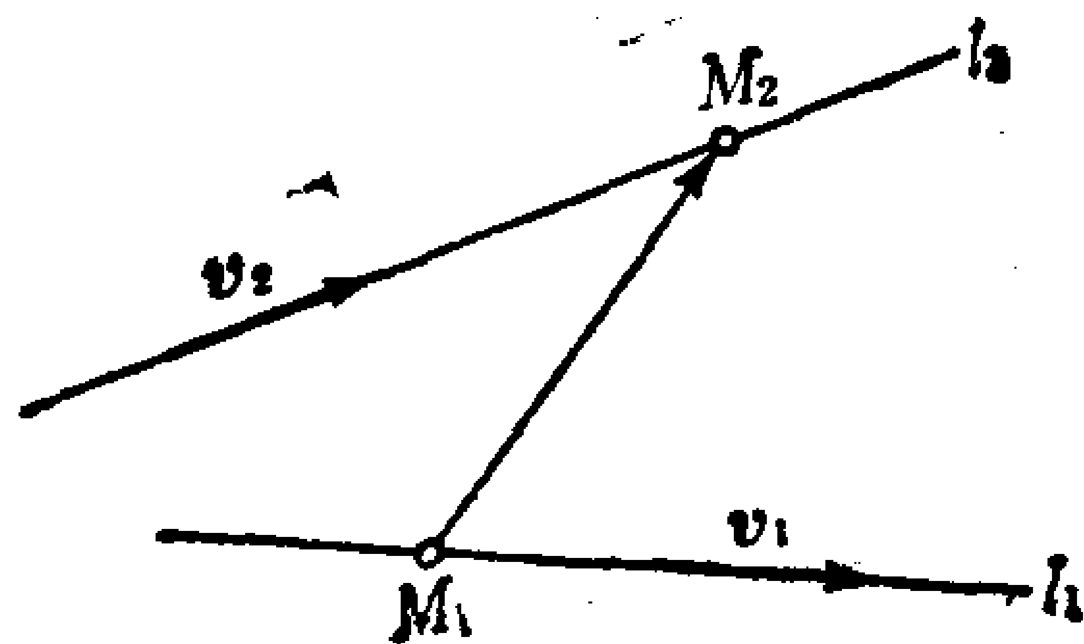


图 3-15

$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$的相互关系，当且仅当三矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$异面时，l_1与l_2异面；当且仅当三矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$共面时，l_1与l_2共面；在

共面的情况下，如果 $\boldsymbol{v}_1$ 不平行于 $\boldsymbol{v}_2$，那么 l_1 与 l_2 相交，如果 $\boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2$ 但不平行于 $\overrightarrow{M_1M_2}$，那么直线 l_1 与 l_2 平行，如果 $\boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$，那么 l_1 与 l_2 重合．因此我们就得到了下面的定理．

定理 3.6.1 判定空间两直线(1)与(2)的相关位置的充要条件为

1° 异面：

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0; \tag{3.6-1}$$

2° 相交：

$$\Delta=0, \quad X_1:Y_1:Z_1 \neq X_2:Y_2:Z_2; \tag{3.6-2}$$

3° 平行：

$$\begin{aligned} X_1:Y_1:Z_1 &= X_2:Y_2:Z_2, \\ &\neq (x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1); \end{aligned} \tag{3.6-3}$$

4° 重合：

$$\begin{aligned} X_1:Y_1:Z_1 &= X_2:Y_2:Z_2 \\ &= (x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1). \end{aligned} \tag{3.6-4}$$

2. 空间两直线的夹角

平行于空间两直线的两矢量间的角，叫做空间两直线的夹角，如果用它们的方向矢量之间的角来表示，就是

$$\angle(l_1, l_2)=\angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$$

或

$$\angle(l_1, l_2)=\pi-\angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2),$$

所以得：

定理 3.6.2 在直角坐标系里，空间两直线(1)与(2)夹角的余弦为

$$\cos\angle(l_1, l_2)=\pm\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{3.6-5}$$

推论 两直线(1)与(2)垂直的充要条件是

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \qquad (3.6\text{-}6)$$

3. 两异面直线间的距离与公垂线方程

空间两直线上的点之间的最短距离叫做这两条直线之间的距离. 显然两相交或重合的直线间的距离等于零；两平行直线间的距离等于其中一直线的任一点到另一直线的距离(点到直线的距离在下一节讨论)；与两条异面直线都垂直相交的直线叫做**两异面直线的公垂线**，两异面直线间的距离显然就等于它们的公垂线夹于两异面直线间的线段的长.

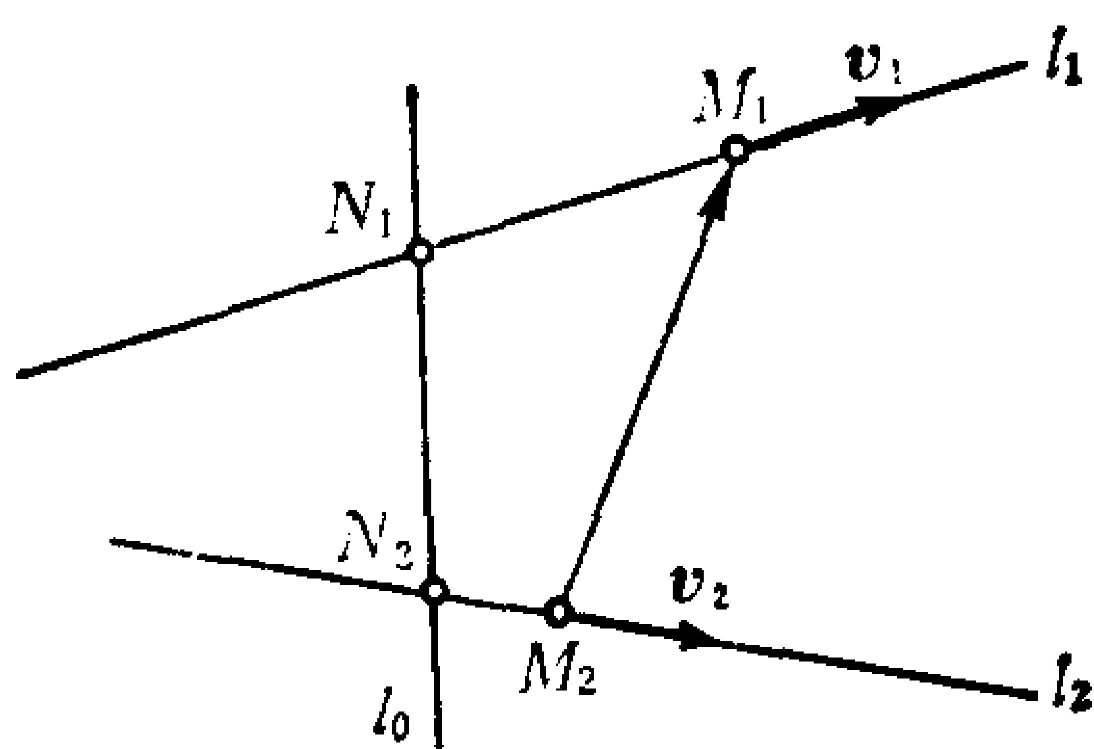


图 3-16

设两异面直线 l_1、l_2 与它们的公垂线 l_0 的交点分别为 N_1, N_2 (图 3-16)，那么 l_1 与 l_2 之间的距离

$$d=|\overrightarrow{N_2N_1}|=|\text{射影}_{l_0}\overrightarrow{M_2M_1}|=|\text{射影}_{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}\overrightarrow{M_2M_1}|$$
$$=\frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}.$$

所以两异面直线(1)与(2)间的距离为

$$d=\frac{\left\|\begin{matrix}x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}^2}}. \qquad (3.6\text{-}7)$$

现在来求两异面直线(1), (2)的公垂线方程. 如图 3-16，公垂线 l_0 的方向矢量可以取作 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$，而公垂线 l_0 可以看做由过 l_1 上的点 M_1，以 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 为方位矢量的平面与过 l_2 上的点 M_2，以 $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 为方位矢量的平面的交线，因此由(3.1-4)得公垂线 l_0 的方程为：

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0, \end{cases} \tag{3.6-8}$$

式中 $X=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$, $Y=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}$, $Z=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$是矢量$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$的分量，即$l_0$的方向数.

例 1 求通过点 $P(1, 1, 1)$且与两直线

$$l_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, \qquad l_2. \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

都相交的直线的方程.

解 设所求直线的方向矢为 $\boldsymbol{v}=\{X, Y, Z\}$，那么所求直线 $\boldsymbol{l}$ 的方程可写成:

$$\frac{x-1}{X}=\frac{y-1}{Y}=\frac{z-1}{Z},$$

因为 $\boldsymbol{l}$ 与 l_1, l_2 都相交，而且 l_1 过点 $M_1(0, 0, 0)$，方向矢量为 $\boldsymbol{v}_1=\{1, 2, 3\}$, l_2 过点 $M_2(1, 2, 3)$，方向矢量为 $\boldsymbol{v}_2=\{2, 1, 4\}$. 所以有

$$(\overrightarrow{M_1P}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0, \text{即 } X-2Y+Z=0,$$

$$(\overrightarrow{M_2P}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v})=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0, \text{即} X+2Y-Z=0,$$

由上两式得:

$$X:Y:Z=0:2:4=0:1:2,$$

显然又有 $0:1:2\neq1:2:3$，即 $\boldsymbol{v}\not\parallel\boldsymbol{v}_1$

$0:1:2\neq2:1:4$，即 $\boldsymbol{v}\not\parallel\boldsymbol{v}_2$.

所以所求直线 l 的方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

例 2 已知两直线

$$l_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0},\qquad l_2:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0},$$

试证明两直线 l_1 与 l_2 为异面直线，并求 l_1 与 l_2 间的距离与它们的公垂线方程.

解 因为直线 l_1 过点 $M_1(0,\ 0,\ -1)$，方向矢量为 $\boldsymbol{v}_1=\{1,\ -1,\ 0\}$，而直线 l_2 过点 $M_2(1,\ 1,\ 1)$，方向矢量为 $\boldsymbol{v}_2=\{1,\ 1,\ 0\}$，从而有

$$\Delta=(\overrightarrow{M_1M_2},\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=4\neq0.$$

所以 l_1 与 l_2 为两异面直线.

又因为 l_1 与 l_2 的公垂线 l_0 的方向矢量可取为

$$\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\{0,\ 0,\ 2\},$$

所以 l_1 与 l_2 之间的距离为

$$d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2)|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}=\frac{4}{2}=2.$$

根据(3.6-8)得公垂线 l_0 的方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x&y&z+1\\1&-1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=0,\\[2ex]\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\1&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0. \end{cases}$$
这条公垂线的方程又可写成
$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$$
显然它就是 z 轴。

习　题

1．直线方程 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的系数满足什么条件才能使

(1) 直线与 x 轴相交；(2) 直线与 x 轴平行；(3) 直线与 x 轴重合．

2．确定 λ 值使下列两直线相交：

(1) $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0 \\ x+4y+\lambda z-15=0 \end{cases}$ 与 z 轴；

(2) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与 $x+1=y-1=z$．

3．判别下列各对直线的相互位置，如果是相交的或平行的两直线，求出它们所在的平面；如果是异面直线，求出它们之间的距离．

(1) $\begin{cases} x-2y+2z=0, \\ 3x+2y-6=0, \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x+2y-z-11=0, \\ 2x+z-14=0; \end{cases}$

(2) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与 $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-6}{4}$；

(3) $\begin{cases} x=t, \\ y=2t+1, \\ z=-t-2, \end{cases}$ 与 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z+2}{-5}$．

4．给定两异面直线
$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0} \quad 与 \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{1},$$
试求它们的公垂线的方程．

5．求下列各对直线间的角：

(1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$ 与 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{6}$；

(2) $\begin{cases}3x-4y-2z=0,\\2x+y-2z=0,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}4x+y-6z-2=0,\\y-3z+2=0.\end{cases}$

6. 设 d 和 d' 分别是坐标原点到点 $M(a, b, c)$ 和 $M'(a', b', c')$ 的距离证明当 $aa'+bb'+cc'=dd'$ 时直线 MM' 通过原点.

7. 求通过点 $P(1, 0, -2)$ 而与平面 $3x-y+2z-1=0$ 平行且与直线

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}.$$

相交的直线方程.

8. 求通过点 $P(4, 0, -1)$ 且与两直线

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\2x-y-z=2,\end{cases} \text{与} \begin{cases}x-y-z=3,\\2x+4y-z=4.\end{cases}$$

都相交的直线.

9. 求与直线 $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$ 平行且和下列给定两直线相交的直线.

(1) $\begin{cases}z=5x-6,\\z=4x+3,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}z=2x-4,\\z=3y+5;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=2t-3,\\y=3t+5,\\z=t,\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=5t+10,\\y=4t-7,\\z=t.\end{cases}$

10. 求过点 $P(2, 1, 0)$ 且与直线 $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$ 垂直相交的直线.

§3.7 空间直线与点的相关位置

空间直线与点的相关位置有着两种情况，即点在直线上与点不在直线上，点在直线上的条件是点的坐标满足直线的方程. 当点不在直线上时，我们来求点到直线的距离.

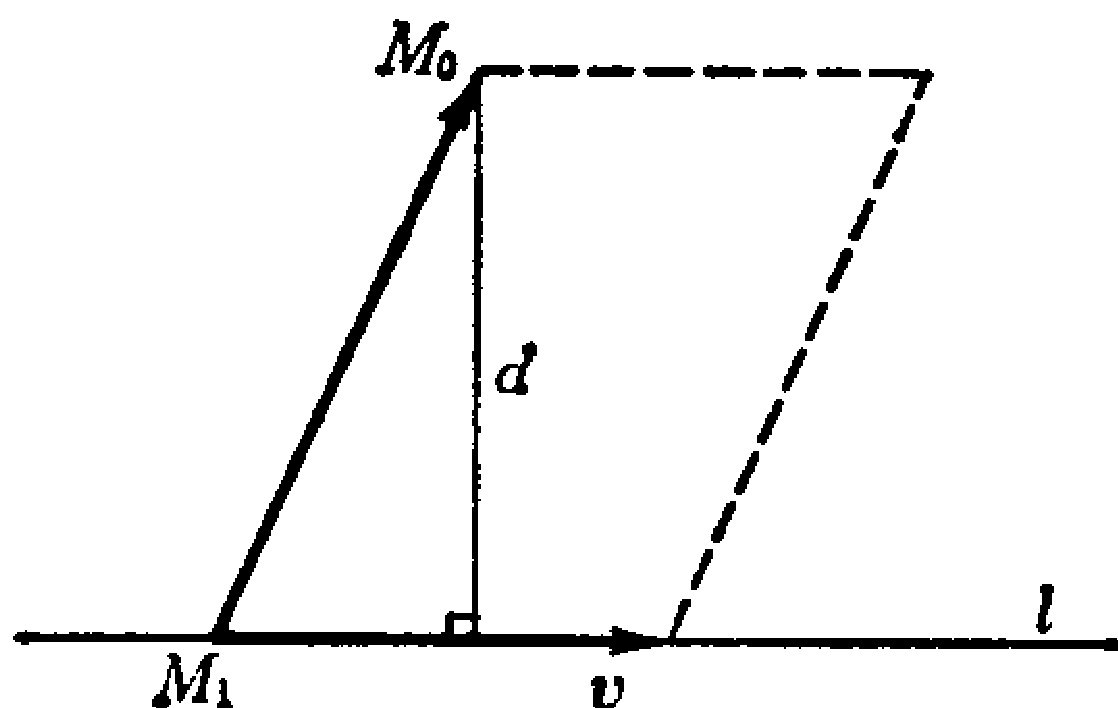


图 3-17

在空间直角坐标系下，给定空间一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 与直线

$$l:\ \frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}.$$

这里 $M_1(x_1, y_1, z_1)$为直线 l 上的一点，$\boldsymbol{v}=\{X, Y, Z\}$为直线 l 的方向矢量．我们考虑以 $\boldsymbol{v}$ 和矢量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为两边构成的平行四边形，这个平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}|$，显然点 M_0 到 l 的距离 d 就是这平行四边形的对应于以$|\boldsymbol{v}|$为底的高(图 3-17)，因此我们有

$$d=\frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{3.7-1}$$

习　题

1．直线$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$通过原点的条件是什么?

2．求点 $P(2, 3, -1)$到直线 $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 \\ 3x-2y+2z+17=0 \end{cases}$ 的距离．

§3.8 平　面　束

定义 3.8.1 空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，那条直线叫做平面束的轴．

定义 3.8.2 空间中平行于同一个平面的所有平面的集合叫做平行平面束．

定理 3.8.1 如果两个平面

$$\pi_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$

$$\pi_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{2}$$

交于一条直线 L,那么以直线 L 为轴的有轴平面束的方程是:

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{3.8-1}$$

其中 l、m 是不全为零的任意实数.

证 首先证明,当任取两不全为零的 l、m 的值时,(3.8-1)表示一个平面. 把(3.8-1)改写为

$$(lA_1+mA_2)x+(lB_1+mB_2)y+(lC_1+mC_2)z +(lD_1+mD_2)=0, \tag{3.8-1'}$$

这里的系数 lA_1+mA_2, lB_1+mB_2, lC_1+mC_2 不能全为零,这是因为如果全为零,即

$$lA_1+mA_2=0,\ lB_1+mB_2=0,\ lC_1+mC_2=0,$$

那么得
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

这和 π_1 与 π_2 是两相交平面的假设矛盾,因此(3.8-1′)是一个关于 x, y, z 的一次方程,所以(3.8-1′)或(3.8-1)表示一个平面.

因为平面 π_1 与 π_2 的交线 L 上的点的坐标同时满足方程(1)与(2),从而必满足方程(3.8-1),所以(3.8-1)总代表通过直线 L 的平面,也就是(3.8-1)总表示以直线 L 为轴的平面束中的平面.

反过来,可以证明对于以直线 L 为轴的平面束中的任意一个平面 π,我们都能确定 l, m 使平面 π 的方程为(3.8-1)的形式. 为此只要在平面 π 上选取不属于轴 L 的任一点 (x_0, y_0, z_0),那么由(3.8-1)表示的平面要通过点 (x_0, y_0, z_0) 的条件是

$$l(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+m(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0,$$

所以

$$l:m=(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2) :[-(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)],$$

而 (x_0, y_0, z_0) 不在轴 L 上,所以 $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1$,

$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2$ 不能全为零，因此平面 π 的方程可写为(3.8-1)的形式：

$$(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$
$$-(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

定理 3.8.2 如果两个平面

$$\pi_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

为平行平面，即 $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$，那么方程(3.8-1)，即

$$l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

表示平行平面束，平面束里任何一个平面都和平面 π_1 或 π_2 平行，其中 l, m 是不全为零的任意实数，且

$$-m:l\neq A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2.$$

这个定理的证明类似于定理 3.8.1，它的证明留给读者.

推论 由平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 决定的平行平面束(即与平面 π 平行的全体平面)的方程是：

$$Ax+By+Cz+\lambda=0. \qquad (3.8\text{-}2)$$

其中 λ 是任意实数.

例 1 求通过直线 $\begin{cases}2x+y-2z+1=0\\x+2y-z-2=0\end{cases}$ 且与平面 $x+y+z-1=0$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为：

$$l(2x+y-2z+1)+m(x+2y-z-2)=0,$$

即 $$(2l+m)x+(l+2m)y+(-2l-m)z+(l-2m)=0,$$

由两平面垂直的条件 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$，得

$$(2l+m)+(l+2m)+(-2l-m)=0,$$

即 $$l+2m=0,$$

因此 $$l:m=2:(-1),$$

所求平面方程为

$$2(2x+y-2z+1)-(x+2y-z-2)=0,$$

即
$$3x-3z+4=0.$$

例 2 求与平面 $3x+y-z+4=0$ 平行且在 Oz 轴上截距等于 -2 的平面方程.

解 可设所求平面方程为:

$$3x+y-z+\lambda=0,$$

因这平面在 z 轴上截距为 -2, 所以这平面通过点 $(0, 0, -2)$, 由此得:

$$2+\lambda=0,$$

$$\therefore \quad \lambda=-2,$$

因此所求方程为:

$$3x+y-z-2=0$$

例 3 试证两直线

$$l_1: \begin{cases} \pi_1: & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ \pi_2: & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases}$$

与
$$l_2: \begin{cases} \pi_3: & A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \\ \pi_4: & A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0, \end{cases}$$

在同一平面上的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0. \tag{3.8-3}$$

证 因为通过 l_1 的任意平面为

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1) \\ +\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{3}$$

其中 λ_1, λ_2 是不全为零的任意实数; 而通过 l_2 的任意平面为

$$\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)$$
$$+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0, \tag{4}$$

其中 λ_3, λ_4 是不全为零的任意实数. 因此两直线 l_1 与 l_2 在同一平面上的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1, λ_2 与 λ_3, λ_4 使(3)与(4)代表同一平面, 也就是(3)与(4)的左端仅相差一个不为零的数因子 m, 即

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$$
$$\equiv m[\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\lambda_4(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)],$$

化简整理得

$$(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2-m\lambda_3A_3-m\lambda_4A_4)x$$
$$+(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2-m\lambda_3B_3-m\lambda_4B_4)y$$
$$+(\lambda_1C_1+\lambda_2C_2-m\lambda_3C_3-m\lambda_4C_4)z$$
$$+(\lambda_1D_1+\lambda_2D_2-m\lambda_3D_3-m\lambda_4D_4)=0,$$

所以

$$\lambda_1A_1+\lambda_2A_2-m\lambda_3A_3-m\lambda_4A_4=0,$$
$$\lambda_1B_1+\lambda_2B_2-m\lambda_3B_3-m\lambda_4B_4=0,$$
$$\lambda_1C_1+\lambda_2C_2-m\lambda_3C_3-m\lambda_4C_4=0,$$
$$\lambda_1D_1+\lambda_2D_2-m\lambda_3D_3-m\lambda_4D_4=0;$$

因为 λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 不全为零, 所以得

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4 \\ B_1 & B_2 & -mB_3 & -mB_4 \\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4 \\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4 \end{vmatrix}=0,$$

而 $m\neq0$, 因此两直线 l_1 与 l_2 共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

习　题

1．求通过平面 $4x-y+3z-1=0$ 和 $x+5y-z+2=0$ 的交线且满足下列条件之一的平面:

(1) 通过原点;　　(2) 与 y 轴平行;

(3) 与平面 $2x-y+5z-3=0$ 垂直.

2．求平面束 $(x+3y-5)+\lambda(x-y-2z+4)=0$ 中在 x, y 两轴上截距相等的平面.

3．求通过直线$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面.

4．求通过直线 $\frac{x+1}{0}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-2}{-3}$ 且与点 $P(4, 1, 2)$ 的距离等于 3 的平面.

5．求与平面 $x-2y+3z-4=0$ 平行，且满足下列条件之一的平面:

(1) 通过点$(1, -2, 3)$;　　(2) 在 y 轴上截距等于 -3;

(3) 与原点距离等于 1.

6．设一平面与平面 $x+3y+2z=0$ 平行，且与三坐标平面围成的四面体体积为 6, 求这平面的方程.

7．平面上通过一点的所有直线的集合叫做中心直线束，那个点叫做直线束的中心; 具有固定方向的所有直线的集合叫做平行直线束，固定方向叫做直线束的方向．如果给定了平面上的两直线

$$L_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$L_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

试证明方程　$l(A_1x+B_1y+C_1)+m(A_2x+B_2y+C_2)=0,$

(其中 l, m 为不全为零的两任意实数)当 L_1 与 L_2 相交时，表示以 L_1 与 L_2 的交点为中心的中心直线束; 当 $L_1 /\!/ L_2$ 且 $-m:l \neq A_1:A_2=B_1:B_2$ 时，表示平行直线束，它的方向与 L_1(或 L_2)相同.

8．直线方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

的系数应满足什么条件才能使该直线在坐标平面 xOz 内.

结 束 语

本章是本课程的主要内容之一，在这一章中，我们用代数的方法定量地研究了空间最简单而又最基本的图形——平面与空间直线，建立了它们的各种形式的方程，导出了它们之间位置关系的解析表达式，以及距离，交角等计算公式。

我们在建立平面与空间直线的方程与讨论它们的性质时，充分运用了矢量这一工具，通过矢量来处理这类问题的好处是与坐标系的选取无关，也就是说在直角坐标系下与一般仿射坐标系下都是相同的。在用坐标表示的时候，对于那些有关直线，平面等的结合问题，以及相交，共线、共面等仿射性质，采取一般仿射坐标系与直角坐标系，它们的结论都是一样的，这时我们可以采用仿射坐标系，而对于那些涉及到距离、角度、面积、体积等度量问题时，为了方便，我们总是采用直角坐标系，如果读者对于使用仿射坐标系还不习惯，也可以把本章所采用的坐标系都理解为直角坐标系。

平面与空间直线方程的建立，就使得有关平面与空间直线的几何问题转化为这些几何对象的方程的代数问题了。因此，在解析几何中，确定空间的一个平面或一条直线，就意味着只要确定它的方程，而平面与空间直线的坐标式方程，总可以分别表示为(3.1-10)与(3.4-3)，所以要确定平面，只要确定方程(3.1-10)中的系数 A, B, C 与常数项 D，但是这四个参数并不是独立的，因为与方程(3.1-10)仅相差一个不为零的数因子 λ 的方程与(3.1-10)表示同一平面，因此实际上只要确定 $A:B:C:D$，所以独立的参数只有三个。在代数中，我们知道确定三个未知数需要三个独立的方程，每一个方程就是一个代数条件，因此确定一个平面需要三个独立的代数条件。对于直线来说，因为(3.4-3)总能化成

射影式(3.4-12)，这时只要四个参数 a, b, c, d 确定了，直线方程也就一定了，因此确定一条空间直线需要四个独立的代数条件.

在这里还要指出，初等几何中所说的确定一个平面或一条直线的条件，都是指的几何条件，如三个不共线的点确定一个平面，两点确定一条直线等，而确定一个平面或一条空间直线的几何条件数并不一定等于其代数条件数，也就是说每一个几何条件未必一定转化为一个代数条件. 例如"两点 P_1, P_2 确定一条直线"的几何条件是两个，即所求直线通过 P_1 与所求直线通过 P_2，但转化为代数条件却是四个了，这是因为如果设 P_1 与 P_2 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 与 (x_2, y_2, z_2) 那么过 P_1 点的条件即为 P_1 的坐标满足方程(3.4-12)，即有

$$x_1=az_1+c,$$
$$y_1=bz_1+d,$$

这就转化为两个代数条件了. 同样，所求直线过 P_2 的几何条件，也转化为两个代数条件

$$x_2=az_2+c,$$
$$y_2=bz_2+d.$$

这样由上面的四个代数条件，就能确定 a, b, c, d 四个参数，从而直线方程也就确定了，因此我们说确定一条空间直线的几何条件是两个，而独立的代数条件却是四个.

第四章　柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

我们已经讨论了平面与空间直线，这一章我们将介绍柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面．在这些曲面中，有的具有较为突出的几何特征，有的在方程上却表现出特殊的简单形式，对于前者，我们就从图形出发，去讨论曲面的方程；而对于后者，我们将从它的方程去研究它的图形．

§4.1　柱　　面

定义 4.1.1　在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所产生的曲面叫做*柱面*，定方向叫做柱面的*方向*，定曲线叫做柱面的*准线*，那族平行直线中的每一条直线，都叫做柱面的*母线*．

设柱面的准线方程为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0, \end{cases} \tag{1}$$

母线的方向数为 X, Y, Z．如果 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为准线上的任意点，那么过点 M_1 的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}; \tag{2}$$

且有

$$F_1(x_1, y_1, z_1)=0, \quad F_2(x_1, y_1, z_1)=0. \tag{3}$$

(2) 与 (3) 两组式子共有四个等式，从这四个等式消去参数 x_1, y_1, z_1 最后得一个三元方程

$$F(x, y, z)=0.$$

这就是以(1)为准线，母线的方向数为 X, Y, Z 的柱面方程.

例 1 柱面的准线方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ 2x^2+2y^2+z^2=2,\end{cases}$$

而母线的方向数是 -1, 0, 1，求这柱面的方程.

解 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$是准线上的点，那么过 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 的母线为

$$\frac{x-x_1}{-1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1};$$

且有

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=1, \tag{4}$$

$$2x_1^2+2y_1^2+z_1^2=2. \tag{5}$$

再设

$$\frac{x-x_1}{-1}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}=t.$$

那么

$$x_1=x+t, \quad y_1=y, \quad z_1=z-t, \tag{6}$$

(6)代入(4)及(5)得:

$$(x+t)^2+y^2+(z-t)^2=1, \tag{7}$$

$$2(x+t)^2+2y^2+(z-t)^2=2; \tag{8}$$

以 2 乘(7)再减去(8)，得

$$(z-t)^2=0,$$

所以

$$t=z, \tag{9}$$

(9)代入(7)或(8)，即得所求的柱面方程为

$$(x+z)^2+y^2=1,$$

即

$$x^2+y^2+z^2+2xz-1=0.$$

例 2 已知圆柱面的轴为 $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}$，点$(1, -2, 1)$

在此圆柱面上,求这个圆柱面的方程.

解法一 因为圆柱面的母线平行于其轴,所以母线的方向数即为轴的方向数1,-2,-2.如果能求出圆柱面的准线圆,那么再运用例1的解法,问题也就解决了.

因为空间的圆,总可以看成是某一球面与某一平面的交线,这里的圆柱面的准线圆,可以看成是以轴上的点$(0, 1, -1)$为中心,点$(0, 1, -1)$到已知点$(1, -2, 1)$的距离$d=\sqrt{14}$为半径的球面$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14$与过已知点$(1, -2, 1)$且垂直于轴的平面$x-2y-2z-3=0$的交线,即准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=14, \\ x-2y-2z-3=0. \end{cases} \tag{10}$$

再设(x_1, y_1, z_1)为准线圆(10)上的点,那么有

$$x_1^2+(y_1-1)^2+(z_1+1)^2=14,$$

$$x_1-2y_1-2z_1-3=0,$$

且过(x_1, y_1, z_1)的母线为

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{-2}=\frac{z-z_1}{-2},$$

由上四式消去参数x_1,y_1,z_1即得所求的圆柱面的方程为

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

圆柱面是一种特殊的柱面,在特殊的情况下,除了一般解法外,往往还有其他特殊的解法.

如果将圆柱面看成是动点到轴线等距离点的轨迹,这里的距离就是圆柱面的半径,那么例2就有下面的第二种解法.

解法二 因为轴的方向矢量为$\boldsymbol{v}=\{1, -2, -2\}$,轴上的定点为$M_0(0, 1, -1)$,而圆柱面上的点为$M_1(1, -2, 1)$,所以$\overrightarrow{M_0M_1}=\{1, -3, 2\}$,因此点$M_1(1, -2, 1)$到轴的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{117}}{3},$$

再设 $M(x,\ y,\ z)$ 为圆柱面上的任意点，那么有

$$\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{\sqrt{117}}{3},$$

即

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y-1 & z+1\\ -2 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z+1 & x\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x & y-1\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{117}}{3},$$

化简整理得所求圆柱面的方程为

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz-18y+18z-99=0.$$

习　　题

1. 已知柱面的准线为

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$$

且(1)母线平行于 x 轴；(2)母线平行于直线 $x=y,\ z=c$，试求这些柱面的方程.

2. 设柱面的准线为 $\begin{cases}x=y^2+z^2\\ x=2z\end{cases}$，母线垂直于准线所在的平面，求这柱面的方程.

3. 求过三条平行直线 $x=y=z,\ x+1=y=z-1$ 与 $x-1=y+1=z-2$ 的圆柱面的方程.

4. 已知柱面的准线为 $\boldsymbol{r}(u)=\{x(u),\ y(u),\ z(u)\}$，母线的方向平行于矢量 $\boldsymbol{s}=\{X,\ Y,\ Z\}$，试证明柱面的矢量式参数方程与坐标式参数方程分别为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{s},$$

与

$$\begin{cases}x=x(u)+Xv,\\ y=y(u)+Yv,\\ z=z(u)+Zv.\end{cases}$$

式中 u, v 为参数.

§4.2 锥 面

定义 4.2.1 在空间，通过一定点且与定曲线相交的一族直线所产生的曲面叫做*锥面*，这些直线都叫做锥面的*母线*，那个定点叫做锥面的*顶点*，定曲线叫做锥面的*准线*。

设锥面的准线为

$$\begin{cases}F_1(x,\ y,\ z)=0,\\ F_2(x,\ y,\ z)=0,\end{cases}\tag{1}$$

顶点为 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$，如果 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$为准线上的任意点，那么锥面过点 M_1 的母线为：

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0},\tag{2}$$

且有

$$F_1(x_1,\ y_1,\ z_1)=0,\quad F_2(x_1,\ y_1,\ z_1)=0,\tag{3}$$

从(2),(3)四个等式消去参数 x_1, y_1, z_1,最后可得一个三元方程

$$F(x,\ y,\ z)=0.$$

这就是以(1)为准线,A 为顶点的锥面方程。

例 1 锥面的顶点在原点,且准线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c\end{cases}$$

求锥面的方程.

解 设 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$为准线上的任意点，那么过 M_1的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1} \tag{4}$$

且有

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \tag{5}$$

$$z_1=c, \tag{6}$$

由(4),(6)得

$$x_1=c\,\frac{x}{z},\quad y_1=c\,\frac{y}{z}, \tag{7}$$

(7)代入(5)得所求的锥面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{4.2-1}$$

这个锥面叫做二次锥面.

显然,锥面的准线不是唯一的,和一切母线都相交的每一条曲线,都可以作为它的准线.

例 2 已知圆锥面的顶点为(1, 2, 3), 轴垂直于平面 $2x+2y-z+1=0$, 母线与轴组成 30° 角. 试求这圆锥的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 为任一母线上的点,那么过M 点的母线的方向矢量为

$$\boldsymbol{v}=\{x-1,\ y-2,\ z-3\},$$

而在直角坐标系下,圆锥的轴线的方向即为平面 $2x+2y-z+1=0$ 的法方向,即为

$$\boldsymbol{n}=\{2,\ 2,\ -1\},$$

根据题意有
$$\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\pm\cos 30°,$$

即
$$\frac{2(x-1)+2(y-2)-(z-3)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简整理得所求的圆锥面的方程为

$$11(x-1)^2+11(y-2)^2+23(z-3)^2-32(x-1)(y-2)$$
$$+16(x-1)(z-3)+16(y-2)(z-3)=0.$$
这是一个关于 $x-1$, $y-2$, $y-3$ 的齐次方程.

因为圆锥面是一种特殊的锥面，上面的解法是一种适合于圆锥面的特殊的方法，至于先求出圆锥面的准线，利用顶点与准线求锥面的一般方法，留给读者去完成.

下面我们来证明一个关于锥面的定理.

定理 4.2.1 一个关于 x, y, z 的齐次方程①总表示顶点在坐标原点的锥面.

证 设关于 x, y, z 的齐次方程为

$$F(x, y, z)=0, \tag{8}$$

那么根据齐次方程的定义有

$$F(tx, ty, tz)=t^\lambda F(x, y, z),$$

所以当 $t=0$ 时，有

$$F(0, 0, 0)=0,$$

因此曲面过原点.

再设非原点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足(8)，即有 $F(x_0, y_0, z_0)=0$，那么直线 OM_0 的方程为

$$\begin{cases} x=x_0t, \\ y=y_0t, \\ z=z_0t, \end{cases}$$

代入 $F(x, y, z)=0$ 得

$$F(x_0t, y_0t, z_0t)=t^\lambda\cdot F(x_0, y_0, z_0)=0,$$

---

① 设 λ 为实数，对于函数 $f(x, y, z)$，如果有

$$f(tx, ty, tz)=t^\lambda f(x, y, z),$$

这里 t 的取值应当使 t^λ 有确定的意义，那么 $f(x, y, z)$ 叫做 λ 次齐次函数，$f(x, y, z)=0$ 叫做 λ 次齐次方程. 这个定义可以推广到 n 个变量的情况.

所以整条直线都在曲面上，因此曲面(8)是由这种通过坐标原点的直线组成，即它是以原点为顶点的锥面。

在特殊的情况下，关于 x, y, z 的齐次方程可能只表示一个原点，这就是说除原点外，曲面上再也没有别的实点，例如

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

这样的曲面，我们又常常把它叫做具有实顶点的虚锥面

推论 关于 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 的齐次方程表示顶点在 (x_0, y_0, z_0) 的锥面①。

习题

1. 求顶点为原点，准线为 $x^2-2z+1=0$, $y-z+1=0$ 的锥面方程.

2. 已知锥面的顶点为$(3, -1, -2)$，准线为 $x^2+y^2-z^2=1$, $x-y+z=0$，试求它的方程.

3. 求以三坐标轴为母线的圆锥面的方程.

4. 求顶点为$(1, 2, 4)$，轴与平面 $2x+2y+z=0$ 垂直，且经过点$(3, 2, 1)$的圆锥面的方程.

5. 已知锥面的准线为 $\boldsymbol{r}(u)=\{x(u), y(u), z(u)\}$，顶点 A 决定的径矢为 $\boldsymbol{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$，试证明锥面的矢量式参数方程与坐标式参数方程分别为

$$\boldsymbol{r}=v\boldsymbol{r}(u)+(1-v)\boldsymbol{r}_0,$$

与

$$\begin{cases}x=vx(u)+(1-v)x_0,\\ y=vy(u)+(1-v)y_0,\\ z=vz(u)+(1-v)z_0,\end{cases}$$

式中的 u, v 为参数.

§4.3 旋转曲面

定义 4.3.1 在空间，一条曲线 Γ 绕着定直线 l 旋转一周所产生的曲面叫做旋转曲面，或称回转曲面. 曲线 Γ 叫做旋转曲面的母线，定直线 l 叫做旋转曲面的旋转轴，简称为轴。

① 利用§1.5习题4读者容易证明这个推论。

显然，旋转曲面的母线 Γ 上的任意点 M_1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是通过点 M_1 且垂直于轴 l 的平面与旋转曲面的交线，我们把它叫做纬圆或称纬线．在通过旋转轴 l 的平面上，以 l 为界的每个半平面都与曲面交成一条曲线，这些曲线显然在旋转中都能彼此重合，这曲线叫做旋转面的经线．

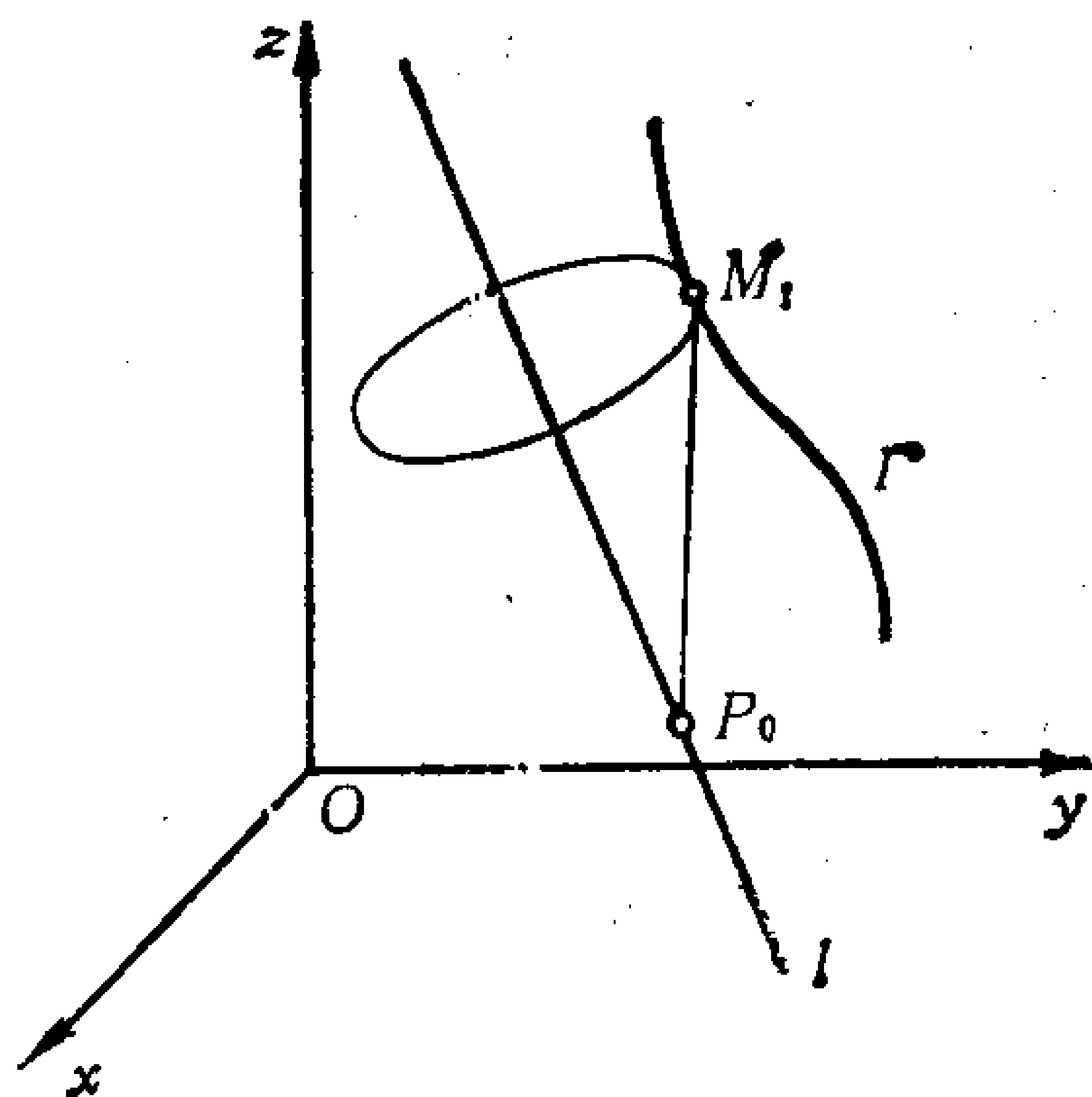


图 4-1

现在来求旋转曲面的方程．

在空间直角坐标系下，设旋转曲面的母线为

$$\Gamma:\quad \begin{cases} F_1(x,\ y,\ z)=0, \\ F_2(x,\ y,\ z)=0; \end{cases} \tag{1}$$

旋转轴为直线

$$l:\quad \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}, \tag{2}$$

这里 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为轴 l 上的一个定点，$X,\ Y,\ Z$ 为旋转轴 l 的方向数．

设 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 是母线 Γ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆总可以看成是过 M_1 且垂直于旋转轴 l 的平面与以 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为中心，$|\overrightarrow{P_0M_1}|$ 为半径的球面的交线，所以过 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 的纬圆的方程为：

$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, & (3) \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ \quad =(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2; & (4) \end{cases}$$

当点 M_1 跑遍整个母线 Γ 时，就得出旋转曲面的所有纬圆，这些

纬圆，生成旋转曲面.

又由于 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 在母线 Γ 上，所以又有

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1)=0, & (5) \\ F_2(x_1, y_1, z_1)=0. & (6) \end{cases}$$

从(3), (4), (5), (6)四个等式消去参数 x_1, y_1, z_1 最后得一个三元方程.

$$F(x, y, z)=0.$$

这就是以(1)为母线，(2)为旋转轴的旋转曲面的方程.

例 1 求直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{0}$ 绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

解 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是母线上的任意点，因为旋转轴通过原点，所以过 M_1 的纬圆方程是

$$\begin{cases} (x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)=0, & (7) \\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2; & (8) \end{cases}$$

由于 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 在母线上，所以又有

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0},$$

即

$$x_1=2y_1, \quad z_1=1; \tag{9}$$

由(7), (8), (9)三式消去 x_1, y_1, z_1 得所求旋转曲面为

$$x^2+y^2+z^2-1=\frac{5}{9}(x+y+z-1)^2,$$

即 $$2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+xz+yz)+5(x+y+z)-7=0.$$

由于旋转曲面的经线，总可以作为最初的母线来产生旋转曲面. 因此为了方便，今后总是取旋转曲面的某一条经线(显然是平面曲线)作为旋转曲面的母线. 在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，我们又常把母线所在平面取作坐标面而旋转轴取做坐标

轴，这时旋转曲面的方程具有特殊的形式。

设旋转曲面的母线为

$$\Gamma:\quad \begin{cases} F(y,\ z)=0, \\ x=0. \end{cases} \tag{10}$$

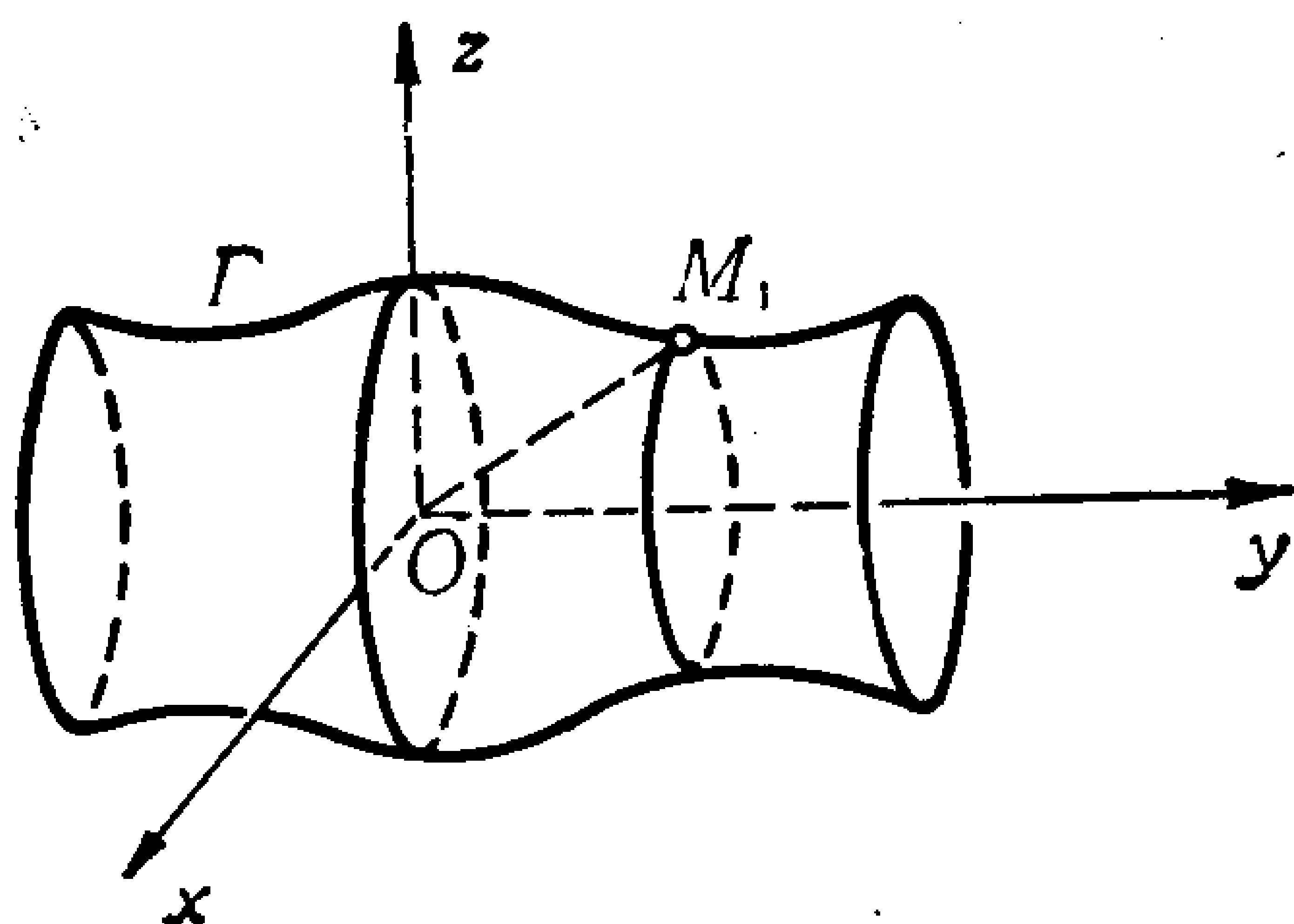


图 4-2

旋转轴为 y 轴

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}, \tag{11}$$

如果 $M_1(0,\ y_1,\ z_1)$为母线 Γ 上的任意点，那么过 M_1 的纬圆为

$$\begin{cases} y-y_1=0, & (12) \\ x^2+y^2+z^2=y_1^2+z_1^2; & (13) \end{cases}$$

且有

$$F(y_1,\ z_1)=0, \tag{14}$$

从(12),(13),(14)三式消去参数 $y_1,\ z_1$ 得所求旋转曲面的方程为

$$F(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0. \tag{15}$$

同样，把曲线 Γ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面的方程是

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0. \tag{16}$$

对于其他坐标面上的曲线，绕坐标轴旋转所得的旋转曲面，其方程可以类似的求出，这样我们就得出如下的规律：

当坐标平面上的曲线 Γ 绕此坐标平面里的一个坐标轴旋转时，为了求出这样的旋转曲面的方程，只要将曲线 Γ 在坐标面里的方程保留和旋转轴同名的坐标，而以其他两个坐标平方和的平方根来代替方程中的另一坐标。

例 2 将椭圆

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad (a>b)\\ z=0,\end{cases} \tag{17}$$

分别绕长轴(即 x 轴)与短轴(即 y 轴)旋转，求所得旋转曲面的方程。

解 因为旋转轴是 x 轴，同名坐标就是 x，在方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中保留坐标 x 不变，用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代 y，便得将椭圆(17)绕其长轴(即 x 轴)旋转的曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{4.3-1}$$

同样将椭圆(17)绕其短轴(即 y 轴)旋转的曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1. \tag{4.3-2}$$

曲面(4.3-1)叫做长形旋转椭球面(图 4-3)，曲面(4.3-2)叫做扁

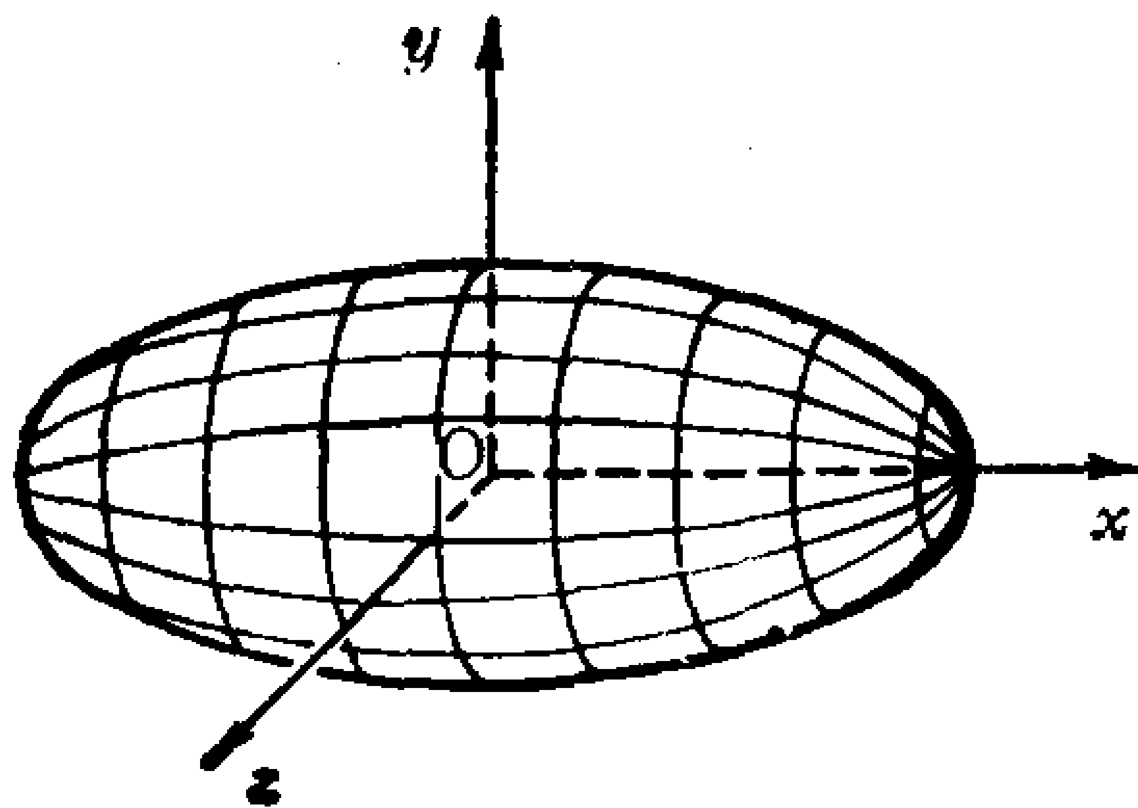


图 4-3

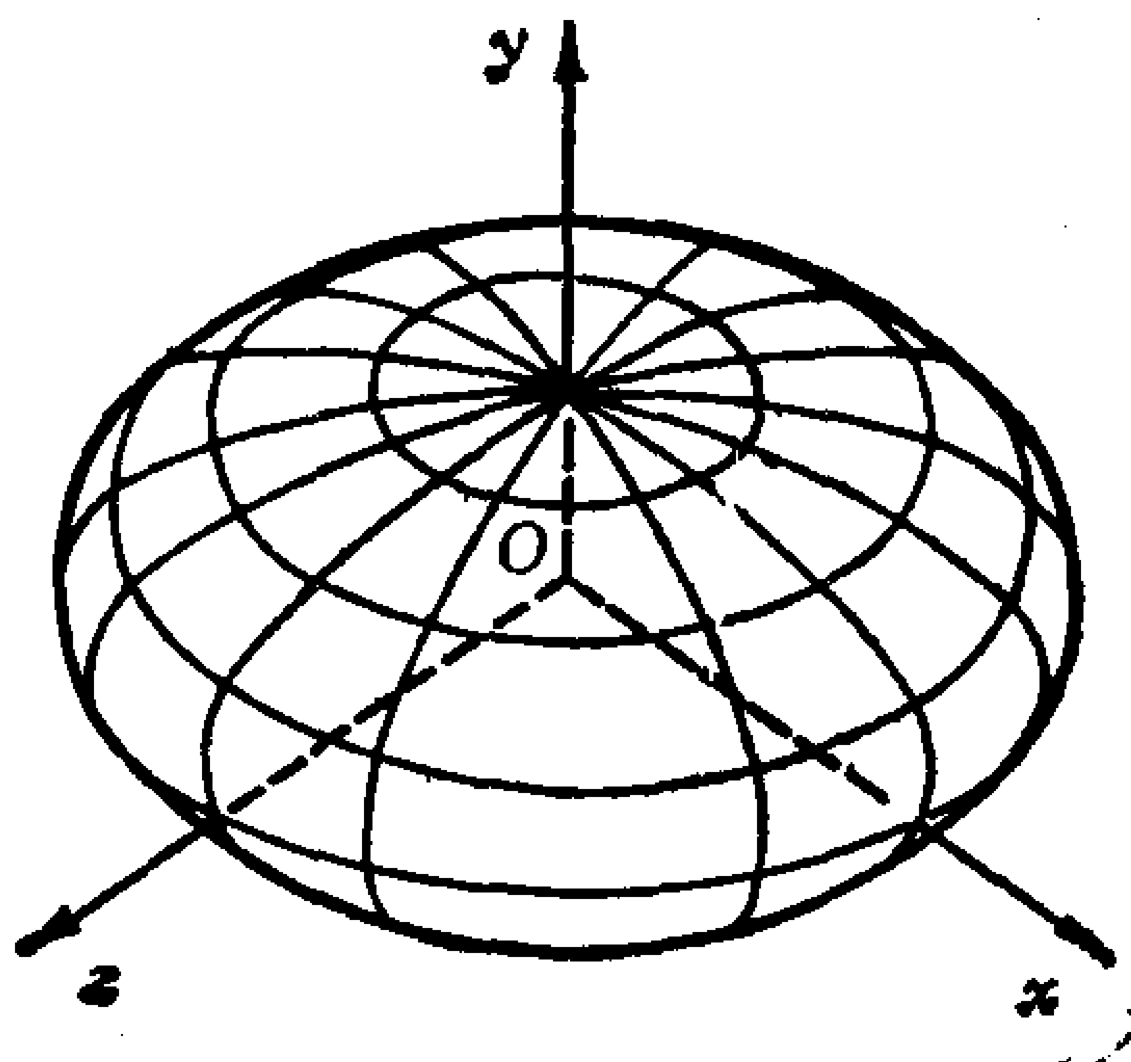


图 4-4

形旋转椭球面(图 4-4)。

例 3 将双曲线

$$\Gamma: \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases} \tag{18}$$

绕虚轴(即 z 轴)旋转的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \tag{4.3-3}$$

绕实轴(即 y 轴)旋转的旋转曲面方程为

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4.3-4}$$

曲面(4.3-3)叫做单叶旋转双曲面(图 4-5),曲面(4.3-4)叫做双叶旋转双曲面(图 4-6)。

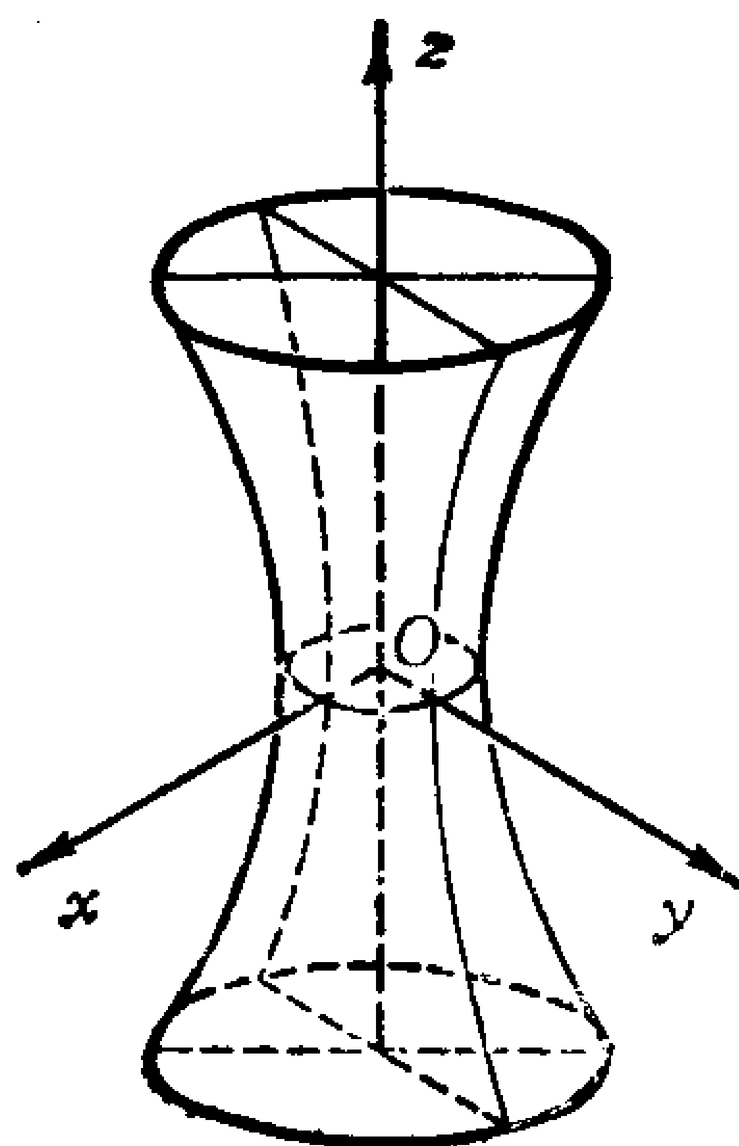


图 4-5

例 4 将抛物线

$$\Gamma: \quad \begin{cases} y^2=2pz, \\ x=0 \end{cases} \tag{19}$$

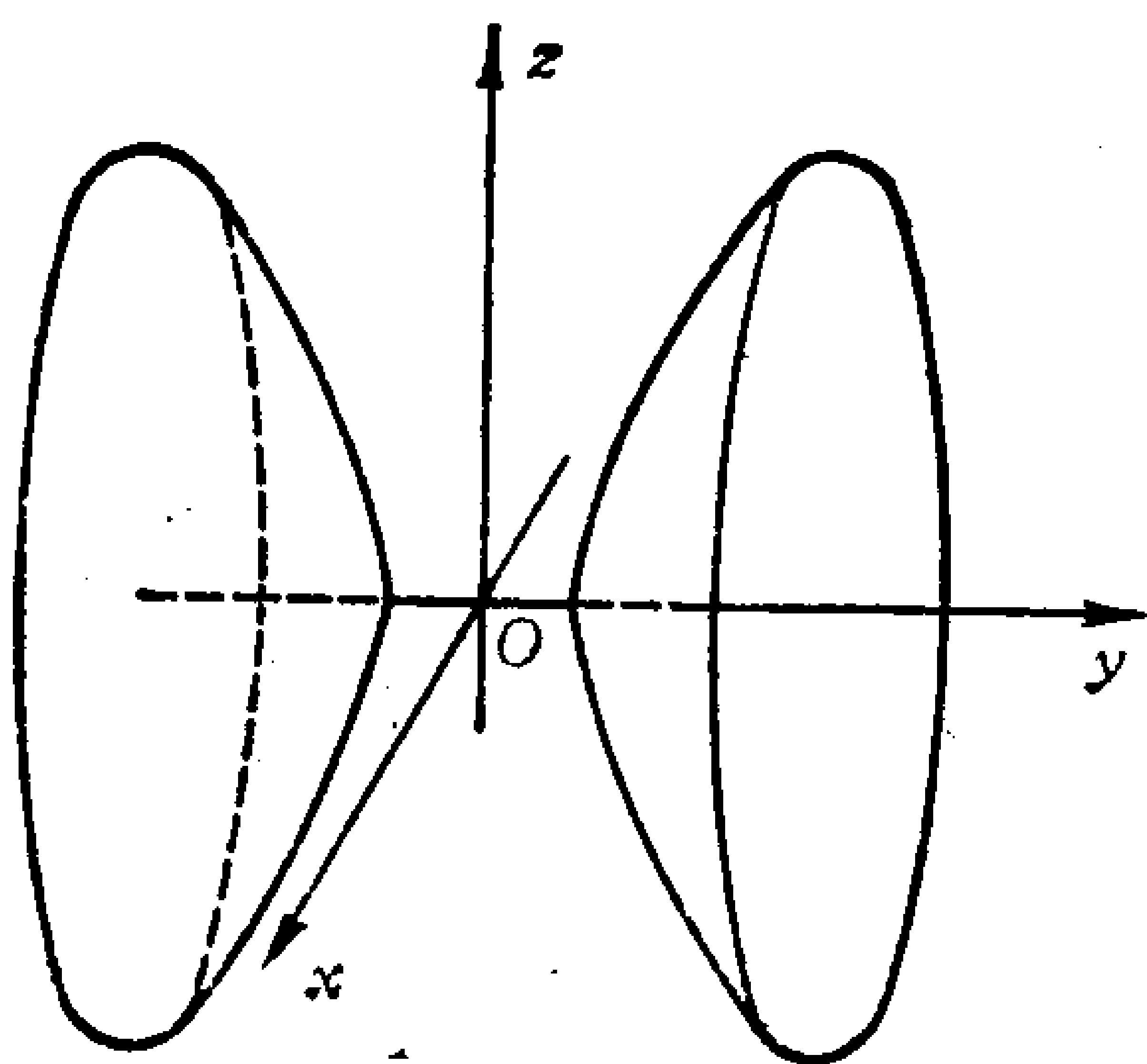


图 4-6

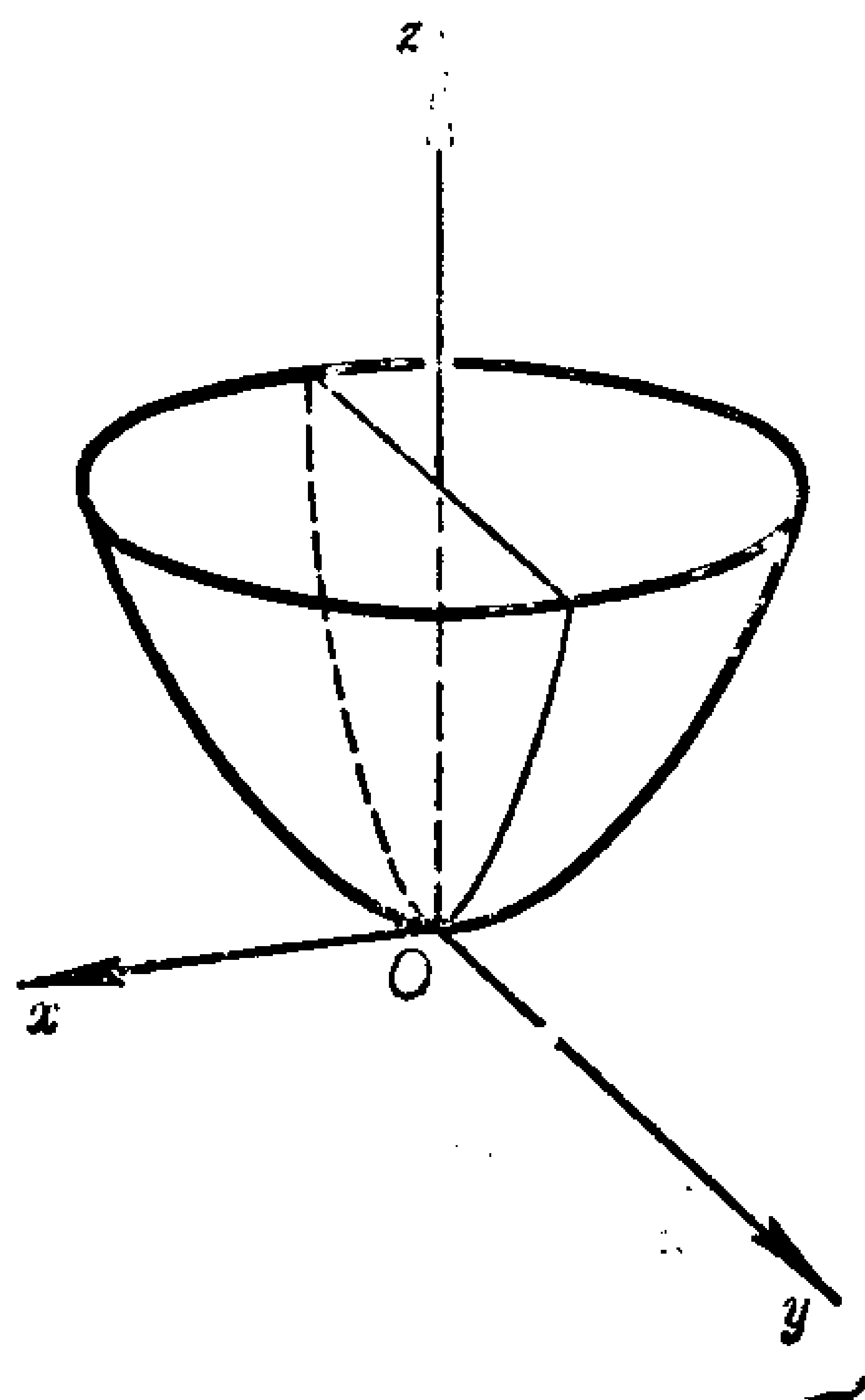


图 4-7

绕它的对称轴旋转的旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=2pz. \tag{4.3-5}$$

曲面(4.3-5)叫做*旋转抛物面*(图 4-7).

例 5 将圆

$$\Gamma: \quad \begin{cases}(y-b)^2+z^2=a^2, & (b>a>0)\\ x=0\end{cases} \tag{20}$$

绕 z 轴旋转,求所得旋转曲面的方程.

解 因为绕 z 轴旋转,所以在方程$(y-b)^2+z^2=a^2$ 中保留 z 不变,而 y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代,就得将圆(20)绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2,$$

即
$$x^2+y^2+z^2+b^2-a^2=\pm 2b\sqrt{x^2+y^2},$$

或
$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(x^2+y^2).$$

这样的曲面叫做*环面*(图 4-8),它的形状象救生圈.

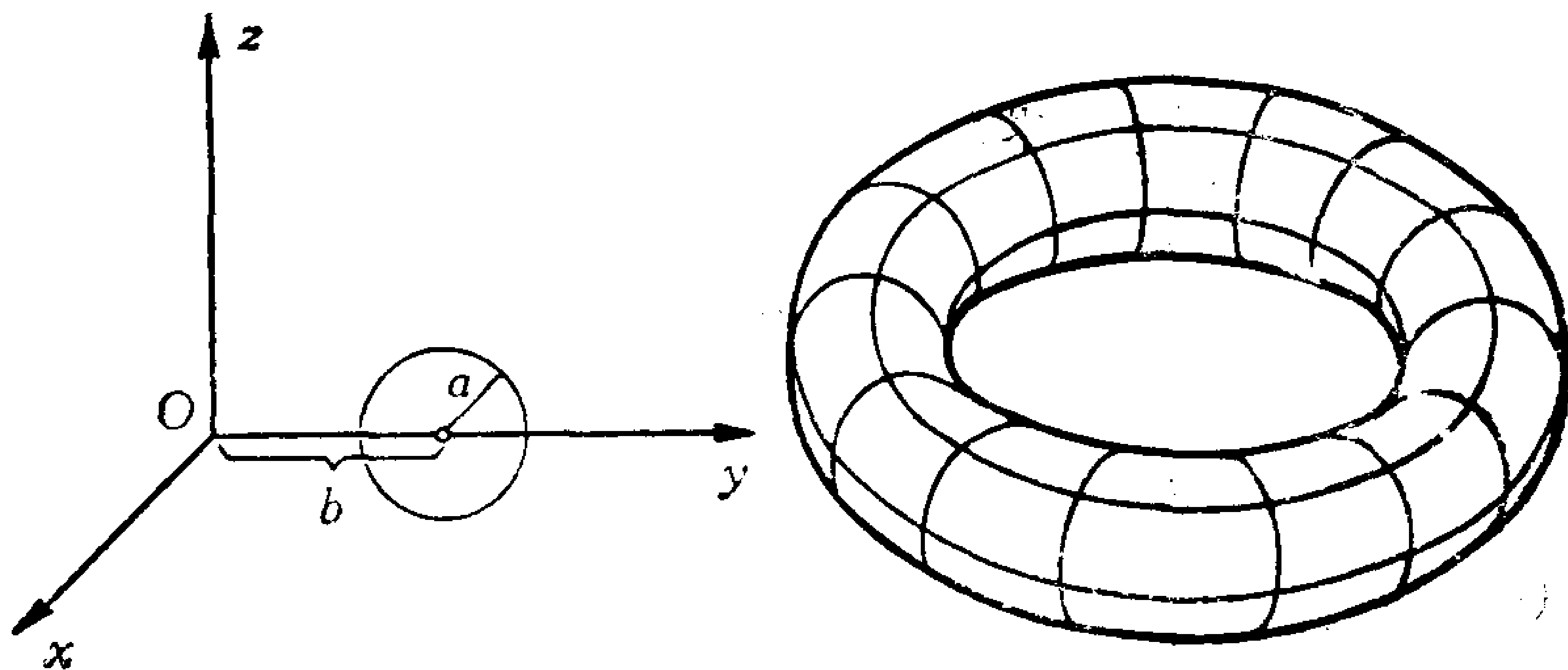


图 4-8

习 题

1. 求下列旋转曲面的方程:

(1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 旋转；

(2) $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 绕 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ 旋转；

(3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$ 绕 z 轴旋转；

(4) 空间曲线

$$\begin{cases} z=x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转.

2. 将直线 $\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转，求这旋转曲面的方程，并就 α 和 β 可能的值讨论这是什么曲面?

3. 已知曲线 Γ 的参数方程为：$x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$，将曲线 Γ 绕 z 轴旋转，求旋转曲面的参数方程.

§4.4 椭 球 面

定义 4.4.1 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.4-1}$$

所表示的曲面叫做**椭球面**，或称椭圆面，方程(4.4-1)叫做椭球面的标准方程，其中 a, b, c 为任意的正常数，通常假定 $a \geqslant b \geqslant c$.

现在我们从方程(4.4-1)出发来讨论椭球面的一些最简单的性质.

因为方程(4.4-1)仅含有坐标的平方项，可见当(x, y, z)满足(4.4-1)时，点$(\pm x, \pm y, \pm z)$也一定满足，其中正负号可任意选取，所以椭球面(4.4-1)关于三坐标平面，三坐标轴与坐标原点都对称. 椭球面的对称平面，对称轴与对称中心分别叫做它的**主平面**，**主轴**与**中心**. 椭球面(4.4-1)与它的三对称轴即坐标轴的交点分别为$(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$，这六个点叫做椭球面(4.4-1)的**顶点**. 同一条对称轴上的两顶点间的线段以及它们的长

度 $2a$, $2b$ 与 $2c$ 叫做椭球面(4.4-1)的**轴**，轴的一半，即中心与各顶点间的线段及它们的长度 a, b 与 c 叫做椭球面(4.4-1)的**半轴**，当 $a>b>c$ 时, $2a$, $2b$ 与 $2c$ 分别叫做椭球面(4.4-1)的**长轴**, **中轴**与**短轴**, 而 a, b 与 c 分别叫做椭球面的**长半轴**，**中半轴**与**短半轴**。显然任何两轴相等的椭球面一定是旋转椭球面，而三轴相等的椭球面就是球面. 例如当 $a>b=c$ 时，方程(4.4-1)就变成(4.3-1)，它是一个长形旋转椭球面；当 $a=c>b$，方程(4.4-1)就变成(4.3-2)，它是一个扁形旋转椭球面；而当 $a=b=c$ 时，方程(4.4-1)就变成(2.2-2)，它是一个球面. 所以旋转椭球面与球面都是椭球面(4.4-1)的特例. 椭球面(4.4-1)当三轴不等时，叫做**三轴椭球面**.

因为椭球面(4.4-1)上的任何一点的坐标 (x, y, z) 总有

$$|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c,$$

因此椭球面完全被封闭在一个长方体的内部，这个长方体由六个平面: $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$ 所组成.

为了能够看出曲面的大致形状，我们考虑曲面与一组平行平面的交线，这些交线都是平面曲线，当我们对这些平面曲线的形状都已清楚时，曲面的大致形状也就看出来了，这就是所谓利用平行平面的截口来研究曲面图形的方法①，简称为**平行截割法**，为了方便起见，常取与坐标面平行的一组平面.

如果用坐标面 $z=0$, $y=0$, $x=0$ 分别来截割椭球面(4.4-1)，那么所得截口都是椭圆(图 4-8)，它们的方程分别是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\tag{2}$$

---

① 这里的截口指的是曲面与平面的交线.

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0,\end{cases} \tag{3}$$

椭圆(1)，(2)，(3)叫做椭球面(4.4-1)的主截线(或主椭圆).

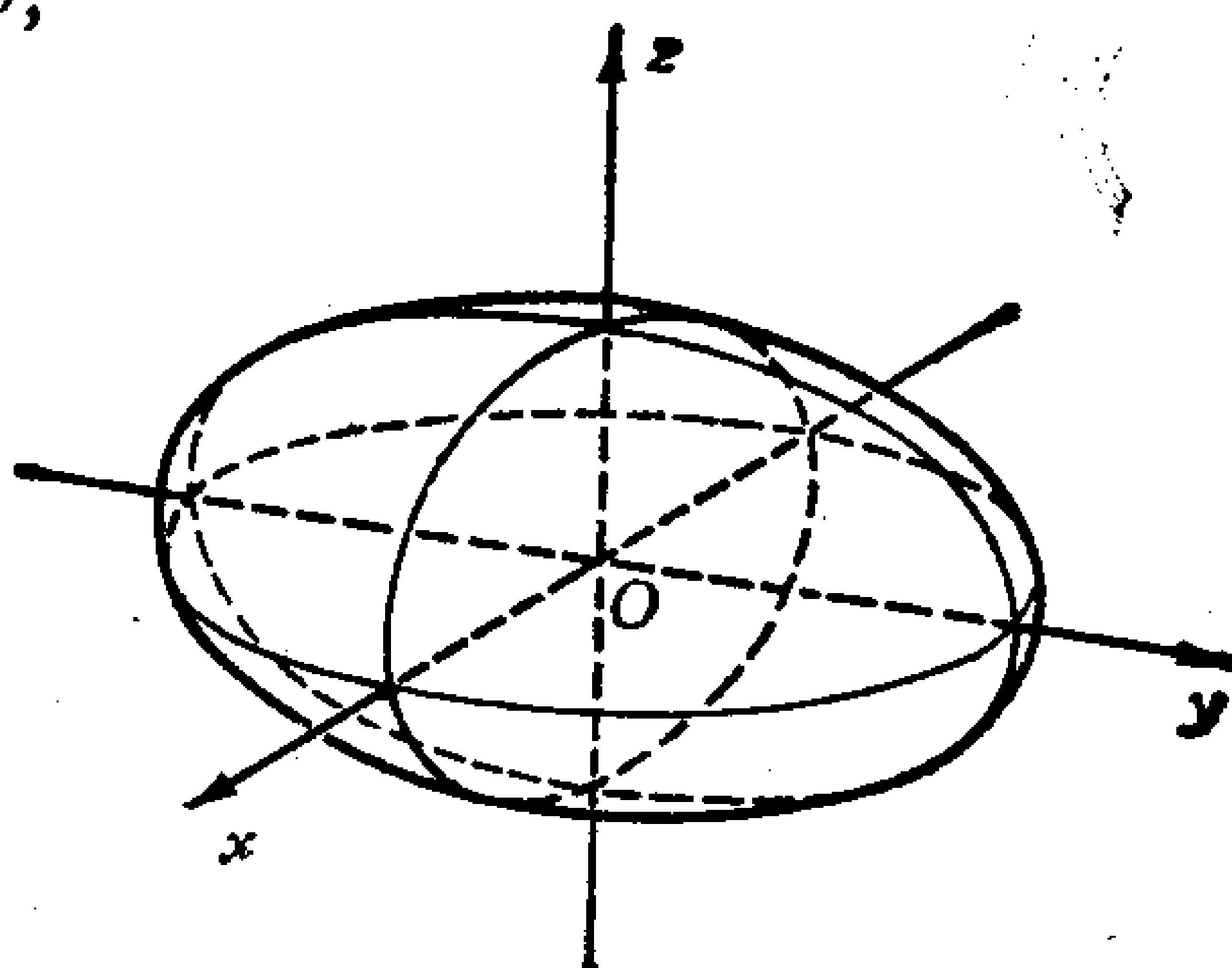


图 4-9

以下我们不妨取平行于 xOy 坐标面的一组平行平面来截割椭球面(4.4-1)，因为用平行于其它坐标面的平面来截割，情况类似. 以平面 $z=h$ 截割(4.4-1)，得到的截线方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h,\end{cases} \tag{4}$$

当 $|h|>c$ 时，(4)无图形，这表示平面 $z=h$ 与椭球面(4.4-1)不相交；当 $|h|=c$ 时，(4)的图形是平面 $z=h$ 上的一个点 $(0, 0, c)$ 或 $(0, 0, -c)$；当 $|h|<c$ 时，(4)的图形是一个椭圆，这个椭圆的两半轴分别是

$$a\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right) \text{ 及 } b\left(\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right),$$

它的两轴的端点分别是 $\left(\pm a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与 $\left(0, \pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$，容易知道两轴的端点分别在椭圆(2)与(3)上(图 4-9). 这样，椭球面(4.4-1)可以看成是由一个椭圆的变动(大小位置都改变)而产生的，这个椭圆在变动中保持所在平面与 xOy 面平行，且两轴的端点分别在另外两个定椭圆(2)与(3)上滑动.

图 4-9 是椭球面(4.4-1)的图形.

椭球面的方程除了用标准方程(4.4-1)来表达外，有时也用参数方程

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi, \\ y=b\sin\theta\sin\varphi, \\ z=c\cos\theta \end{cases} \tag{4.4-2}$$

来表达，其中 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$, $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 为参数. 如果从(4.4-2)式中消去参数 θ, φ, 那么就得(4.4-1).

例 已知椭球面的轴与坐标轴重合，且通过椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, $z=0$ 与点 $M(1,\ 2,\ \sqrt{23})$，求这个椭球面的方程.

解 因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合，所以设所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

它与 xOy 面的交线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0, \end{cases}$$

与已知椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1, \\ z=0 \end{cases}$$

比较知

$$a^2=9,\quad b^2=16.$$

又因为椭球面通过点 $M(1,\ 2,\ \sqrt{23})$，所以又有

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1$$

$$\therefore \qquad c^2=36,$$

因此所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1.$$

习　题

1．作出平面 $x-2=0$ 与椭球面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ 的交线的图形.

2．设动点与点(1, 0, 0)的距离等于从这点到平面 $x=4$ 的距离的一半，试求此动点的轨迹.

3．由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心(即原点)，沿某一定方向到曲面上的一点的距离是 r，设定方向的方向余弦分别为 λ, μ, ν，试证：

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}.$$

4．由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心，引三条两两相互垂直的射线，分别交曲面于点 P_1, P_2, P_3，设 $OP_1=r_1$, $OP_2=r_2$, $OP_3=r_3$，试证：

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

5．一直线分别交坐标面 yOz, zOx, xOz 于三点 A、B、C. 当直线变动时，直线上的三定点 A, B, C 也分别在三个坐标面上变动，另外直线上有第四点 P，它与 A, B, C 三点的距离分别为 a, b, c，当直线按照这样的规定(即保持 A, B, C 分别在三坐标面上)变动，试求 P 点的轨迹.

6．已知椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(c<a<b)$，试求过 x 轴并与曲面的交线是圆的平面.

§4.5　双　曲　面

1．单叶双曲面

定义 4.5.1　在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.5-1}$$

所表示的曲面叫做**单叶双曲面**，方程(4.5-1)叫做**单叶双曲面的标准方程**，其中 a, b, c 是任意的正常数.

显然，单叶双曲面(4.5-1)与椭球面(4.4-1)一样，它关于三坐标平面，三坐标轴以及坐标原点都对称.

双曲面(4.5-1)与 z 轴不相交，与 x 轴与 y 轴分别交于点 $(\pm a, 0, 0)$ 与 $(0, \pm b, 0)$，这四点叫做单叶双曲面的顶点。

如果用三个坐标平面 $z=0$，$y=0$，$x=0$ 分别截割曲面(4.5-1)，那么所得的截线顺次为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases} \tag{3}$$

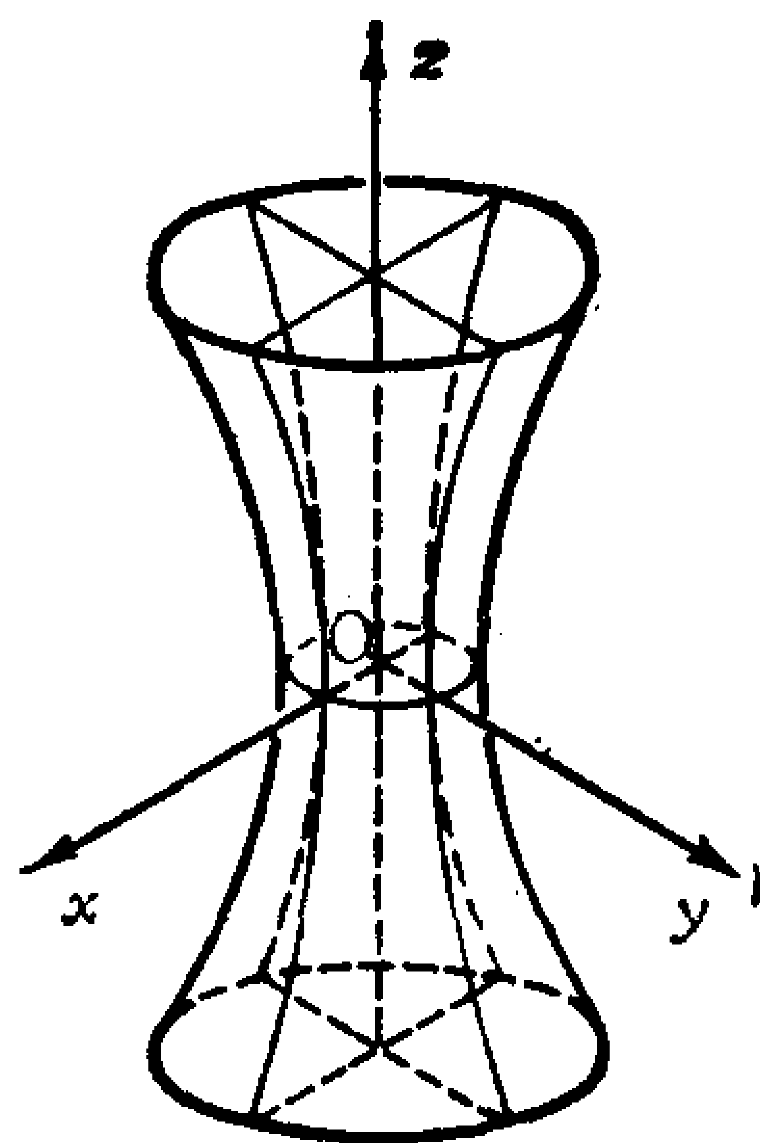


图 4-10

(1)为 xOy 面上的椭圆，叫做单叶双曲面的腰椭圆；(2)与(3)分别为 xOz 面与 yOz 面上的双曲线，这两条双曲线有着共同的虚轴与虚轴长(图 4-10)。

当我们用一组平行平面 $z=h$(h 可为任意实数)来截割单叶双曲面(4.5-1)，便得到椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases} \tag{4}$$

它的两半轴分别是 $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ 与 $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$，两轴的端点分别为 $\left(\pm a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, 0, h\right)$ 与 $\left(0, \pm b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}, h\right)$，容易知道这两对端点分别在双曲线(2)与(3)上。这样，单叶双曲面可以看成是由一个椭圆的变动(大小位置都改变)而产生的，这个椭圆在变动中保持所在的平面与 xOy 面平行，且两对顶点分别沿着两个定双曲线(2)与(3)滑动。

图 4-10 是单叶双曲面(4.5-1)的图形.

如果用平行于 xOz 的平面 $y=h$ 来截割单叶双曲面(4.5-1),那么截线的方程为:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases} \tag{5}$$

当 $|h|<b$ 时,截线(5)为双曲线,它的实轴平行于 x 轴,实半轴长为 $\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}$,虚轴平行于 z 轴,虚半轴长为 $\dfrac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}$,且双曲线(5)的顶点 $\left(\pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2},\ h,\ 0\right)$ 在腰椭圆(1)上(图 4-11).

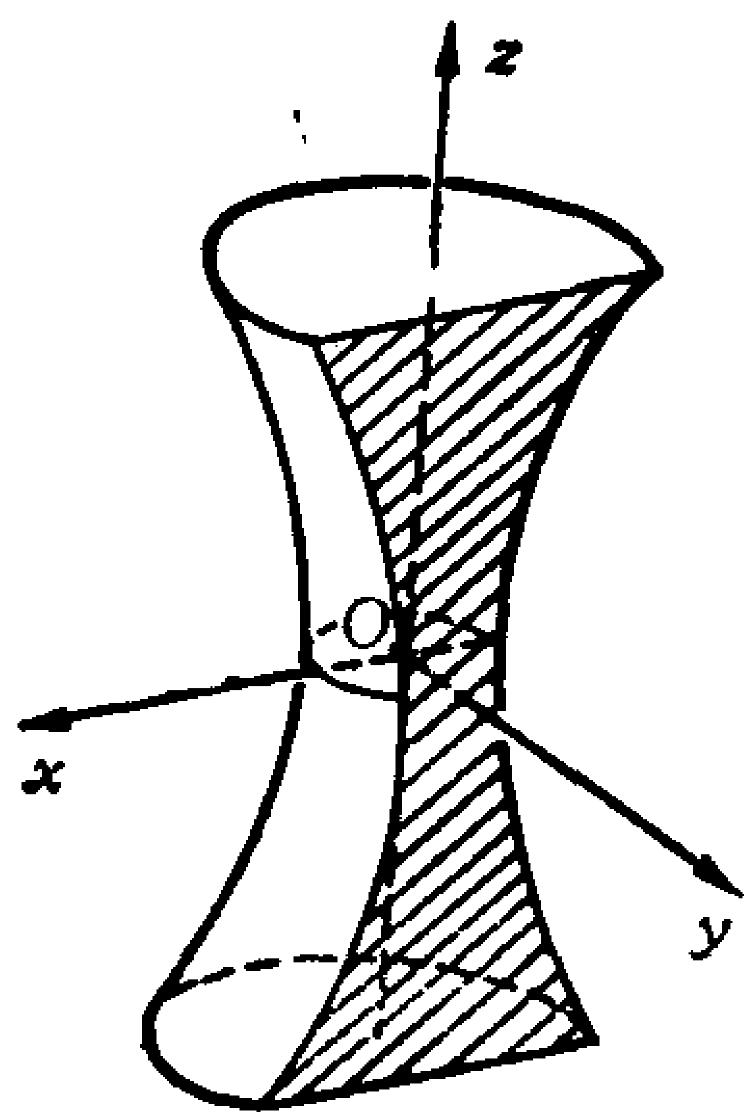


图 4-11

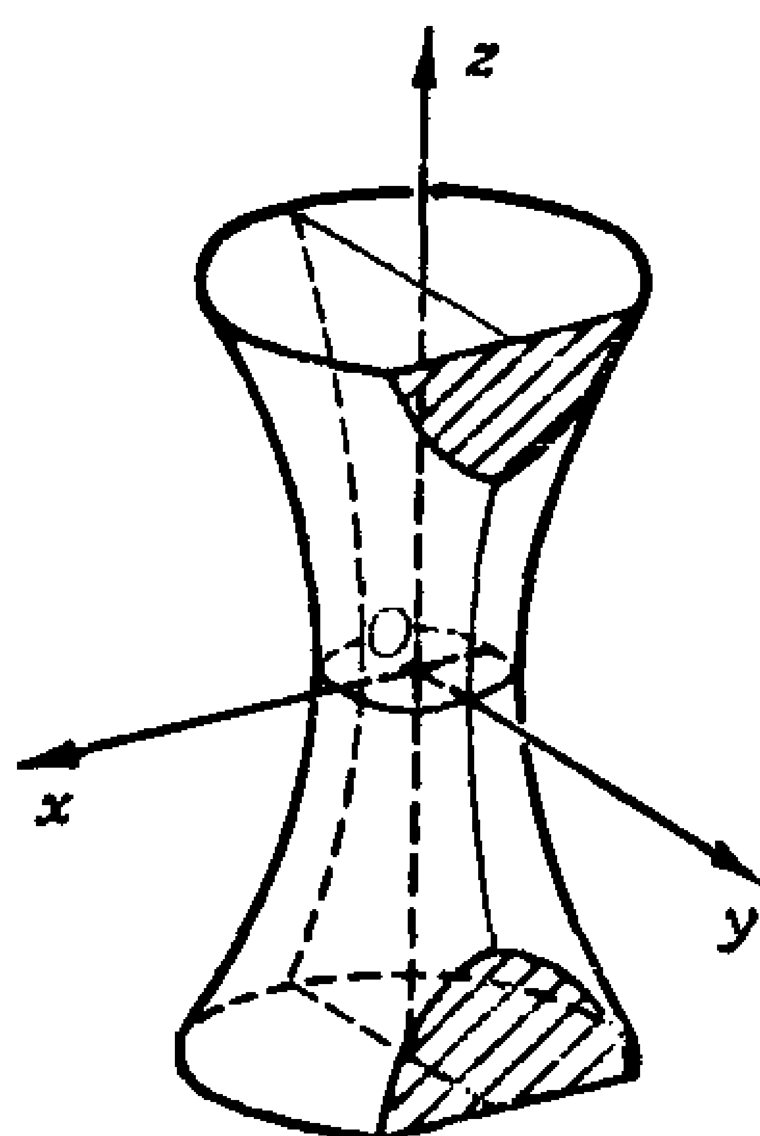


图 4-12

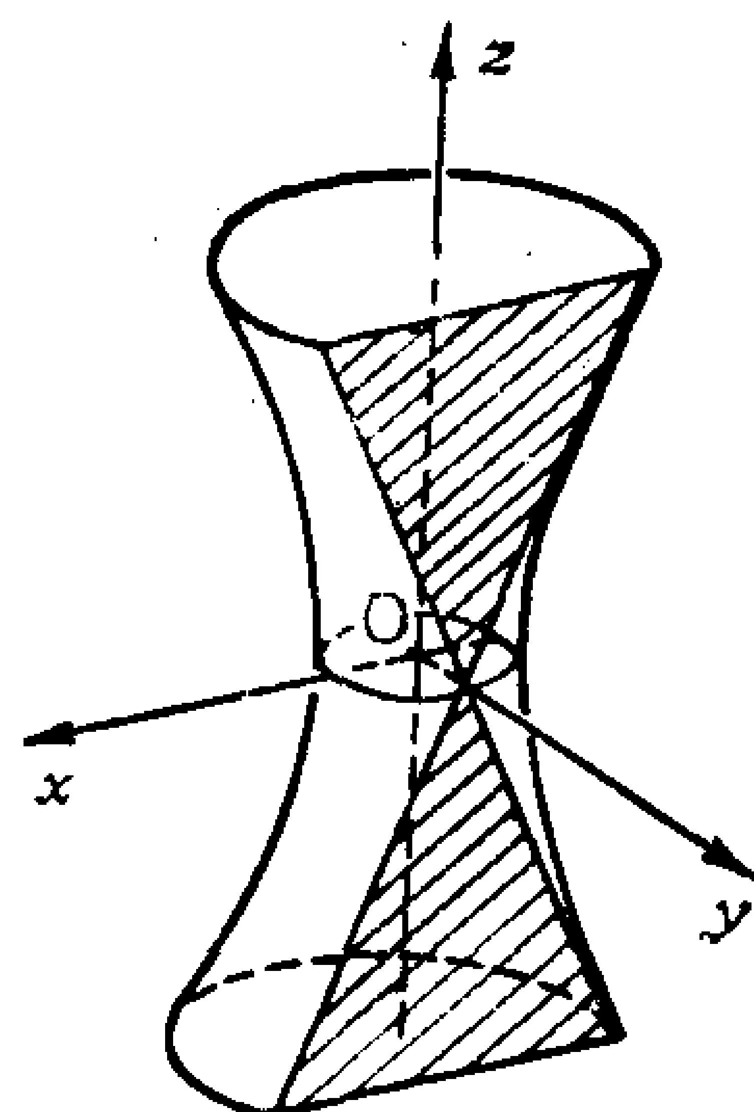


图 4-13

当 $|h|>b$ 时,截线(5)仍为双曲线,但它的实轴平行于 z 轴,实半轴长为 $\dfrac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}$,虚轴平行于 x 轴,虚半轴长为 $\dfrac{a}{b}\sqrt{h^2-b^2}$,而且它的顶点 $\left(0,\ h,\ \pm\dfrac{c}{b}\sqrt{h^2-b^2}\right)$ 在双曲线(3)上(图 4-12).

当 $|h|=b$ 时,(5)变成

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=b,\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=-b.\end{cases}$$

这是两条直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0,\\ y=b;\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{z}{c}=0,\\ y=-b.\end{cases}$$

如果 $h=b$，那么两条直线交于点 $(0,\ b,\ 0)$（图 4-13），如果 $h=-b$，那么两条直线交于 $(0,\ -b,\ 0)$.

如果用平行于 yOz 的平面来截割单叶双曲面(4.5-1)，那么它与用平行于 xOz 的平面来截割所得结果完全相类似.

在方程(4.5-1)中，如果 $a=b$，那么它就成为单叶旋转双曲面(4.3-3).

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 与 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

所表示的图形，也都是单叶双曲面.

2. 双叶双曲面

定义 4.5.2 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{4.5-2}$$

所表示的图形，叫做*双叶双曲面*，方程(4.5-2)叫做*双叶双曲面的标准方程*，其中 $a,\ b,\ c$ 是任意的正常数.

因为双叶双曲面的方程(4.5-2)仅含坐标的平方项，因此这个曲面关于三坐标平面，三坐标轴以及坐标原点都对称，而且曲面与 x 轴 y 轴都不相交，只与 z 轴相交于两点 $(0,\ 0,\ \pm c)$，这两点叫做*双叶双曲面(4.5-2)的顶点*.

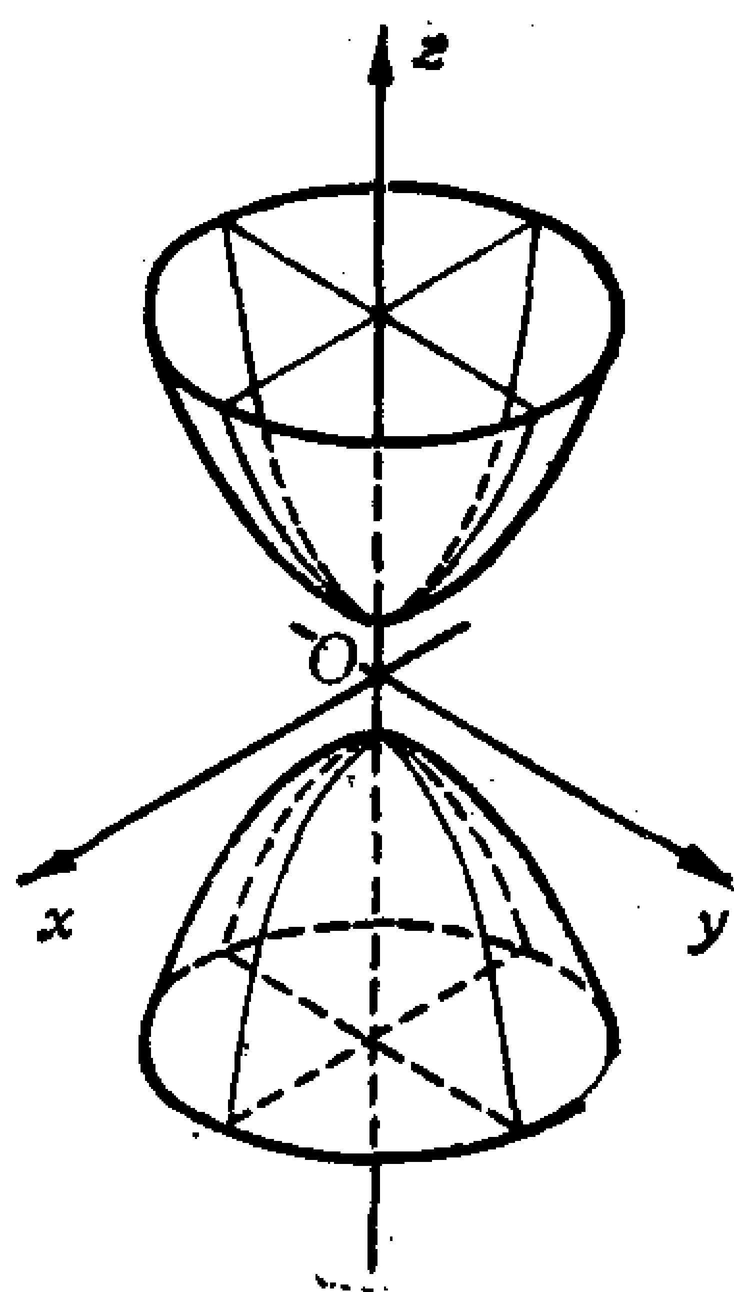


图 4-14

从方程(4.5-2)容易知道，曲面上的点恒有 $z^2\geqslant c^2$，因此曲面分成两叶 $z\geqslant c$ 与 $z\leqslant -c$.

坐标平面 $z=0$ 与曲面(4.5-2)不相交，而其它两个坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别交曲面于两条双曲线(图 4-14)。

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\tag{6}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases}\tag{7}$$

如果用一组平行于 xOy 的两平行平面 $z=h(|h|\geqslant c)$ 来截割曲面(4.5-2)，我们得截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}\tag{8}$$

当 $|h|=c$ 时，截得的图形为一点，当 $|h|>c$ 时，截线为椭圆，它的两半轴为

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\text{ 与 }b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

这时椭圆(8)的两轴的端点

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\ 0,\ h\right)\text{与}\left(0,\ \pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

分别在双曲线(6)与(7)上。因此，双叶双曲面可以看成是由一个椭圆变动(大小位置都改变)而产生的，这个椭圆在变动中，保持所在平面平行于 xOy 面，且两轴的端点分别沿着双曲线(6)，(7)滑动。

图 4-14 是双叶双曲面(4.5-2)的图形。

在方程(4.5-2)中，如果 $a=b$，那么这时截线(8)为一圆，曲面就是一个旋转双叶双曲面。

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ 与 } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所表示的图形，也都是双叶双曲面。

单叶双曲面与双叶双曲面统称为**双曲面**。

例 用一组平行平面 $z=h$（h 为任意实数），截割单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>b)$ 得一族椭圆，求这些椭圆焦点的轨迹。

解 这一族椭圆的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

因为 $a>b$，所以椭圆的长半轴为 $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$，短半轴为 $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$，从而椭圆焦点的坐标为

$$\begin{cases}x=\pm\sqrt{(a^2-b^2)\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)},\\ y=0,\\ z=h.\end{cases}$$

消去参数 h 得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2-b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

显然这族椭圆焦点的轨迹是一条在坐标面 xOz 上的双曲线，双曲线的实轴为 x 轴，虚轴为 z 轴。

习 题

1. 画出以下双曲面的图形：

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$,　　　(2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=-1$.

2．给定方程

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1,\quad (A>B>C>0)$$

试问当 λ 取异于 A, B, C 的各种数值时，它表示怎样的曲面?

3．已知单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$. 试求平面的方程，使这平面平行于 yOz 面(或 xOz 面)且与曲面的交线是一对相交直线.

4．设动点与(4, 0, 0)的距离等于这点到平面 $x=1$ 的距离的两倍，试求这动点的轨迹.

5．试求单叶双曲面 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线对 xOy 平面的射影柱面.

6．设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是 l 与 m 的公垂线的中点，A, B 两点分别在直线 l, m 上滑动，且 $\angle ACB=90°$，试证直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

7．试验证单叶双曲面与双叶双曲面的参数方程分别为

$$\begin{cases}x=a\cdot\sec u\cdot\cos v,\\ y=b\cdot\sec u\cdot\sin v,\\ z=c\cdot\operatorname{tg} u\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}x=a\cdot\operatorname{tg} u\cdot\cos v,\\ y=b\cdot\operatorname{tg} u\cdot\sin v,\\ z=c\cdot\sec u.\end{cases}$$

§4.6 抛 物 面

1．椭圆抛物面

定义 4.6.1 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \tag{4.6-1}$$

所表示的曲面叫做**椭圆抛物面**，方程(4.6-1)叫做**椭圆抛物面的标准方程**，其中 a, b 是任意的正常数.

显然椭圆抛物面(4.6-1)对称于 xOz 与 yOz 坐标面，也对称于 z 轴，但是它没有对称中心，它与对称轴交于点(0, 0, 0)，这点叫做椭圆抛物面(4.6-1)的**顶点**.

从方程(4.6-1)知

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\geqslant 0,$$

所以曲面全部在 xOy 平面的一侧,即在 $y\geqslant 0$ 的一侧.

用坐标面 $y=0$ 及 $x=0$ 截割曲面(4.6-1),分别得抛物线

$$\begin{cases}x^2=2a^2z,\\ y=0;\end{cases}\tag{1}$$

与

$$\begin{cases}y^2=2b^2z,\\ x=0,\end{cases}\tag{2}$$

这两个抛物线叫做椭圆抛物面(4.6-1)的**主抛物线**. 它们有着共同的轴与相同的开口方向,即开口方向都与 z 轴的正向一致.

用坐标平面 xOy 来截曲面(4.6-1)只得一点(0, 0, 0), 但用平行于 xOy 面的平面 $z=h(h>0)$ 来截曲面(4.6-1), 截线总是椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2a^2h}+\dfrac{y^2}{2b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}\tag{3}$$

这个椭圆的两对顶点分别为$(\pm a\sqrt{2h},\ 0,\ h)$, $(0,\ \pm b\sqrt{2h},\ h)$,它们分别在抛物面(4.6-1)的主抛物线(1)与(2)上(图 4-15). 因此, 椭圆抛物面(4.6-1)可以看成是由一个椭圆的变动(大小位置都改变)而产生的. 这个椭圆在变动中, 保持所在平面平行于 xOy 平面, 且两对顶点分别在抛物线(1)与(2)上滑动.

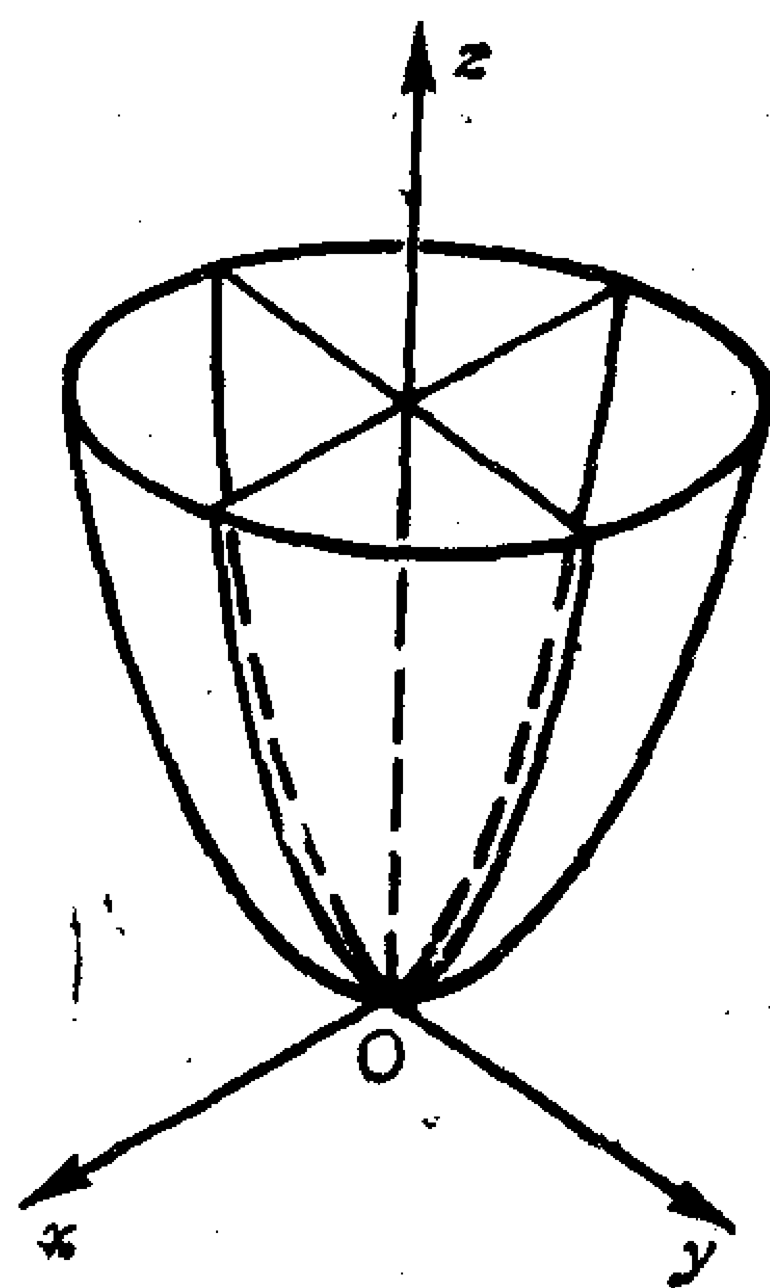


图 4-15

图 4-15 是椭圆抛物面(4.6-1)的图形.

如果我们用平行于 xOz 面的平面

$y=t$ 截割椭圆抛物面(4.6-1)得抛物线

$$\begin{cases} x^2=2a^2\left(z-\dfrac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t. \end{cases} \tag{4}$$

显然抛物线 (4) 与主抛物线(1)全等①，且它所在的平面平行于主抛物线 (1) 所在的平面和有相同的开口方向，此外，抛物线 (4) 的顶点 $\left(0,\ t,\ \dfrac{t^2}{2b^2}\right)$ 位于主抛物线(2)上，因此我们得到下面的结论：

如果取两个这样的抛物线，它们所在的平面互相垂直，它们的顶点和轴都重合，而且两抛物线有相同的开口方向，让其中一条抛物线平行于自己(即与抛物线所在的平面平行)且使其顶点在另一个抛物线上滑走，那么这一抛物线的运动轨迹便是一个椭圆抛物面(图 4-16)。

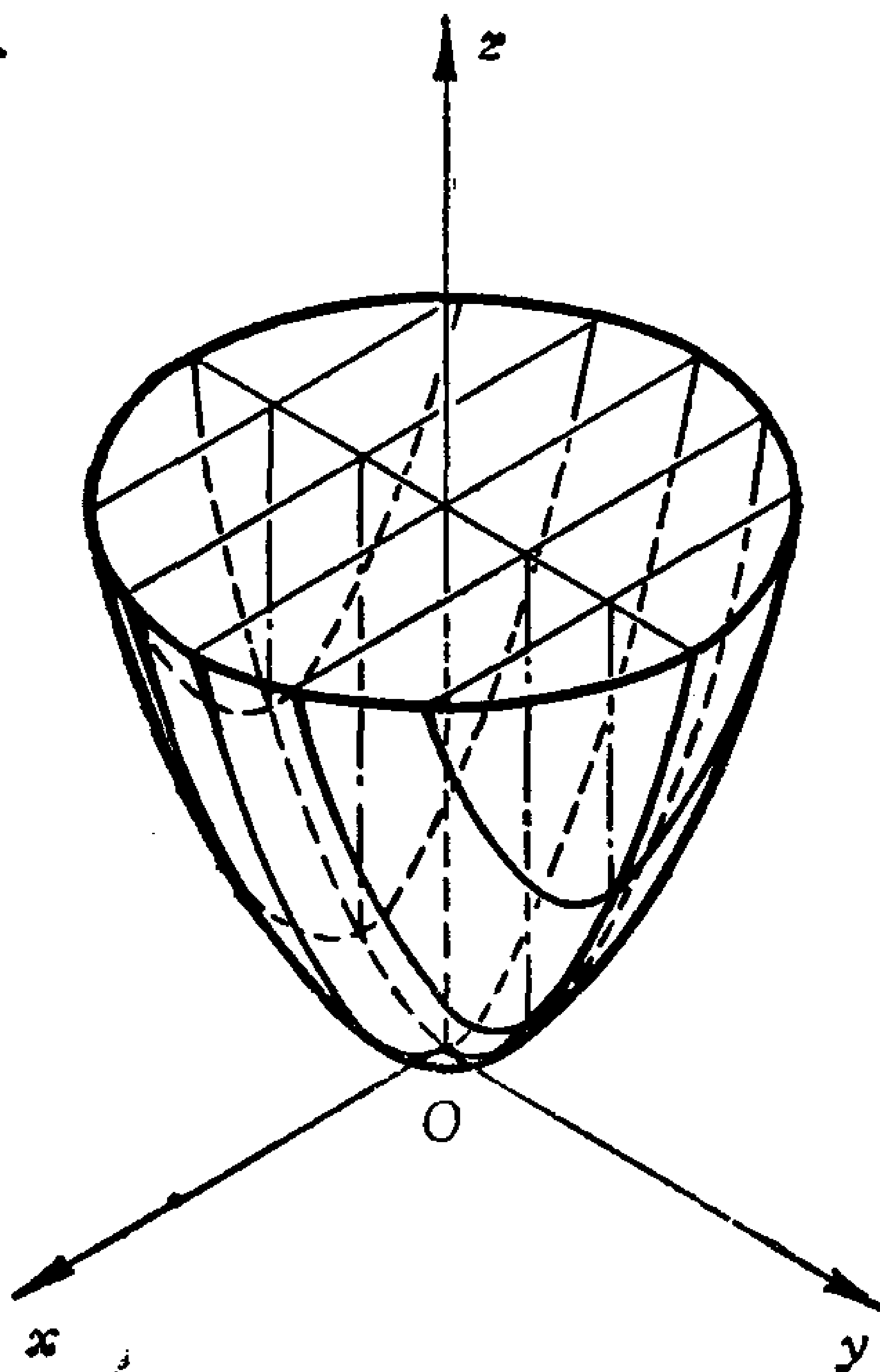


图 4-16

在方程(4.6-1)中，如果 $a=b$，那么方程变为(4.3-5)，即

$$x^2+y^2=2a^2z,$$

这时截线(3)为一圆，曲面就成为旋转抛物面。

2. 双曲抛物面

定义 4.6.2 在直角坐标系下，由方程

① 两个有相同焦参数 p 的抛物线是全等的。

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \tag{4.6-2}$$

所表示的曲面叫做**双曲抛物面**，方程(4.6-2)叫做**双曲抛物面的标准方程**，其中 a, b 为任意的正常数.

显然曲面(4.6-2)关于 xOz 面，yOz 面与 z 轴对称，但是它没有对称中心.

用坐标平面 $z=0$ 去截割曲面(4.6-2)，就得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,\\ z=0.\end{cases} \tag{5}$$

这是一对相交于原点的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0;\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0.\end{cases} \tag{5'}$$

其次用坐标平面 $y=0$ 与 $x=0$ 来截割曲面(4.6-2)，分别得两抛物线

$$\begin{cases}x^2=2a^2z,\\ y=0;\end{cases} \tag{6}$$

与

$$\begin{cases}y^2=-2b^2z,\\ x=0.\end{cases} \tag{7}$$

这两抛物线叫做双曲抛物面(4.6-2)的**主抛物线**，它们所在的平面相互垂直，有相同的顶点与对称轴，但两抛物线的开口方向不同，抛物线(6)沿 z 轴方向开口，而抛物线(7)的开口方向却与 z 轴方向相反.

如果用平行于 xOy 面的平面 $z=h(h\neq 0)$ 来截割曲面(4.6-2)，截线总是双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2a^2h}-\dfrac{y^2}{2b^2h}=1, \\ z=h.\end{cases} \tag{8}$$

当 $h>0$ 时，双曲线(8)的实轴与 x 轴平行，虚轴与 y 轴平行，顶点 $(\pm a\sqrt{2h},\ 0,\ h)$ 在主抛物线(6)上；当 $h<0$ 时，双曲线(8)的实轴与 y 轴平行，虚轴与 x 轴平行，顶点 $(0,\ \pm b\sqrt{-2h},\ h)$ 在主抛物线(7)上(图 4-17)。

因此，曲面(4.6-2)被 xOy 平面分割成上下两部分，上半部沿 x 轴的两个方向上升，下半部沿 y 轴的两个方向下降，曲面的大体形状象一只马鞍子，所以双曲抛物面(4.6-2)也叫做马鞍曲面(图 4-17)。

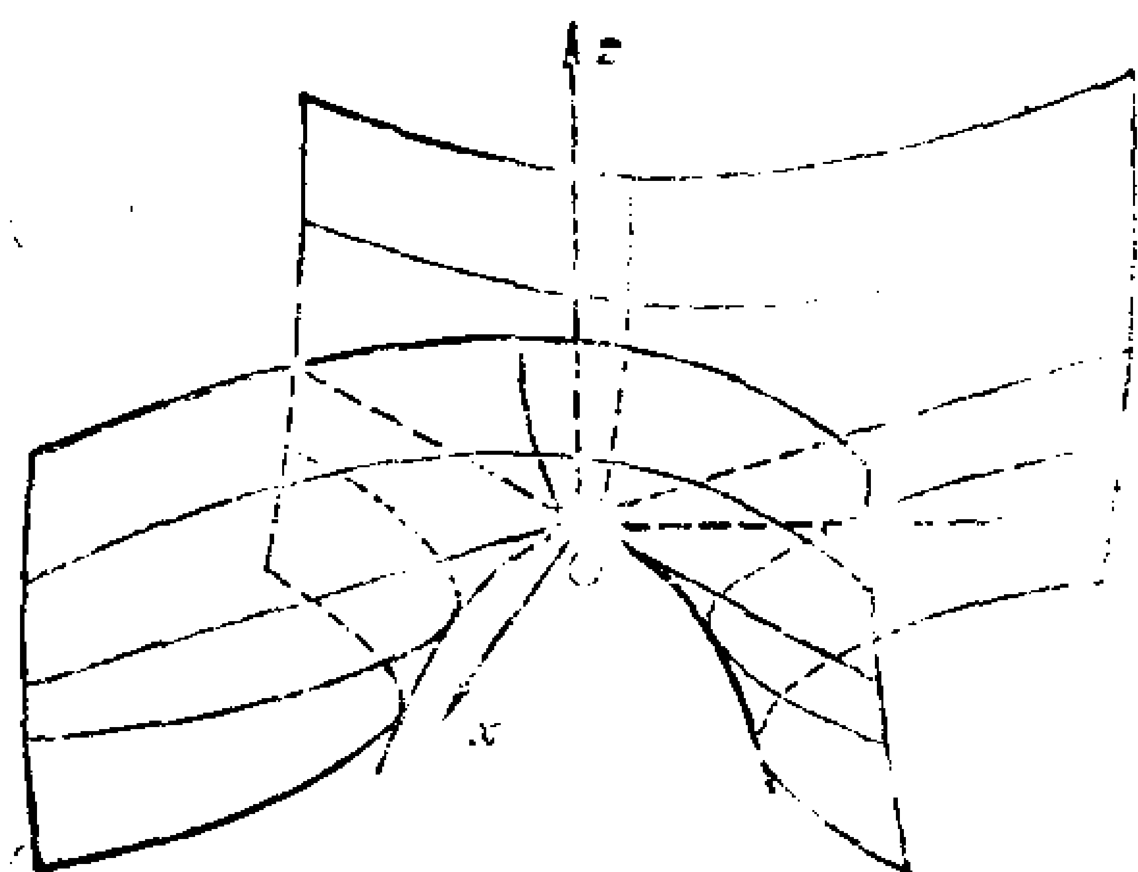


图 4-17

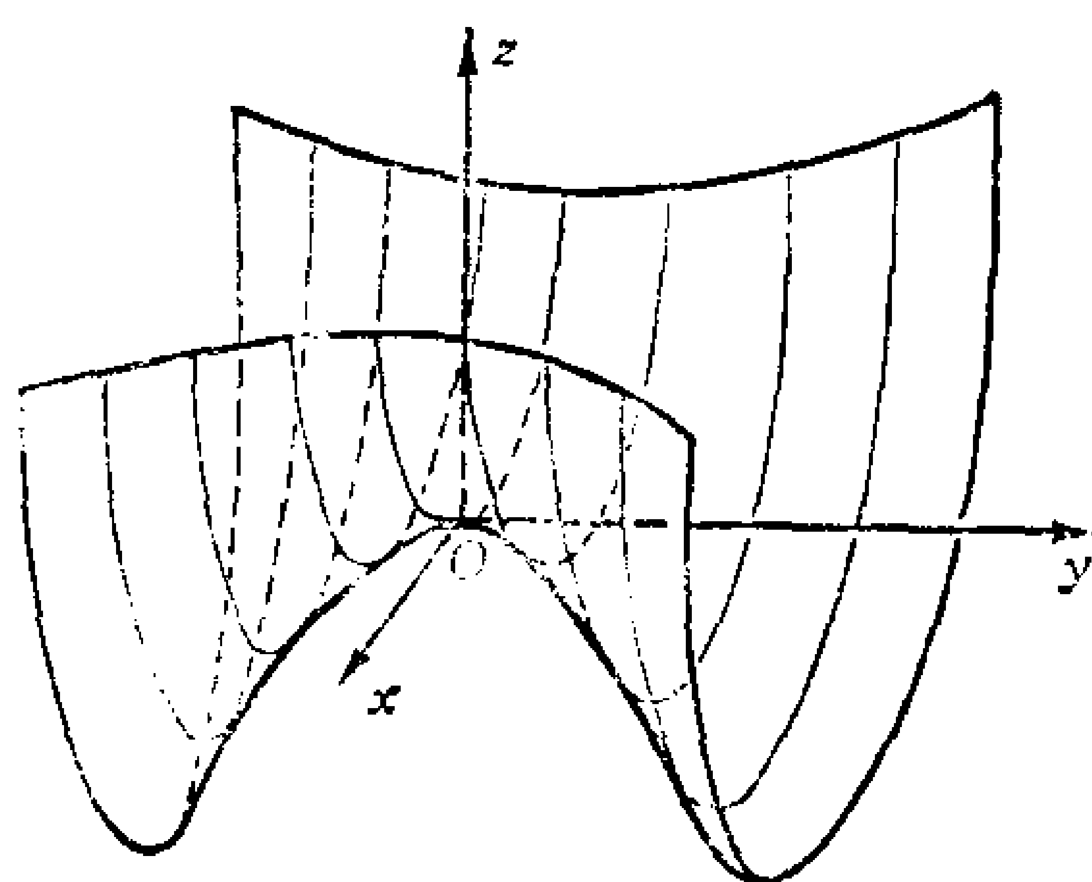


图 4-18

双曲抛物面的形状比较复杂，为了进一步明确它的结构，我们再来观察用平行于 xOz 面的一组平行平面 $y=t$ 来截割曲面(4.6-2)所得的截线，这时截线为抛物线

$$\begin{cases}x^2=2a^2\left(z+\dfrac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t.\end{cases} \tag{9}$$

我们容易看出，不论 t 取怎样的实数，所截得的抛物线(9)总与主抛物线(6)是全等的，且所在平面平行于这个主抛物线所在的平面 xOz，而它的顶点 $\left(0,\ t,\ -\dfrac{t^2}{2b^2}\right)$ 则在另一主抛物线(7)上(图 4-18)，

于是得到下面的结论：

如果取两个这样的抛物线，它们的所在平面互相垂直，有公共的顶点与轴，而两抛物线的开口方向相反，让其中的一个抛物线平行于自己（即与抛物线所在的平面平行）且使其顶点在另一抛物线上滑动，那么前一抛物线的运动轨迹便是一个双曲抛物面.

椭圆抛物面与双曲抛物面统称为**抛物面**，它们都没有对称中心，所以又叫做**无心二次曲面**.

例 1 作出球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 的交线.

解 两曲面的交线为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8, & (1)\\ x^2+y^2=2z, & (2)\end{cases}$$

(2) 代入 (1) 得

$$z^2+2z-8=0,$$

即
$$(z+4)(z-2)=0,$$

$$\therefore \quad z=-4 \quad 或 \quad z=2,$$

由 (2) 知 $z\geqslant 0$，所以取 $z=2$，因此交线方程可改写为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\ z=2,\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=2.\end{cases}$$

这是平面 $z=2$ 上的一个圆，圆心为 $(0,\ 0,\ 2)$，半径为 2，它的图形如图 4-19 所示.

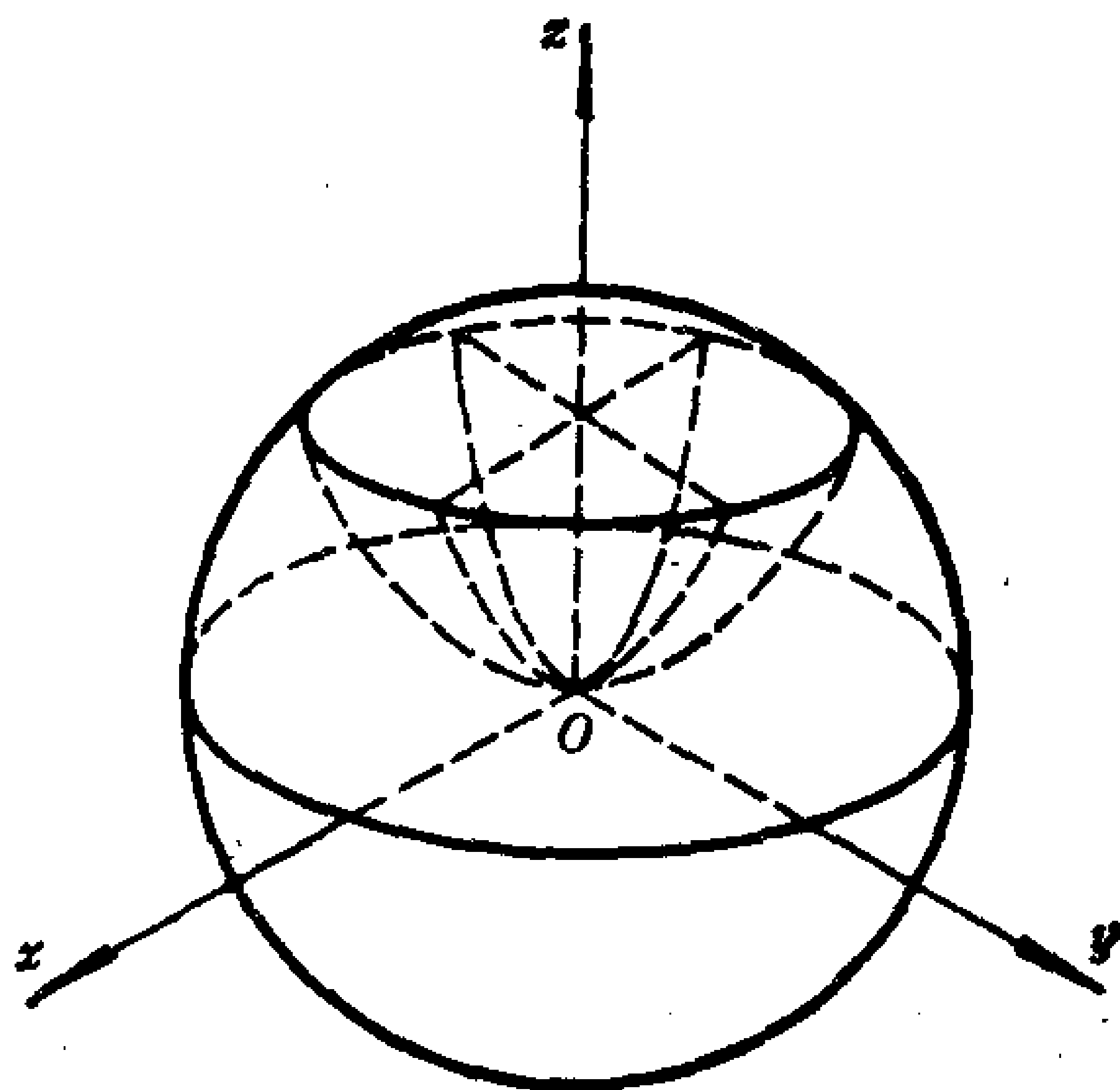


图 4-19

例 2 作出曲面 $z=4-x^2$ 与平面 $2x+y=4$，三坐标面所围成的立体在第一卦限

部分的立体图形.

解 $z=4-x^2$ 为抛物柱面，它的母线平行于 y 轴准线为 xOz 面上的抛物线，抛物线的顶点为 $S(0, 0, 4)$，焦参数 $p=\frac{1}{2}$，开口方向与 z 轴的方向相反；平面 $2x+y=4$ 平行于 z 轴，它与 xOy 的交线是一条直线，这条直线与 x 轴，y 轴分别交于点 $P(2, 0, 0)$，$Q(0, 4, 0)$. 为了画出这张立体图，还必须画出已知抛物柱面与平面的交线，为此我们设想用一平行于 yOz 的平面来截割它们，那么截得一矩形 $ABCD$(图 4-20)，其中 AD 为抛物柱面的母线，D 为交线上的点，这样我们就得到下面描绘交线上的任意点的方法：在抛物线弧 $\overset{\frown}{SP}$ 上任取一点 A，过 A 作抛物柱面的母线 AD，再作 $AB\parallel z$ 轴，交 x 轴于 B，过 B 作 $BC\parallel y$ 轴，交 PQ 于 C，再过 C 作直线 $CD\parallel BA$，交 AD 于 D 点，那么 D 即为交线上的点. 用此方法可得交线上一系列的点，把这些点连结起来，即得所求抛物柱面与平面的交线. 所求立体图如图 4-20 所示.

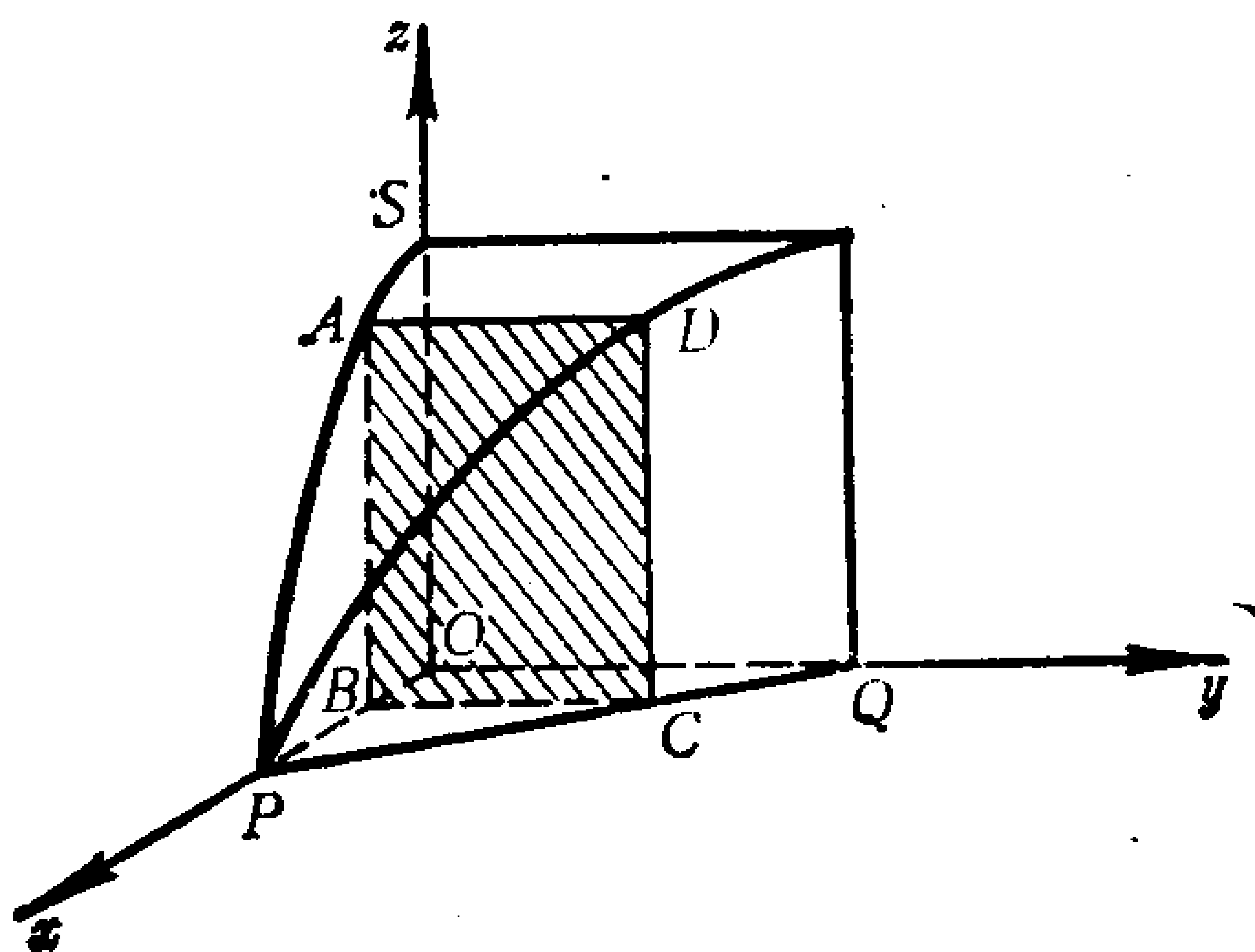


图 4-20

习 题

1. 已知椭圆抛物面的顶点在原点，对称面为 xOz 面与 yOz 面，且过点 $(1, 2, 6)$ 和 $\left(\frac{1}{3}, -1, 1\right)$，求这个椭圆抛物面的方程.

2．适当选取坐标系，求下列轨迹的方程：

(1) 到一定点和一定平面距离之比等于常数的点的轨迹；

(2) 与两给定异面直线等距离的点的轨迹，已知两异面直线之间的距离为 $2a$，夹角为 2α.

3．画出下列方程所代表的图形：

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$； (2) $z=xy$；

(3) $\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ z=2. \end{cases}$

4．画出下列各组曲面所围成的立体的图形：

(1) $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $x+y+z=6$；

(2) $x^2+y^2=z$，三坐标平面，$x+y=1$；

(3) $x=\sqrt{y-z^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{y}=x$, $y=1$；

(4) $x^2+y^2=1$, $y^2+z^2=1$.

5．试验证椭圆抛物面与双曲抛物面的参数方程可分别写为：

$$\begin{cases} x=au\cdot\cos v, \\ y=bu\cdot\sin v, \\ z=\frac{1}{2}u^2; \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x=a(u+v), \\ y=b(u-v), \\ z=2uv, \end{cases}$$

式中 u, v 为参数.

§4.7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

我们在前面已经看到，柱面与锥面都可以由一族直线所构成，这种由一族直线所构成的曲面叫做**直纹曲面**，而构成曲面的那族直线叫做这曲面的**一族直母线**．柱面与锥面都是直纹曲面.

我们又在§4.5与§4.6中看到单叶双曲面与双曲抛物面上都包含有直线．下面我们来证明，这两曲面不仅含有直线，而且可以由一族直线所构成，因而它们都是直纹曲面.

首先考察单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

其中 a, b, c 为正的常数，把(1)改写为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

或者

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{2}$$

现在引进不等于零的参数 u，并考察由上式得来的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right).\end{cases} \tag{3}$$

与两方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ 1-\dfrac{y}{b}=0;\end{cases} \tag{4}$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ 1+\dfrac{y}{b}=0.\end{cases} \tag{4'}$$

方程组(4)与(4′)实际上是(3)式中当参数 $u\to 0$ 和 $u\to\infty$ 时的两种极限情形，显然不论 u 取何值，(3)以及(4)，(4′)都表示直线，我们把(3)，(4)，(4′)合起来组成的一族直线叫做 u 族直线.

现在来证明由这 u 族直线可以构成曲面(1)，从而它是单叶双曲面(1)的一族直母线.

容易知道，u 族直线中的任何一条直线上的点都在曲面(1)上，这是因为 $u\neq 0$ 时，由(3)边边相乘即得(1)，所以(3)所表示的直线上的点都在曲面(1)上；而满足(4)与(4′)的点显然满足(2)，从而满足(1)因此直线(4)与(4′)上的点也都在曲面(1)上.

反过来，设(x_0, y_0, z_0)是曲面(1)上的点，从而有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right). \tag{5}$$

显然$1+\frac{y_0}{b}$与$1-\frac{y_0}{b}$不能同时为零，因此不失一般性，假设

$$1+\frac{y_0}{b}\neq 0.$$

如果$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\neq 0$，那么取$u$的值，使得

$$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=u\left(1+\frac{y_0}{b}\right),$$

由(5)便得
$$\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{y_0}{b}\right),$$

所以点(x_0, y_0, z_0)在直线(3)上。

如果$\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}=0$，那么由(5)知必有$1-\frac{y_0}{b}=0$，所以点$(x_0, y_0, z_0)$在直线(4)上。

因此曲面(1)上的任一点(x_0, y_0, z_0)，一定在u族直线中的某一条直线上。

这样就证明了曲面(1)是由u族直线所构成，因此单叶双曲面(1)是直纹曲面，而u族直线是单叶双曲面(1)的一族直母线，称为**u族直母线**。

同样可以证明由直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{v}\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{cases} \tag{6}$$

(其中v为不等于零的任意实数)与另两直线(相当于(6)中当$v\to 0$和$v\to\infty$的情形)

$$
\begin{cases}
\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\
1+\dfrac{y}{b}=0,
\end{cases}
\tag{7}
$$

与

$$
\begin{cases}
\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\
1-\dfrac{y}{b}=0
\end{cases}
\tag{7'}
$$

合在一起组成的直线族是单叶双曲面(1)的另一族直母线，我们称它为单叶双曲面(1)的 v **族直母线**.

图 4-21 表示了单叶双曲面上两族直母线的大概的分布情况.

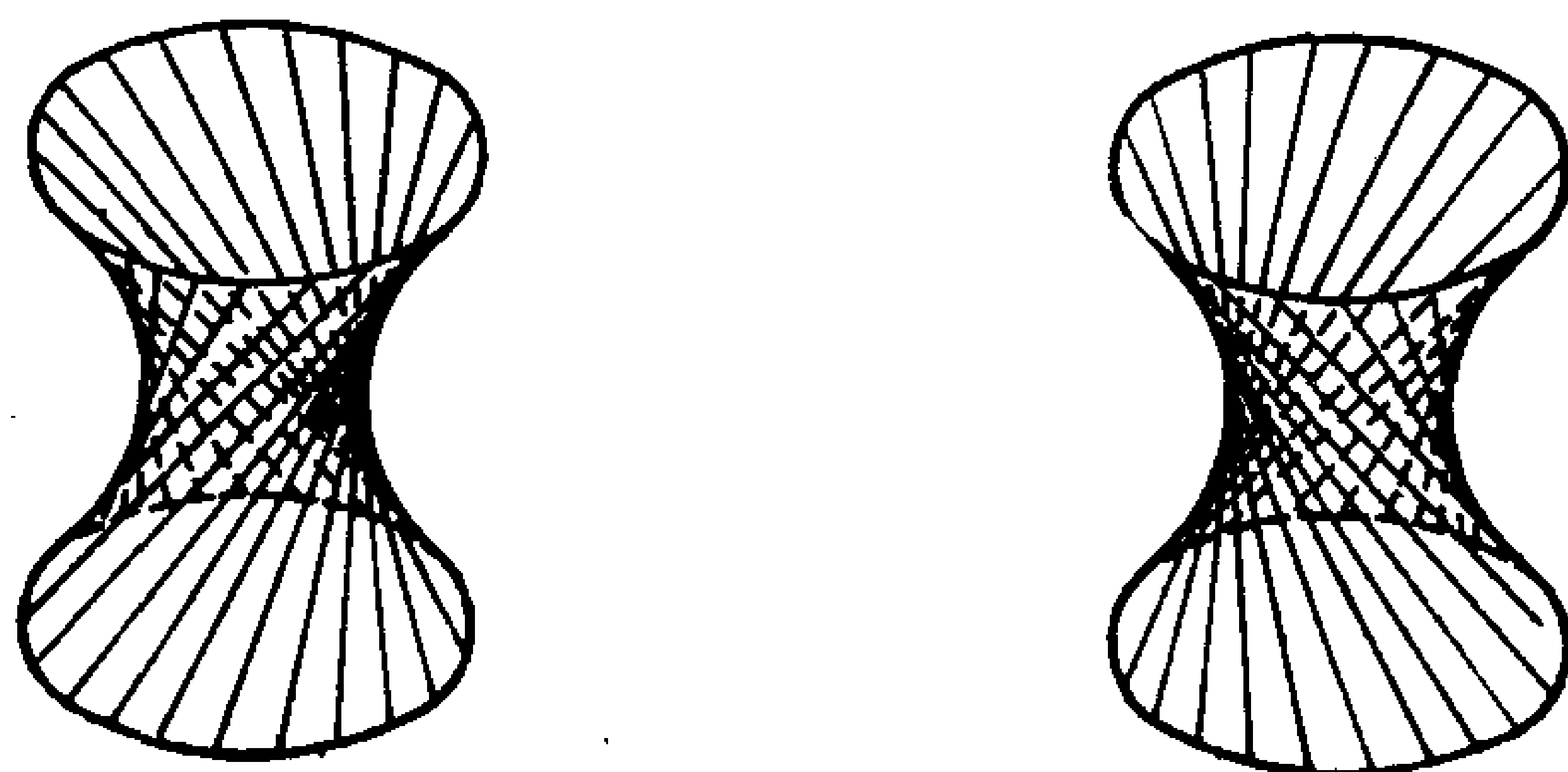


图 4-21

推论 对于单叶双曲面上的点，两族直母线中各有一条直母线通过这点.

为了避免取极限，我们常把单叶双曲面(1)的 u 族直母线写成

$$
\begin{cases}
w\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\
u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{b}\right),
\end{cases}
\tag{4.7-1}
$$

其中 u, w 不同时为零. 当 $u\neq 0$, $w\neq 0$ 时，各式除以 w, (4.7-1)式就化为(3)；当 $u=0$ 时便化成(4)；当 $w=0$ 时便化成(4′). 而 v 族直母线写成

$$\begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{4.7-2}$$

其中 v, t 不同时为零.

这里必须指出，(4.7-1)与(4.7-2)中的直线分别只依赖于 $u:w$ 与 $v:t$ 的值.

对于双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

同样地可以证明它也有两族直母线(图 4-22)，它们的方程分别是①

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z; \end{cases} \tag{4.7-3}$$



图 4-22

① 对于双曲抛物面的直母线族方程不用双参数，这是因为如果将(4.7-3)改写为双参数形式

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=wz, \end{cases} \tag{*}$$

那么当 $w=0$ 时，必有 $u=0$，所以如果要写成(*)的形式，必须附加条件 $w\neq 0$，但是这样(*)实质上就是(4.7-3)了.

与
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v,\\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z.\end{cases}\tag{4.7-4}$$

并且也有下面的推论:

推论 对于双曲抛物面上的点，两族直母线中各有一条直母线通过这一点.

单叶双曲面与双曲抛物面的直母线，在建筑上有着重要的应用,常常用它来构成建筑的骨架.

单叶双曲面与双曲抛物面的直母线还有下面的一些性质:

定理 4.7.1 单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面，而双曲抛物面上异族的任意两直母线必相交.

现在我们来证明定理的前半部分,后半部分留给读者.

证 由(4.7-1)与(4.7-2)的四个方程的系数和常数项所组成的行列式为

$$\begin{vmatrix}\dfrac{w}{a} & -\dfrac{u}{b} & \dfrac{w}{c} & -u\\ \dfrac{u}{a} & \dfrac{w}{b} & -\dfrac{u}{c} & -w\\ \dfrac{t}{a} & \dfrac{v}{b} & \dfrac{t}{c} & -v\\ \dfrac{v}{a} & -\dfrac{t}{b} & -\dfrac{v}{c} & -t\end{vmatrix}=-\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}w & -u & w & u\\ u & w & -u & w\\ t & v & t & v\\ v & -t & -v & t\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{4}{abc}\begin{vmatrix}w & 0 & w & u\\ 0 & w & -u & w\\ t & v & t & v\\ 0 & 0 & -v & t\end{vmatrix}=-\frac{4}{abc}\begin{vmatrix}w & 0 & 0 & u\\ 0 & w & -u & 0\\ t & v & 0 & 0\\ 0 & 0 & -v & t\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{4}{abc}(wvut-twuv)=0.$$

根据§3.8的例3知道这两直线一定是共面的，所以单叶双曲面

上异族的两直母线必共面.

定理 4.7.2 单叶双曲面或双曲抛物面上同族的任意两直母线总是异面直线，而且双曲抛物面同族的全体直母线平行于同一平面.

这个定理的证明留给读者.

例 求过单叶双曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 上的点(6, 2, 8)的直母线方程.

解 单叶双曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 的两族直母线方程是

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=u\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ u\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=w\left(1-\frac{y}{2}\right); \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} t\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=v\left(1-\frac{y}{2}\right), \\ v\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=t\left(1+\frac{y}{2}\right). \end{cases}$$

把点(6, 2, 8)分别代入上面两组方程，求得

$$w:u=1:2 \quad 与 \quad t=0,$$

代入直母线族方程，得过(6, 2, 8)的两条直母线分别为

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{z}{4}=2\left(1+\frac{y}{2}\right), \\ 2\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=1-\frac{y}{2}; \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} 1-\frac{y}{2}=0, \\ \frac{x}{3}-\frac{z}{4}=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0; \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} y-2=0, \\ 4x-3z=0. \end{cases}$$

习　　题

1. 求下列直纹曲面的直母线族方程

(1) $x^2+y^2-z^2=0$;　　(2) $z=axy$.

2. 求下列直线族所成的曲面(式中的 λ 为参数):

(1) $\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\lambda}{0}$;　　(2) $\begin{cases} x+2\lambda y+4z=4\lambda, \\ \lambda x-2y-4\lambda z=4. \end{cases}$

3．在双曲抛物面 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ 上求平行于平面 $3x+2y-4z=0$ 的直母线.

4．试证单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的任意一条直母线在 xOy 平面上的射影，一定是其腰椭圆的切线.

5．求与两直线 $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 与 $\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$ 相交，而且与平面 $2x+3y-5=0$ 平行的直线的轨迹.

6．求与下列三条直线

$$\begin{cases}x=1,\\y=z;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\y=-z;\end{cases}\quad 与\quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}$$

都共面的直线所构成的曲面.

7．试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线. 并举一反例，说明这个命题在双曲抛物面的情况下不一定成立.

8．试求单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 上互相垂直的两直母线交点的轨迹方程.

9．试证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\,(a\neq b)$ 上的两直母线直交时，其交点必在一双曲线上.

10．已知空间两异面直线间的距离为 $2a$，夹角为 2α，过这两直线分别作平面，并使这两平面相互垂直，求这样的两平面交线的轨迹.

结 束 语

从本章介绍的曲面中，可以看到，一些曲面可以由一条曲线按照某种规律运动所生成. 例如柱面是由平行于定方向且沿着准线运动的直线所产生，它是空间一族平行直线所生成的曲面；锥面是由通过定点且沿着准线运动的直线所产生，这是空间一族共点直线所生成的曲面；而旋转曲面是由一曲线绕其轴旋转一周而产生，它又可以看成是一族纬圆所生成的曲面. 在导出这种由曲线运动所产生的曲面方程时，它们的方法是统一的. 即先写出含有参数

的母线族或纬圆族的方程

$$\begin{cases}F_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0, \\ F_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0;\end{cases} \tag{1}$$

再根据曲线运动的规律，写出参数 x_1, y_1, z_1 所应满足的关系式

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1, y_1, z_1)=0, \\ \Phi_2(x_1, y_1, z_1)=0,\end{cases} \tag{2}$$

这也是参数的约束条件，然后由上四式消去三个参数 x_1, y_1, z_1 就得(1)所生成的曲面方程.

一般地说，一个含有 n 个参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的曲线族

$$\begin{cases}F_1(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=0, \\ F_2(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=0,\end{cases} \tag{3}$$

其中 n 个参数的约束条件为 $n-1$ 个关系式

$$\Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=0, \quad i=1, 2, \cdots, n-1, \tag{4}$$

由(3)与(4)中的 $n+1$ 个式子消去 n 个参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，就得由曲线族(3)所生成的曲面方程.

进一步，我们也可以把椭球面，双曲面与抛物面分别看成是由某一族曲线所生成的，例如椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{5}$$

可以看成是由含有参数 h 的一族椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h\end{cases} \tag{6}$$

所生成，因为由(6)消去参数 h 即为(5).

同样，双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

可以看成是由含参数 h 的一族椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}\pm 1\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}\pm 1\right)}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

所生成. 抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

可以看成是由含参数 t 的一族抛物线

$$\begin{cases}x^2=2a^2\left(z\mp\dfrac{t^2}{2b^2}\right),\\ y=t\end{cases}$$

所生成.

对于根据曲面的方程如何来认识曲面的形状，在本章中，我们介绍了"平行截割法"，也就是用一族平行平面来截割曲面研究截口曲线是怎样变化的，从这一族截口曲线的变化情况，我们就能想象出方程所表示的曲面的整体形状. 这是一个认识空间图形的重要方法，它的思想是把复杂的空间图形归结为比较容易认识的平面曲线. 这种思想方法，也被测绘人员用来绘制等高线地形图.

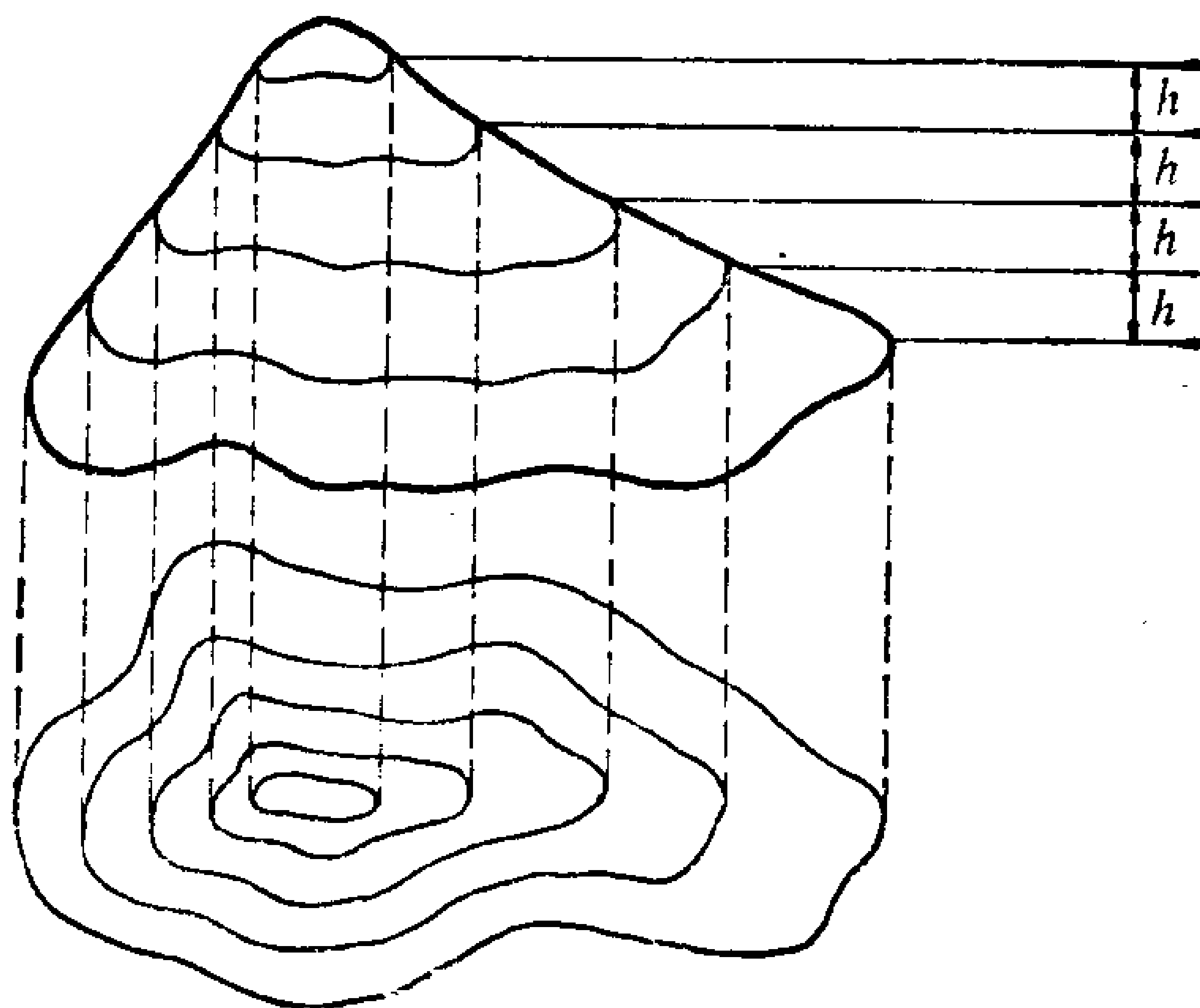


图 4-23

例如要绘制一座高山的地形图，可用一组等距的平行于地平面的平面来截割，得一族截口曲线，这也就是测出每隔同样高度的曲线即等高线，然后把这些曲线垂直投影到地平面上，就得到一族投影曲线，这就是等高线地形图(图 4-23)，高山的大致形状，便由等高线图显示出来。从等高线图中容易看出，在相邻两曲线靠得越近的地方，那里的坡度就越大，山势就陡；两曲线离得远的地方，那里的坡度就小，也就是较为平坦。

第五章　二次曲线的一般理论

在平面上，由二元二次方程①

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

所表示的曲线，叫做*二次曲线*．在这一章里，我们将讨论二次曲线的几何性质，以及二次曲线方程的化简，最后对二次曲线进行分类．

我们在讨论中，将从研究直线与二次曲线的相交问题入手，来认识二次曲线的某些几何性质．为了求直线与二次曲线的交点，就必须涉及到解二次方程的问题，但是二次方程的根可能是虚数，因此在这里我们将象代数中引进虚数把实数扩充成复数那样，在平面上引进虚元素．下面我们简单地说明一下有关虚元素的问题．

我们知道，当平面上建立了笛卡尔坐标系之后，一对有序实数(x, y)就表示平面上的一个点，如果x及y中至少有一个是虚数，那么在这里我们仍然认为(x, y)表示平面上的一个点，这样的点我们把它叫做平面上的*虚点*，而x, y叫做这一虚点的坐标，相应地我们把坐标是一对实数的点叫做平面上的*实点*．如果两个虚点的对应坐标都是共轭复数，那么这两点叫做一对*共轭虚点*，实点与虚点统称为*复点*．

当平面上引进了虚点之后，我们仍然可以讨论矢量、直线等概念，例如设$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$为平面上的两复点，那么我们称$\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$为以M_1为起点，M_2为终点的复矢量，并记做

① 在一般二次曲线的方程中，xy、x、y项的系数都带上2是为了以后演算的方便

$\overrightarrow{M_1M_2}$，如果 x_2-x_1 与 y_2-y_1 中至少有一为虚数时，我们把它叫做虚矢量；如果点 $M(x, y)$ 的坐标满足表达式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

其中 λ 为复数，我们就说点 M 分 M_1M_2 成定比 λ，特殊地把点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 叫做 M_1M_2 的中点；我们把

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t\end{cases}$$

叫做由两点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$ 决定的直线的参数方程，式中 t 为参数，它可为任意的复数. 消去参数 t 得:

$$Ax+By+C=0,$$

式中 $A=y_2-y_1$，$B=-(x_2-x_1)$，$C=y_1(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1)$. 方程 $Ax+By+C=0$ 叫做直线的一般式方程，如果 A, B, C 与三个实数成比例，那么直线为实直线，否则叫做虚直线.

必须指出，由于共轭复数之和为实数，所以连结两共轭虚点的线段的中点是实点.

平面上引进了虚点之后，曲线的方程中可能会出现虚系数，不过以后我们讨论问题时，只考虑实系数的曲线方程. 但是，由于引进了虚点，实系数方程所表示的曲线上将含有许多虚点，甚至有的实系数方程所表示的曲线上只有虚点而无实点.

为了方便起见，我们引进下面的一些记号:

$$F(x, y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33},$$

$$F_1(x, y)\equiv a_{11}x+a_{12}y-a_{13}\text{①},$$

$$F_2(x, y)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23},$$

---

① 为了便于记忆，可以借用偏导数的记号: $F_1(x, y)=\frac{1}{2}F'_x(x, y)$，$F_2(x, y)=\frac{1}{2}F'_y(x, y)$.

$$F_3(x, y) \equiv a_{13}x + a_{23}y + a_{33},$$

$$\Phi(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

这样我们容易验证，下面的恒等式成立：

$$F(x, y) \equiv xF_1(x, y) + yF_2(x, y) + F_3(x, y), \tag{2}$$

(1)式也就可以写成

$$F(x, y) \equiv xF_1(x, y) + yF_2(x, y) + F_3(x, y) = 0。 \tag{3}$$

我们把 $F(x, y)$ 的系数所排成的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

叫做二次曲线(1)的矩阵[或称 $F(x, y)$ 的矩阵]，而用 $\Phi(x, y)$ 的系数所排成的矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

叫做 $\Phi(x, y)$ 的矩阵. 显然，二次曲线(1)的矩阵 A 的第一，第二与第三行的元素分别是 $F_1(x, y)$，$F_2(x, y)$，$F_3(x, y)$ 的系数.

今后我们还常常要引用下面的几个符号：

$$I_1 = a_{11} + a_{22},\ I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这里的 I_1 是矩阵 A^* 的主对角元素的和，I_2 是矩阵 A^* 的行列式，I_3 是矩阵 A 的行列式，而 K_1 的两项是 I_1 的两项分别添加上两条“边”而成的两个二阶行列式，这添加上的两条“边”的元素是矩阵 A 中的第三行与第三列的对应元素，也就是说用二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

分别代替 I_1 中的 a_{11}, a_{22} 就由 I_1 得到 K_1.

§5.1 二次曲线与直线的相关位置

现在我们来讨论二次曲线

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

与过点 (x_0, y_0) 且具有方向 $X:Y$ 的直线

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt \end{cases} \tag{2}$$

的交点. 把(2)代入(1), 经过整理得关于 t 的方程

$$\begin{aligned} &(a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2)t^2 \\ &+ 2\{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})X + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})Y\}t \\ &+ (a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

利用前面的记号, (3)可写成

$$\Phi(X, Y) \cdot t^2 + 2[F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]t + F(x_0, y_0) = 0, \tag{4}$$

方程(3)或(4)可分以下几种情况来讨论.

1. $\Phi(X, Y) \neq 0$. 这时(4)是关于 t 的二次方程, 它的判别式为

$$\Delta = [F_1(x_0, y_0) \cdot X + F_2(x_0, y_0) \cdot Y]^2 - \Phi(X, Y) \cdot F(x_0, y_0).$$

这又可分三种情况:

1° $\Delta > 0$. 方程(4)有两个不等的实根 t_1 与 t_2, 代入(2)便得直线(2)与二次曲线(1)的两个不同的实交点.

2° $\Delta = 0$. 方程(4)有两个相等的实根 t_1 与 t_2, 这时直线(2)

与二次曲线(1)有两个相互重合的实交点.

3° $\Delta<0$. 方程(4)有两个共轭的虚根，这时直线(2)与二次曲线交于两个共轭的虚点.

2. $\Phi(X, Y)=0$，这时又可分三种情况:

1° $F_1(x_0, y_0)\cdot X+F_2(x_0, y_0)\cdot Y\neq 0$. 这时(4)是关于 t 的一次方程，它有唯一的一个实根. 所以直线(2)与二次曲线(1)有唯一的实交点.

2° $F_1(x_0, y_0)\cdot X+F_2(x_0, y_0)\cdot Y=0$, 而 $F(x_0, y_0)\neq 0$. 这时(4)为矛盾方程，方程(4)无解，所以直线(2)与二次曲线(1)没有交点.

3° $F_1(x_0, y_0)\cdot X+F_2(x_0, y_0)\cdot Y=F(x_0, y_0)=0$. 这时方程(4)成为一个恒等式，它能被任何值(实的或虚的)的 t 所满足，所以直线(2)上的一切点都是(1)与(2)的公共点，也就是说直线(2)全部在二次曲线上.

习　题

1. 写出下列二次曲线的矩阵 A 以及 $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_3(x, y)$.

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;　　(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

(3) $y^2=2px$;　　(4) $x^2-3y^2+5x+2=0$;

(5) $2x^2-xy+y^2-6x+7y-4=0$.

2. 求二次曲线 $x^2-2xy-3y^2-4x-6y+3=0$ 与下列直线的交点.

(1) $5x-y-5=0$;　　(2) $x+2y+2=0$;

(3) $x+4y-1=0$;　　(4) $x-3y=0$;

(5) $2x-6y-9=0$.

3. 求直线 $x-y-1=0$ 与二次曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$ 的交点.

4. 试决定 k 的值，使得

(1) 直线 $x-y+5=0$ 与二次曲线 $x^2-3x+y+k=0$ 交于两不同的实点;

(2) 直线$\begin{cases}x=1+kt\\y=k+t\end{cases}$与二次曲线 $x^2+3y^2-4xy-y=0$ 交于一点;

(3) 直线 $x-ky-1=0$ 与二次曲线 $y^2-2xy-(k-1)y-1=0$ 交于两个相互重合的定点;

(4) 直线$\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\end{cases}$与二次曲线 $2x^2+4xy+ky^2-x-2y=0$ 有两个共轭虚交点.

§5.2 二次曲线的渐近方向、中心、渐近线

1. 二次曲线的渐近方向

我们在 §5.1 中看到二次曲线

$$F(x, y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

和具有方向 $X:Y$ 的直线

$$\begin{cases}x=x_0+Xt,\\y=y_0+Yt,\end{cases} \tag{2}$$

当满足条件

$$\Phi(X, Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=0 \tag{3}$$

时，或者只有一个实交点，或者没有交点，或者直线(2)全部在二次曲线(1)上，成为二次曲线的组成部分.

定义 5.2.1 满足条件 $\Phi(X, Y)=0$ 的方向 $X:Y$ 叫做二次曲线(1)的渐近方向，否则叫做非渐近方向.

因为二次曲线(1)的二次项系数不能全为零，所以渐近方向 $X:Y$ 所满足的(3)总有确定的解.

如果 $a_{11}\neq 0$，那么把(3)改写成

$$a_{11}\left(\frac{X}{Y}\right)^2+2a_{12}\left(\frac{X}{Y}\right)+a_{22}=0,$$

得
$$\frac{X}{Y}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{11}};$$

如果 $a_{22}\neq 0$，把(3)改写成

$$a_{22}\left(\frac{Y}{X}\right)^2+2a_{12}\left(\frac{Y}{X}\right)+a_{11}=0,$$

得
$$\frac{Y}{X}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-I_2}}{a_{22}};$$

如果 $a_{11}=a_{22}=0$，那么一定有 $a_{12}\neq 0$，这时(3)变为

$$2a_{12}XY=0,$$

所以
$$X:Y=1:0 \quad \text{或} \quad 0:1,$$

这时
$$I_2=\begin{vmatrix}0 & a_{12}\\ a_{12} & 0\end{vmatrix}=-a_{12}^2<0.$$

从上我们看到，当且仅当 $I_2>0$ 时，二次曲线(1)的渐近方向是一对共轭的虚方向；$I_2=0$ 时，(1)有一个实渐近方向；$I_2<0$ 时，(1)有两个实渐近方向. 因此二次曲线的渐近方向最多有两个，显然二次曲线的非渐近方向有无数多.

定义 5.2.2 没有实渐近方向的二次曲线叫做**椭圆型**的，有一个实渐近方向的二次曲线叫做**抛物型**的，有两个实渐近方向的二次曲线叫做**双曲型**的.

因此二次曲线(1)按其渐近方向可以分为三种类型，即

1) 椭圆型曲线：$I_2>0$；

2) 抛物型曲线：$I_2=0$；

3) 双曲型曲线：$I_2<0$.

2. 二次曲线的中心与渐近线

我们在§5.1中又看到，当直线(2)的方向 $X:Y$ 为二次曲线(1)的非渐近方向时，即当

$$\Phi(X,\ Y)\equiv a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2\neq 0$$

时，直线(2)与二次曲线(1)总交于两个点(两不同实的，两重合实的或一对共轭虚的). 我们把由这两点决定的线段叫做二次曲线

的弦.

定义 5.2.3 如果点 C 是二次曲线的通过它的所有弦的中点(因而 C 是二次曲线的对称中心)，那么点 C 叫做二次曲线的中心.

根据这个定义，当点 (x_0, y_0) 为二次曲线(1)的中心时，那么过 (x_0, y_0) 以(1)的任意非渐近方向 $X:Y$ 为方向的直线(2)与二次曲线(1)交于两点 M_1, M_2，点 (x_0, y_0) 就是弦 M_1M_2 的中点. 因此将(2)代入(1)得

$$\Phi(X, Y)t^2+2[XF_1(x_0, y_0)+YF_2(x_0, y_0)]t+F(x_0, y_0)=0,$$

有

$$t_1+t_2=0,$$

即

$$XF_1(x_0, y_0)+YF_2(x_0, y_0)=0. \tag{4}$$

因为 $X:Y$ 为任意非渐近方向，所以(4)式是关于 X, Y 的恒等式，从而有

$$F_1(x_0, y_0)=0, \quad F_2(x_0, y_0)=0.$$

反过来，适合上面两式的点 (x_0, y_0)，显然是二次曲线的中心.

这样我们就得到了下面的定理：

定理 5.2.1 点 $C(x_0, y_0)$ 是二次曲线(1)的中心，其充要条件是

$$\begin{cases}F_1(x_0, y_0)\equiv a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0,\\ F_2(x_0, y_0)\equiv a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0.\end{cases} \tag{5.2-1}$$

推论 坐标原点是二次曲线的中心，其充要条件是曲线方程里不含 x 与 y 的一次项.

所以，二次曲线(1)的中心坐标由下列方程组决定

$$\begin{cases} F_1(x, y) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ F_2(x, y) \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{5.2-2}$$

如果 $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$，那么(5.2-2)有唯一解，这时二次曲线(1)将有唯一中心，(5.2-2)的解即为中心的坐标。

如果 $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$，即 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$，那么当 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \neq \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$ 时，(5.2-2)无解，二次曲线(1)没有中心；而当 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$ 时，(5.2-2)有无数多解，这时直线 $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$（或 $a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0$）上的所有点都是二次曲线(1)的中心，这条直线叫做中心直线。

定义 5.2.4 有唯一中心的二次曲线叫做中心二次曲线，没有中心的二次曲线叫做无心二次曲线，有一条中心直线的二次曲线叫做线心二次曲线，无心二次曲线与线心二次曲线统称为非中心二次曲线。

根据这个定义与(5.2-2)，我们得二次曲线(1)按其中心的分类：

1) 中心曲线：$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$；

2) 非中心曲线：$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$，即 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$，

1° 无心曲线：$\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \neq \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$，

2° 线心曲线：$\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{a_{13}}{a_{23}}$.

从二次曲线的按渐近方向与按中心的两种初步的分类中，容易看出，椭圆型曲线与双曲型曲线都是中心曲线，而抛物型曲线是非中心曲线，它包括无心曲线与线心曲线。

定义 5.2.5 通过二次曲线的中心，而且以渐近方向为方向的直线叫做这二次曲线的渐近线.

显然，椭圆型曲线只有两条虚渐近线而无实渐近线，双曲型曲线有两条实渐近线，而抛物型曲线中的无心曲线却无渐近线，至于线心曲线它有一条实渐近线，就是它的中心直线.

定理 5.2.2 二次曲线的渐近线与这二次曲线或者没有交点，或者整条直线在这二次曲线上，成为二次曲线的组成部分.

证 设直线(2)是二次曲线(1)的渐近线，这里(x_0, y_0)为二次曲线的中心，$X:Y$ 为二次曲线的渐近方向，那么我们有

$$F_1(x_0, y_0)=F_2(x_0, y_0)=0,$$

$$\Phi(X, Y)=0.$$

因此根据§5.1中直线与二次曲线的相交情况的讨论，我们有：当点(x_0, y_0)不在二次曲线(1)上，即$F(x_0, y_0)\neq 0$时，渐近线(2)与二次曲线(1)没有交点；当点(x_0, y_0)在二次曲线(1)上，即$F(x_0, y_0)=0$时，渐近线(2)全部在二次曲线上，成为二次曲线的组成部分.

习 题

1. 求下列二次曲线的渐近方向，并指出曲线是属于何种类型的.

(1) $x^2+2xy+y^2+3x+y=0$;

(2) $3x^2+4xy+2y^2-6x-2y+5=0$;

(3) $2xy-4x-2y+3=0$.

2. 判断下列二次曲线是中心曲线，无心曲线还是线心曲线.

(1) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$;

(2) $x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$;

(3) $2y^2+8x+12y-3=0$;

(4) $9x^2-6xy+y^2-6x+2y=0$.

3. 求下列二次曲线的中心.

(1) $5x^2-2xy+3y^2-2x+3y-6=0$;

(2) $2x^2+5xy+2y^2-6x-3y+5=0$;

(3) $9x^2-30xy+25y^2+8x-15y=0$;

(4) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$.

4. 当 a、b 满足什么条件时，二次曲线

$$x^2+6xy+ay^2+3x+by-4=0$$

(1) 有唯一的中心；(2) 没有中心；(3) 有一条中心直线。

5. 试证明如果二次曲线

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

有渐近线，那么它的两渐近线方程是

$$\begin{aligned}&\Phi(x-x_0,\ y-y_0)\\ &\equiv a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2\\ &=0\end{aligned}$$

式中 $(x_0,\ y_0)$ 为二次曲线的中心。

6. 求下列二次曲线的渐近线。

(1) $6x^2-xy-y^2+3x+y-1=0$;

(2) $x^2-3xy+2y^2+x-3y+4=0$;

(3) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$.

7. 试证二次曲线成为线心曲线的充要条件是 $I_2=I_3=0$，成为无心曲线的充要条件是 $I_2=0$，$I_3\neq 0$。

8. 证明以直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 为渐近线的二次曲线方程总能写成 $(A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)+D=0$。

9. 求下列二次曲线的方程。

(1) 以点 $(0,\ 1)$ 为中心，且通过点 $(2,\ 3)$，$(4,\ 2)$ 与 $(-1,\ -3)$；

(2) 通过点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(-1,\ -2)$ 且以直线 $x+y-1=0$ 为渐近线。

§5.3 二次曲线的切线

定义 5.3.1 如果直线与二次曲线相交于相互重合的两个点，那么这条直线就叫做二次曲线的**切线**，这个重合的交点叫做**切点**。如果直线全部在二次曲线上，我们也称它为二次曲线的切线，直线上的每一个点都可以看作切点。

现在我们来求经过二次曲线

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

上的点(x_0, y_0)的切线方程. 因为通过(x_0, y_0)的直线总可写成

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt. \end{cases} \quad (2)$$

那么根据§5.1的讨论，容易知道直线(2)成为二次曲线(1)的切线的条件，当$\Phi(X, Y) \neq 0$时是

$$\Delta = [XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0)]^2 - \Phi(X, Y)F(x_0, y_0) = 0. \quad (5.3\text{-}1)$$

因为(x_0, y_0)在(1)上，所以$F(x_0, y_0) = 0$; 因而(5.3-1)可以化为

$$XF_1(x_0, y_0) + YF_2(x_0, y_0) = 0. \quad (5.3\text{-}2)$$

当$\Phi(X, Y) = 0$时，直线(2)成为二次曲线(1)的切线的条件除了$F(x_0, y_0) = 0$外，唯一的条件仍然是(5.3-2).

如果$F_1(x_0, y_0)$与$F_2(x_0, y_0)$不全为零，那么由(5.3-2)得:

$$X:Y = F_2(x_0, y_0):(-F_1(x_0, y_0)),$$

因此过(x_0, y_0)的切线方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + F_2(x_0, y_0) \cdot t, \\ y = y_0 - F_1(x_0, y_0) \cdot t, \end{cases}$$

或写成

$$\frac{x - x_0}{F_2(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-F_1(x_0, y_0)},$$

或

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0) = 0. \quad (5.3\text{-}3)$$

如果$F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$, 那么(5.3-2)变为恒等式，切线的方向$X:Y$不能唯一地被确定，从而切线不确定，这时通过$(x_0, y_0)$的任何直线都和二次曲线(1)相交于相互重合的两点，我们把这样的直线也看成是二次曲线(1)的切线.

定义 5.3.2 二次曲线(1)上满足条件$F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$的点$(x_0, y_0)$叫做二次曲线的奇异点，简称奇点；二次曲线

的非奇异点叫做二次曲线的**正常点**。

这样我们就得到了下面的定理.

定理5.3.1 如果(x_0, y_0)是二次曲线(1)的正常点，那么通过(x_0, y_0)的切线方程是(5.3-3)，(x_0, y_0)是它的切点. 如果(x_0, y_0)是二次曲线(1)的奇异点，那么通过(x_0, y_0)的切线不确定，或者说通过点(x_0, y_0)的每一条直线都是二次曲线(1)的切线.

推论 如果(x_0, y_0)是二次曲线(1)的正常点，那么通过(x_0, y_0)的切线方程是

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{22}y_0y+a_{13}(x+x_0)$$
$$+a_{23}(y+y_0)+a_{33}=0 \tag{5.3-4}$$

证 把(5.3-3)改写为

$$xF_1(x_0, y_0)+yF_2(x_0, y_0)$$
$$-[x_0F_1(x_0, y_0)+y_0F_2(x_0, y_0)]=0,$$

再根据本章开始时介绍的恒等式，上式又可写为

$$xF_1(x_0, y_0)+yF_2(x_0, y_0)+F_3(x_0, y_0)=0. \tag{5.3-5}$$

即

$$x(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})+y(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})$$
$$+(a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33})=0,$$

从而得(5.3-4).

公式(5.3-4)便于记忆，记忆的方法是在原方程(1)中，

把　　x^2　　$2xy$　　y^2　　$2x$　　$2y$

写成　　xx　　$xy+xy$　　yy　　$x+x$　　$y+y$

然后每一项中一个x或y用x_0或y_0代入后，写成

$$x_0x \quad x_0y+xy_0 \quad y_0y \quad x+x_0 \quad y+y_0$$

就得出(5.3-4).

例1 求二次曲线$x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$在点$(2, 1)$的切线方程.

解法一 因为 $F(2, 1)=4-2+1+4-4-3=0$, 且

$$F_1(2, 1)=\frac{5}{2}\neq 0, \quad F_2(2, 1)=-2\neq 0,$$

所以(2, 1)是二次曲线上的正常点, 因此由(5.3-3)得在点(2, 1)的切线方程为

$$\frac{5}{2}(x-2)-2(y-1)=0$$

即
$$5x-4y-6=0.$$

解法二 因为(2, 1)是曲线上的正常点, 所以直接利用(5.3-4)得切线方程为

$$2x-\frac{1}{2}(x+2y)+y+(x+2)-2(y+1)-3=0,$$

即
$$5x-4y-6=0.$$

例 **2** 求二次曲线 $x^2-xy+y^2-1=0$ 通过点(0, 2)的切线方程.

解法一 因为 $F(0, 2)=3$, 所以点(0, 2)不在曲线上, 所以不能直接应用公式(5.3-3)或(5.3-4).

因为过点(0, 2)的直线可以写成

$$\begin{cases} x=Xt, \\ y=2+Yt, \end{cases}$$

其中 t 为参数, X, Y 为直线的方向数. 又因为

$$F_1(0, 2)=-1, \quad F_2(0, 2)=2,$$

所以根据直线与二次曲线的相切条件(5.3-1)得

$$[-X+2Y]^2-3(X^2-XY+Y^2)=0,$$

化简得
$$2X^2+XY-Y^2=0,$$

从而有
$$(2X-Y)(X+Y)=0.$$

再由过点(0, 2)的直线方程得

$$X:Y=x:(y-2),$$

代入上式得

$$(2x-y+2)(x+y-2)=0,$$

所以 $$2x-y+2=0,\quad x+y-2=0,$$

这两直线的方向分别为 $1:2$ 与 $1:(-1)$，显然它们都不是已知二次曲线的渐近方向，所以这两直线就是所求的过点 $(0,\ 2)$ 的切线.

解法二 设过 $(0,2)$ 的切线与已知二次曲线相切于点 (x_0,y_0)，那么切线方程为

$$x_0x-\frac{1}{2}(x_0y+xy_0)+y_0y-1=0,$$

即

$$\left(x_0-\frac{1}{2}y_0\right)x-\left(\frac{1}{2}x_0-y_0\right)y-1=0, \tag{3}$$

因为它通过 $(0,\ 2)$，所以 $(0,\ 2)$ 满足方程，将 $(0,\ 2)$ 代入化简得

$$x_0-2y_0+1=0, \tag{4}$$

另一方面点 $(x_0,\ y_0)$ 在曲线上，所以又有

$$x_0^2-x_0y_0+y_0^2-1=0, \tag{5}$$

联立解 (4)，(5) 得切点坐标

$$\begin{cases}x_0=-1,\\ y_0=0;\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}x_0=1,\\ y_0=1.\end{cases}$$

将切点坐标代入 (3) 得所求的切线方程为

$$2x-y+2=0\quad 与\quad x+y-2=0.$$

习　　题

1. 求以下二次曲线在所给点或经过所给点的切线方程.

(1) 曲线 $3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$ 在点 $(2,\ 1)$；

(2) 曲线 $5x^2+7xy+y^2-x+2y=0$ 在原点；

(3) 曲线 $x^2+xy+y^2+x+4y+3=0$，经过点 $(-2,\ -1)$；

(4) 曲线 $5x^2+6xy+5y^2=8$ 经过点 $(0,\ 2\sqrt{2})$；

(5) 曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$，经过点 $(0,\ 2)$.

2. 求以下曲线的切线方程，并求出切点的坐标.

(1) 曲线 $x^2+4xy+3y^2-5x-6y+3=0$ 的切线平行于直线 $x+4y=0$;

(2) 曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 的切线平行于两坐标轴;

3. 求下列二次曲线的奇异点.

(1) $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0$;

(2) $2xy+y^2-2x-1=0$;

(3) $x^2-2xy+y^2-2x+2y+1=0$.

4. 试求经过原点且切直线 $4x+3y+2=0$ 于点 $(1, -2)$ 及切直线 $x-y-1=0$ 于点 $(0, -1)$ 的二次曲线方程.

5. 设有共焦点的曲线族 $\frac{x^2}{a^2+h}+\frac{y^2}{b^2+h}=1$, 这里 h 是一个变动的参数, 作平行于已知直线 $y=mx$ 的曲线的切线, 求这些切线切点的轨迹方程.

§5.4 二次曲线的直径

1. 二次曲线的直径

在§5.1中我们已经讨论了直线与二次曲线相交的各种情况, 当直线平行于二次曲线的某一非渐近方向时, 这条直线与二次曲线总交于两点(两不同实的, 两重合实的或一对共轭虚的), 这两点决定了二次曲线的一条弦. 现在我们来研究二次曲线上一族平行弦的中点轨迹.

定理 5.4.1 二次曲线的一族平行弦的中点轨迹是一条直线.

证 设 $X:Y$ 是二次曲线的一个非渐近方向, 即 $\Phi(X, Y)\neq 0$, 而 (x_0, y_0) 是平行于方向 $X:Y$ 的弦的中点, 那么过 (x_0, y_0) 的弦为

$$\begin{cases}x=x_0+Xt,\\ y=y_0+Yt.\end{cases}$$

它与二次曲线 $F(x, y)=0$ 的两交点 (即弦的两端点) 由下列二次方程

$$\Phi(X, Y)t^2+2[XF_1(x_0, y_0)+YF_2(x_0, y_0)]t$$
$$+F(x_0, y_0)=0 \qquad (1)$$

的两根 t_1 与 t_2 所决定，因为(x_0, y_0)为弦的中点，所以有

$$t_1+t_2=0,$$

从而有 $$XF_1(x_0, y_0)+YF_2(x_0, y_0)=0.$$

这就是说平行于方向 $X:Y$ 的弦的中点(x_0, y_0)的坐标满足方程

$$XF_1(x, y)+YF_2(x, y)=0, \qquad (5.4\text{-}1)$$

即

$$X(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+Y(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0, \qquad (5.4\text{-}2)$$

或

$$(a_{11}X+a_{12}Y)x+(a_{12}X+a_{22}Y)y+a_{13}X+a_{23}Y=0. \qquad (5.4\text{-}3)$$

反过来，如果点 (x_0, y_0) 满足方程 (5.4-1) 或 (5.4-2) 或 (5.4-3)，那么方程 (1) 中将有绝对值相等而符号相反的两个根，点(x_0, y_0)就是具有方向 $X:Y$ 的弦的中点，因此方程 (5.4-1) 或 (5.4-2)或(5.4-3)为一族平行于某一非渐近方向 $X:Y$ 的弦的中点轨迹方程.

方程(5.4-3)的一次项系数不能全为零，这是因为当

$$a_{11}X+a_{12}Y=a_{12}X+a_{22}Y=0$$

时，将有

$$\Phi(X, Y)\equiv a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2$$
$$=(a_{11}X+a_{12}Y)X+(a_{12}X+a_{22}Y)Y=0,$$

这与 $X:Y$ 是非渐近方向的假设矛盾，所以(5.4-3)或(5.4-1)是一个二元一次方程，它是一条直线，于是定理得到了证明.

定义 5.4.1 二次曲线的平行弦中点的轨迹叫做这个二次曲线的直径，它所对应的平行弦，叫做共轭于这条直径的共轭弦；而直径也叫做共轭于平行弦方向的直径.

推论 如果二次曲线的一族平行弦的斜率为 k，那么共轭于这族平行弦的直径方程是

$$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0. \tag{5.4-4}$$

我们从方程(5.4-1)或(5.4-4)容易看出，如果

$$F_1(x, y)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0, \tag{2}$$

$$F_2(x, y)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0, \tag{3}$$

表示两不同直线时，(5.4-1)或(5.4-4)将构成一直线束，当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{12}}{a_{22}}$ 时为中心直线束，当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 时为平行直线束(§ 3.8 习题 9)；如果(2)与(3)表示同一直线，这时 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$，那么(5.4-1)或(5.4-4)只表示一条直线.

如果(2)与(3)中有一为矛盾方程，比如(2)中 $a_{11}=a_{12}=0$，$a_{13}\neq 0$，这时 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 成立且(5.4-1)或(5.4-4)仍表示一平行直线束；如果(2)与(3)中有一为恒等式，比如(2)中 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$，这时 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 成立且(5.4-1)或(5.4-4)只表示一条直线.

因此当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{12}}{a_{22}}$，即二次曲线为中心曲线时，它的全部直径属于一个中心直线束，这个直线束的中心就是二次曲线的中心；当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$，即二次曲线为无心曲线时，它的全部直径属于一个平行直线束，它的方向为二次曲线的渐近方向 $X:Y=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}$；当 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$，即二次曲线为线心曲线时，这时二次曲线只有一条直径，它的方程是

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \quad (\text{或 } a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0),$$

即线心二次曲线的中心直线，因此我们有：

定理5.4.2 中心二次曲线的直径通过曲线的中心，无心二次曲线的直径平行于曲线的渐近方向，线心二次曲线的直径只有一条，就是曲线的中心直线.

例1 求椭圆或双曲线 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ 的直径.

解
$$F(x, y)\equiv\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$
$$F_1(x, y)=\frac{x}{a^2},\quad F_2(x, y)=\pm\frac{y}{b^2}.$$

根据(5.4-1)，共轭于非渐近方向 $X:Y$ 的直径方程是
$$\frac{X}{a^2}x\pm\frac{Y}{b^2}y=0,$$
显然，直径通过曲线的中心(0, 0).

例2 求抛物线 $y^2=2px$ 的直径.

解
$$F(x, y)\equiv 2px-y^2=0,$$
$$F_1(x, y)=p,\quad F_2(x, y)=-y.$$

所以共轭于非渐近方向 $X:Y$ 的直径为
$$Xp-Yy=0,$$
即
$$y=\frac{X}{Y}p,$$
所以抛物线 $y^2=2px$ 的直径平行于它的渐近方向 1:0.

例3 求二次曲线 $F(x, y)\equiv x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$ 的共轭于非渐近方向 $X:Y$ 的直径.

解 $\because$ $F_1(x, y)=x-y+1,\quad F_2(x, y)=-x+y-1,$

$\therefore$ 直径方程为
$$X(x-y+1)+Y(-x+y-1)=0,$$
即
$$(X-Y)(x-y+1)=0.$$

因为已知曲线 $F(x, y)=0$ 的渐近方向为 $X':Y'=1:1$，所以对于非渐近方向 $X:Y$ 一定有 $X\neq Y$，因此曲线的共轭于非渐近

方向 $X:Y$ 的直径为

$$x-y+1=0,$$

它只有一条直径.

2. 共轭方向与共轭直径

我们把二次曲线的与非渐近方向 $X:Y$ 共轭的直径方向

$$X':Y'=-(a_{12}X+a_{22}Y):(a_{11}X+a_{12}Y) \tag{4}$$

叫做非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向，所以有

$$X'=-(a_{12}X+a_{22}Y)t,\quad Y'=(a_{11}X+a_{12}Y)t,$$

其中 $t\neq 0$，因此有

$$\begin{aligned}\Phi(X',Y')&=a_{11}(a_{12}X+a_{22}Y)^2t^2-2a_{12}(a_{12}X+a_{22}Y)\\&\quad\cdot(a_{11}X+a_{12}Y)t^2+a_{22}(a_{11}X+a_{12}Y)^2t^2\\&=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2)t^2\\&=I_2\Phi(X,Y)t^2,\end{aligned}$$

因为 $X:Y$ 为非渐近方向，所以 $\Phi(X,Y)\neq 0$，另外又有 $t\neq 0$，因此，当 $I_2\neq 0$ 即二次曲线为中心曲线时，$\Phi(X',Y')\neq 0$；当 $I_2=0$ 即二次曲线为非中心曲线时，$\Phi(X',Y')=0$. 这就是说，**中心二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向，而在非中心二次曲线的情形是渐近方向.**

由(4)得二次曲线的非渐近方向 $X:Y$ 与它的共轭方向 $X':Y'$ 之间的关系

$$a_{11}XX'+a_{12}(XY'+X'Y)+a_{22}YY'=0. \tag{5.4-5}$$

从(5.4-5)式看出，两个方向 $X:Y$ 与 $X':Y'$ 是对称的，因此对中心曲线来说，非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向为非渐近方向 $X':Y'$，而 $X':Y'$ 的共轭方向就是 $X:Y$.

定义 5.4.2 中心曲线的一对具有相互共轭方向的直径叫做**一对共轭直径.**

设 $\frac{Y}{X}=k,\quad \frac{Y'}{X'}=k'$，代入(5.4-5)，得

$$a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0, \tag{5.4-6}$$

这就是一对共轭直径的斜率满足的关系式.

例如椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一对共轭直径的斜率 k 与 k' 有着关系

$$\frac{1}{b^2}\cdot kk'+\frac{1}{a^2}=0,$$

即

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}, \tag{5.4-7}$$

而双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一对共轭直径的斜率 k 与 k' 有着关系

$$kk'=\frac{b^2}{a^2}. \tag{5.4-8}$$

在(5.4-5)中，如果设

$$X':Y'=X:Y,$$

那么有
$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=0,$$
显然此时 $X:Y$ 为二次曲线的渐近方向. 因此如果对二次曲线的共轭方向从(5.4-5)作代数的推广，那么渐近方向可以看成与自己共轭的方向，从而渐近线也就可以看成与自己共轭的直径.

习　题

1. 已知二次曲线 $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$. 求它的

(1) 与 x 轴平行的弦的中点轨迹；

(2) 与 y 轴平行的弦的中点轨迹；

(3) 与直线 $x+y+1=0$ 平行的弦的中点轨迹.

2. 求曲线 $x^2+2y^2-4x-2y-6=0$ 通过点(8, 0)的直径方程，并求其共轭直径.

3. 已知曲线 $xy-y^2-2x+3y-1=0$ 的直径与 y 轴平行，求它的方程，并求出这直径的共轭直径.

4. 已知抛物线 $y^2=-8x$，通过点 $(-1, 1)$ 引一弦，使它在这点被平分.

5. 求双曲线 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$ 的一对共轭直径方程，已知两共轭直径间的角是 $45°$.

6. 试证：通过中心二次曲线中心的直线，一定是中心二次曲线的直径；平行于无心二次曲线渐近方向的直线，一定是无心二次曲线的直径.

7. 求下列两条二次曲线的公共直径.

(1) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$ 与 $2x^2-3xy-y^2+3x+2y=0$;

(2) $x^2-xy-y^2-x-y=0$ 与 $x^2+2xy+y^2-x+y=0$.

8. 已知二次曲线通过原点，并且以下列两对直线

$$\left.\begin{array}{r}x-3y-2=0,\\5x-5y-4=0,\end{array}\right\} \text{ 与 } \left.\begin{array}{r}5y+3=0,\\2x-y-1=0,\end{array}\right\}$$

为它的两对共轭直径，求这二次曲线的方程.

§5.5 二次曲线的主直径与主方向

定义 5.5.1 二次曲线的垂直于其共轭弦的直径叫做二次曲线的**主直径**，主直径的方向与垂直于主直径的方向都叫做二次曲线的**主方向**.

显然，主直径是二次曲线的对称轴，因此主直径也叫做二次曲线的**轴**，轴与曲线的交点叫做曲线的**顶点**.

现在我们来求二次曲线

$$F(x, y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

的主方向与主直径.

如果二次曲线(1)为中心曲线，那么与二次曲线(1)的非渐近方向 $X:Y$ 共轭的直径为(5.4-1)或(5.4-3)．设直径的方向为 $X':Y'$，那么

$$X':Y'=-(a_{12}X+a_{22}Y):(a_{11}X+a_{12}Y), \tag{2}$$

根据主方向的定义，$X:Y$ 成为主方向的条件是它垂直于它的共轭方向，在直角坐标系下，由(1.7-14′)得

$$XX'+YY'=0 \text{ 或 } X':Y'=-Y:X, \tag{3}$$

(3)代入(2)得

$$X:Y=(a_{11}X+a_{12}Y):(a_{12}X+a_{22}Y), \tag{4}$$

因此 $X:Y$ 成为中心二次曲线(1)的主方向的条件是

$$\begin{cases}a_{11}X+a_{12}Y=\lambda X,\\ a_{12}X+a_{22}Y=\lambda Y\end{cases} \tag{5.5-1}$$

成立，其中 $\lambda\neq 0$，或把它改写成

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)X+a_{12}Y=0,\\ a_{12}X+(a_{22}-\lambda)Y=0.\end{cases} \tag{5.5-1′}$$

这是一个关于 X, Y 的齐次线性方程组，而 X, Y 不能全为零，所以

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0, \tag{5.5-2}$$

即

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0. \tag{5.5-3}$$

因此对于中心二次曲线来说，只要由(5.5-3)解出 λ，再代入(5.5-1)就能得到它的主方向.

如果二次曲线(1)为非中心二次曲线，那么它的任何直径的方向总是它的唯一的渐近方向

$$X_1:Y_1=-a_{12}:a_{11}=a_{22}:(-a_{12}),$$

而垂直于它的方向显然为

$$X_2:Y_2=a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22},$$

所以非中心二次曲线(1)的主方向为：

渐近主方向

$$X_1:Y_1=-a_{12}:a_{11}=a_{22}:(-a_{12}), \tag{5}$$

非渐近主方向

$$X_2:Y_2=a_{11}:a_{12}=a_{12}:a_{22}. \tag{6}$$

如果我们把(5.5-2)或(5.5-3)推广到非中心二次曲线，即式中的 I_2 可取等于零，这样当 $I_2=0$ 时，方程(5.5-3)的两根为

$$\lambda_1=0, \qquad \lambda_2=I_1=a_{11}+a_{22},$$

把它代入(5.5-1)或(5.5-2)所得的主方向，正是非中心二次曲线的渐近主方向与非渐近主方向.

因此，一个方向 $X:Y$ 成为二次曲线(1)的主方向的条件是(5.5-1)成立，这里的 λ 是方程(5.5-2)或(5.5-3)的根.

定义 5.5.2 方程(5.5-2)或(5.5-3)叫做二次曲线(1)的**特征方程**，特征方程的根叫做二次曲线的**特征根**.

从二次曲线(1)的特征方程(5.5-3)求出特征根 λ，把它代入(5.5-1)或(5.5-1′). 我们就得到相应的主方向，如果主方向为非渐近方向，那么根据(5.4-1)就能得到共轭于它的主直径.

定理 5.5.1 二次曲线的特征根都是实数.

证 因为特征方程的判别式

$$\Delta=I_1^2-4I_2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0.$$

所以二次曲线的特征根都是实数.

定理 5.5.2 二次曲线的特征根不能全为零.

证 如果二次曲线的特征根全为零，那么由(5.5-3)得

$$I_1=I_2=0,$$

即 $$a_{11}+a_{22}=0 \quad 与 \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,$$

从而得 $$a_{11}=a_{12}=a_{22}=0,$$

这与二次曲线的定义矛盾，所以二次曲线的特征根不能全为零.

定理 5.5.3 由二次曲线(1)的特征根 λ 确定的主方向 $X:Y$，当 $\lambda\neq 0$ 时，为二次曲线的非渐近主方向；当 $\lambda=0$ 时，为二次曲线的渐近主方向.

证 因为

$$\Phi(X, Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2$$
$$=(a_{11}X+a_{12}Y)X+(a_{12}X+a_{22}Y)Y.$$

所以由(5.5-1)得

$$\Phi(X, Y)=\lambda X^2+\lambda Y^2=\lambda(X^2+Y^2).$$

又因为 X, Y 不全为零,所以当 $\lambda\neq0$ 时, $\Phi(X, Y)\neq0$, $X:Y$ 为二次曲线(1)的非渐近主方向; 当 $\lambda=0$ 时, $\Phi(X, Y)=0$, $X:Y$ 为二次曲线(1)的渐近主方向.

定理 5.5.4 中心二次曲线至少有两条主直径,非中心二次曲线只有一条主直径.

证 由二次曲线(1)的特征方程(5.5-3)解得两特征根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{I_1\pm\sqrt{I_1^2-4I_2}}{2}.$$

1° 当二次曲线(1)为中心曲线时, $I_2\neq0$. 如果特征方程的判别式 $\Delta=I_1^2-4I_2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2=0$, 那么 $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$, 这时的中心曲线为圆(包括点圆和虚圆), 它的特征根为一对二重根,

$$\lambda=a_{11}=a_{22}(\neq0).$$

把它代入(5.5-1)或(5.5-1′),则得到两个恒等式. 它被任何方向 $X:Y$ 所满足,所以任何实方向都是圆的非渐近主方向,从而通过圆心的任何直线不仅都是直径(见§5.4习题6),而且都是圆的主直径.

如果特征方程的判别式 $\Delta=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2>0$, 那么特征根为两不等的非零实根 λ_1, λ_2. 将它们分别代入(5.5-1′)得相应的两非渐近主方向为

$$X_1:Y_1=a_{12}:(\lambda_1-a_{11})=(\lambda_1-a_{22}):a_{12}, \tag{7}$$

$$X_2:Y_2=a_{12}:(\lambda_2-a_{11})=(\lambda_2-a_{22}):a_{12}. \tag{8}$$

这两主方向相互垂直(见本节习题4),从而它们又互相共轭,因此非圆的中心二次曲线有而且只有一对互相垂直从而又互相共轭的主直径.

2° 当二次曲线(1)为非中心曲线时,$I_2=0$,这时两特征根为

$$\lambda_1=a_{11}+a_{22},\qquad \lambda_2=0.$$

所以它只有一个非渐近的主方向,即与 $\lambda_1=a_{11}+a_{22}$ 相应的主方向,从而非中心二次曲线只有一条主直径.

例 1 求 $F(x, y)\equiv x^2-xy+y^2-1=0$ 的主方向与主直径.

解 $\because$ $I_1=1+1=2$, $I_2=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{4}\neq 0.$

$\therefore$ 曲线为中心曲线,它的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}=0,$$

解这方程得两特征根为:

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\qquad \lambda_2=\frac{3}{2}.$$

由特征根 $\lambda_1=\frac{1}{2}$ 确定的主方向为

$$X_1:Y_1=-\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}:\left(-\frac{1}{2}\right)=1:1,$$

由特征根 $\lambda_2=\frac{3}{2}$ 确定的主方向为

$$X_2:Y_2=-\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=-1:1,$$

又因为 $F_1(x, y)=x-\frac{1}{2}y,\ F_2(x, y)=-\frac{1}{2}x+y,$

所以曲线的主直径为

$$\left(x-\frac{1}{2}y\right)+\left(-\frac{1}{2}x+y\right)=0$$

与 $$-\left(x-\frac{1}{2}y\right)+\left(-\frac{1}{2}x+y\right)=0,$$

即 $$x+y=0 \quad 与 \quad x-y=0.$$

例 2 求曲线 $F(x, y)\equiv x^2-2xy+y^2-4x=0$ 的主方向与主直径.

解 ∵ $I_1=1+1=2,\ I_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$

∴ 曲线为非中心曲线,它的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda=0,$$

因此两特征根为

$$\lambda_1=2, \quad \lambda_2=0.$$

由这两特征根所确定的主方向为:

非渐近主方向

$$X_1:Y_1=-1:(2-1)=-1:1,$$

渐近主方向

$$X_2:Y_2=-1:(0-1)=1:1,$$

又因为 $F_1(x, y)=x-y-2,\ F_2(x, y)=-x+y,$

所以曲线的唯一主直径为

$$-(x-y-2)+(-x+y)=0,$$

即 $$x-y-1=0.$$

习 题

1. 分别求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 抛物线 $y^2=2px$ 的主方向与主直径.

2. 求下列二次曲线的主方向与主直径.

(1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$

(2) $2xy-2x+2y-1=0;$

(3) $9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0;$

(4) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$.

3．直线 $x+y+1=0$ 是二次曲线的主直径(即对称轴)，点(0,0)，(1, −1)，(2, 1)在曲线上，求这曲线的方程．

4．试证明二次曲线两不同特征根确定的主方向相互垂直．

§5.6 二次曲线方程的化简与分类

这一节，我们将在直角坐标系下，利用坐标变换，使二次曲线的方程在新坐标系里具有最简形式，然后在此基础上进行二次曲线的分类．

1．平面直角坐标变换

我们知道，如果平面内一点的旧坐标与新坐标分别为 (x, y) 与 (x', y')，那么移轴公式为①

$$\begin{cases} x=x'+x_0, \\ y=y'+y_0; \end{cases} \tag{5.6-1}$$

或

$$\begin{cases} x'=x-x_0, \\ y'=y-y_0, \end{cases} \tag{5.6-1'}$$

式中 (x_0, y_0) 为新坐标系原点在旧坐标系里的坐标．转轴公式为

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha; \end{cases} \tag{5.6-2}$$

或

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha, \end{cases} \tag{5.6-2'}$$

式中的 α 为坐标轴的旋转角．

而在一般情形，由旧坐标系 $O\text{-}xy$ 变成新坐标系 $O'\text{-}x'y'$，总可以分两步来完成，先移轴使坐标原点与新坐标系的原点 O' 重合，

① 移轴，转轴公式见六年制重点中学高中数学课本《解析几何》(平面)，人民教育出版社，1982 年第 1 版．

变成坐标系 $O'\text{-}x''y''$，然后由辅助坐标系 $O'\text{-}x''y''$ 再转轴而成新坐标系 $O'\text{-}x'y'$(图 5-1)．设平面上任意点 P 的旧坐标与新坐标分别为$(x,\ y)$与$(x',\ y')$，而在辅助坐标系 $O'\text{-}x''y''$ 中的坐标为$(x'',\ y'')$，那么由(5.6-1)与(5.6-2)分别得

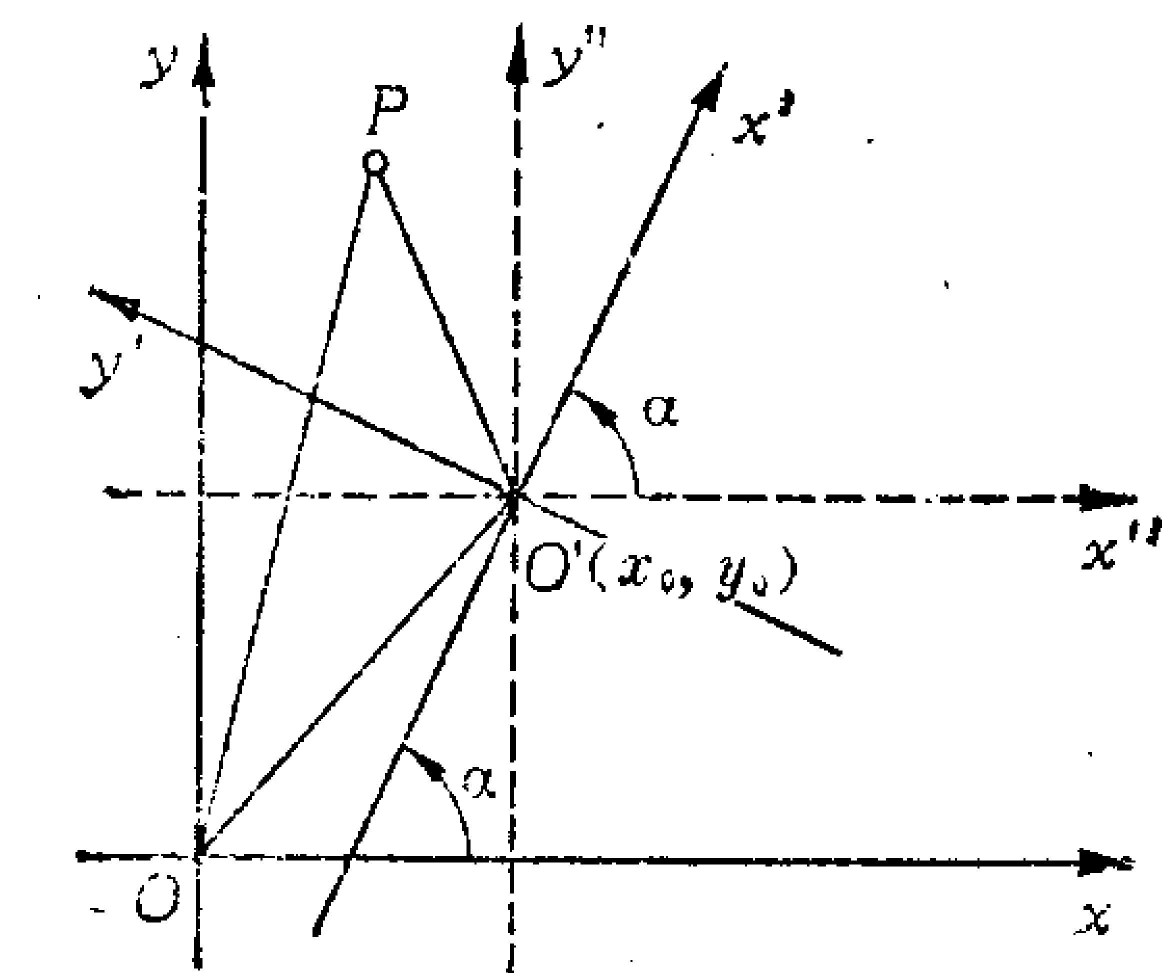


图 5-1

$$\begin{cases}x=x''+x_0,\\ y=y''+x_0;\end{cases}$$

与 $$\begin{cases}x''=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y''=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\end{cases}$$

由上两式得一般坐标变换公式为

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+x_0,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+y_0.\end{cases}\tag{5.6-3}$$

由(5.6-3)解出 x', y' 便得逆变换公式

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha-(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha),\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha-(-x_0\sin\alpha+y_0\cos\alpha).\end{cases}\tag{5.6-4}$$

平面直角坐标变换公式(5.6-3)是由新坐标系原点的坐标$(x_0,\ y_0)$与坐标轴的旋转角 α 决定的．确定坐标变换公式，除了上面的这种情况外，还可以有其它的方法．例如给出了新坐标系的两坐标轴在旧坐标系里的方程，并规定了一个轴的正方向等．现在我们就来介绍这种情况下的坐标变换公式．

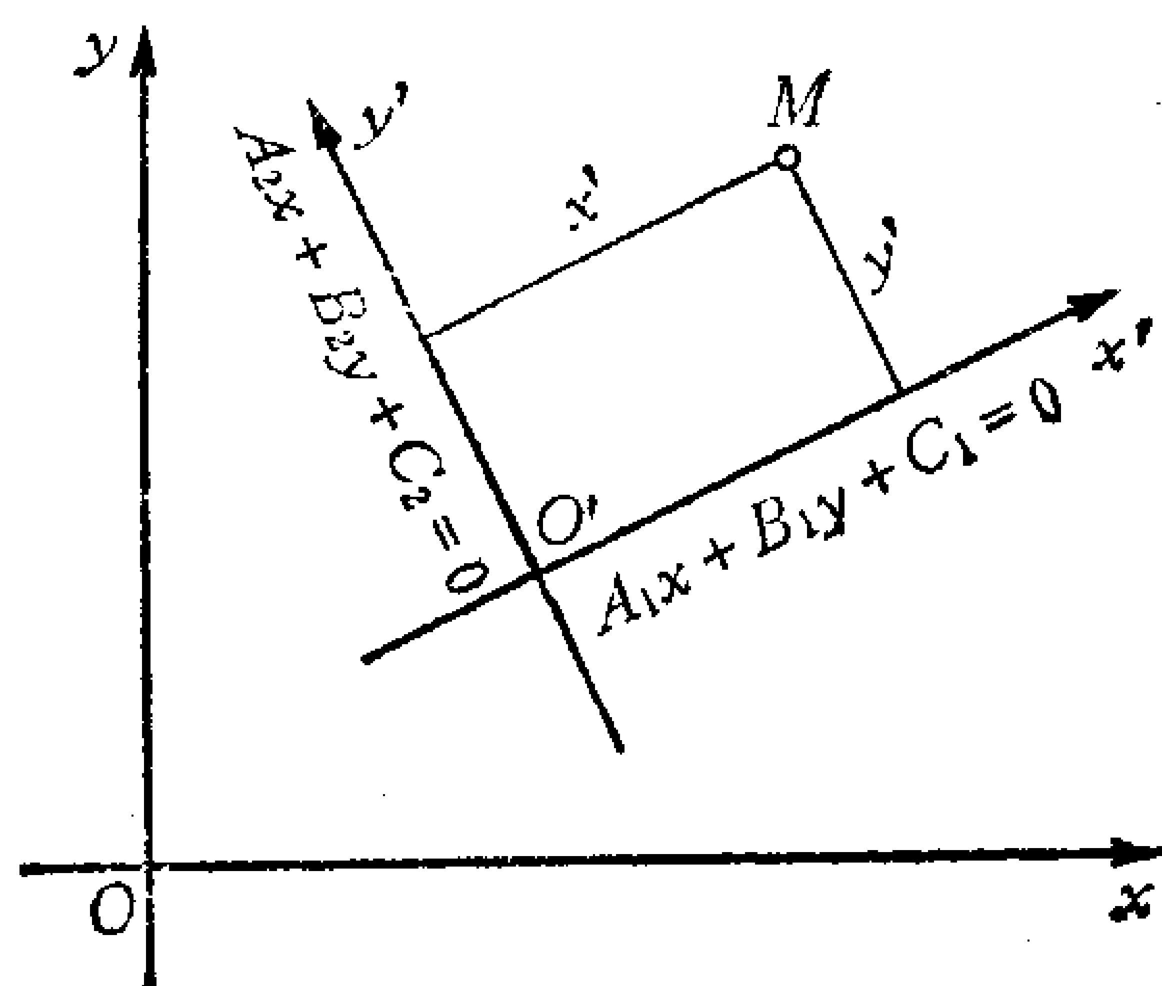


图 5-2

设在直角坐标系 xOy 里给定了两条相互垂直的直线

$$l_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

其中 $A_1A_2+B_1B_2=0$. 如果取直线 l_1 为新坐标系中的横轴 $O'x'$，而直线 l_2 为纵轴 $O'y'$，并设平面上任意点 M 的旧坐标与新坐标分别是 (x, y) 与 (x', y'). 因为 $|x'|$ 是点 $M(x, y)$ 到 $O'y'$ 轴的距离，也就是 M 点到 l_2 的距离(图 5-2)，因此我们有

$$|x'|=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

同理可得

$$|y'|=\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},$$

于是在去掉绝对值符号以后，便有

$$\begin{cases} x'=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \\ y'=\pm\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}. \end{cases} \qquad (5.6\text{-}5)$$

为了使新坐标系仍然是右手坐标系，我们来决定(5.6-5)中的符号，将(5.6-5)式与公式(5.6-4)比较得

$$\frac{\pm A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\cos\alpha,\quad \frac{\pm B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\sin\alpha,$$

$$\frac{\pm A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\sin\alpha,\quad \frac{\pm B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\cos\alpha.$$

因此(5.6-5)中的第一式右端的 x 的系数应与第二式的右端的 y 的系数相等①，所以(5.6-5)的符号选取要使得这两项的系数是同号的.

例 1 已知两垂直的直线 l_1: $2x-y+3=0$ 与 l_2: $x+2y-2=0$，取 l_1 为 $O'x'$ 轴，l_2 为 $O'y'$ 轴，求坐标变换公式.

---

① 根据垂直条件 $A_1A_2+B_1B_2=0$，有 $\frac{B_1}{A_1}=-\frac{A_2}{B_2}$，从而一定有 $\frac{|A_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\frac{|B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$.

解 设 $M(x, y)$的新坐标为(x', y')，那么有

$$x' = \pm\frac{x+2y-2}{\sqrt{5}},$$

$$y' = \pm\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}},$$

根据上面的符号选取法则得变换公式为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+2y-2}{\sqrt{5}}, \\ y' = -\dfrac{2x-y+3}{\sqrt{5}}; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x' = -\dfrac{x+2y-2}{\sqrt{5}}, \\ y' = \dfrac{2x-y+3}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

前一公式由于取的 $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} > 0$，所以旋转角为小于 π 的正角，而后一公式取的 $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 0$，所以旋转角为绝对值小于 π 的负角.

2. 二次曲线方程的化简与分类

设二次曲线的方程为

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

现在我们要选取一个适当的坐标系，也就是要确定一个坐标变换，使得曲线(1)在新坐标系下的方程最为简单，这就是二次曲线方程的化简. 为此，我们必须了解在坐标变换下二次曲线方程的系数是怎样变化的. 因为一般坐标变换是由移轴与转轴组成，所以我们分别考察在移轴与转轴下，二次曲线方程(1)的系数的变换规律.

在移轴(5.6-1)即

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

下，二次曲线(1)的新方程为

$$
\begin{aligned}
&F(x'+x_0,\ y'+y_0)\\
&\quad\equiv a_{11}(x'+x_0)^2+2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0)\\
&\qquad+a_{22}(y'+y_0)^2+2a_{13}(x'+x_0)+2a_{23}(y'+y_0)+a_{33}\\
&\quad=0.
\end{aligned}
$$

化简整理得:

$$
a_{11}'x'^2+2a_{12}'x'y'+a_{22}'y'^2+2a_{13}'x'+2a_{23}'y'+a_{33}'=0,
$$

这里

$$
\begin{cases}
a_{11}'=a_{11},\ a_{12}'=a_{12},\ a_{22}'=a_{22},\\
a_{13}'=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=F_1(x_0,\ y_0),\\
a_{23}'=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=F_2(x_0,\ y_0),\\
a_{33}'=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0\\
\qquad+2a_{23}y_0+a_{33}=F(x_0,\ y_0).
\end{cases}
\tag{5.6-6}
$$

因此在移轴(5.6-1)下,二次曲线方程系数的变换规律为:

1° 二次项系数不变;

2° 一次项系数变为 $2F_1(x_0,\ y_0)$ 与 $2F_2(x_0,\ y_0)$;

3° 常数项变为 $F(x_0,\ y_0)$.

因为当 $(x_0,\ y_0)$ 为二次曲线(1)的中心时, 有 $F_1(x_0,\ y_0)=0$, $F_2(x_0,\ y_0)=0$,所以当二次曲线有中心时, 作移轴, 使原点与二次曲线的中心重合, 那么在新坐标系下二次曲线的新方程中一次项消失.

把转轴公式(5.6-2)即

$$
\begin{cases}
x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\
y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha
\end{cases}
$$

代入(1),得在转轴(5.6-2)下二次曲线(1)的新方程为

$$
a_{11}'x'^2+2a_{12}'x'y'+a_{22}'y'^2+2a_{13}'x'+2a_{23}'y'+a_{33}'=0,
$$

这里

$$\begin{cases} a'_{11}=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12}=(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha), \\ a'_{22}=a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{13}=a_{13}\cos\alpha+a_{23}\sin\alpha, \\ a'_{23}=-a_{13}\sin\alpha+a_{23}\cos\alpha, \\ a'_{33}=a_{33}. \end{cases} \tag{5.6-7}$$

因此，在转轴下，二次曲线方程(1)的系数的变换规律为：

1° 二次项系数一般要改变．新方程的二次项系数仅与原方程的二次项系数及旋转角有关，而与一次项系数及常数项无关．

2° 一次项系数一般要改变．新方程的一次项系数仅与原方程的一次项系数及旋转角有关，与二次项系数及常数项无关，如果我们从(5.6-7)中的

$$a'_{13}=a_{13}\cos\alpha+a_{23}\sin\alpha,$$

$$a'_{23}=-a_{13}\sin\alpha+a_{23}\cos\alpha$$

解出 a_{13}, a_{23} 得

$$a_{13}=a'_{13}\cos\alpha-a'_{23}\sin\alpha,$$

$$a_{23}=a'_{13}\sin\alpha+a'_{23}\cos\alpha,$$

那么可以进一步看到，在转轴下，二次曲线方程(1)的一次项系数 a_{13}, a_{23} 的变换规律是与点的坐标 x, y 的变换规律完全一样，当原方程有一次项时，通过转轴不能完全消去一次项，当原方程无一次项时，通过转轴也不会产生一次项．

3° 常数项不变．

二次曲线方程(1)里，如果 $a_{12}\neq 0$，我们往往使用转轴使新方程中的 $a'_{12}=0$．为此，我们只要取旋转角 α，使得

$$a'_{12}=(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0,$$

即 $$(a_{22}-a_{11})\sin 2\alpha+2a_{12}\cos 2\alpha=0,①$$

① 这里的 $\sin 2\alpha\neq 0$，否则将有 $a_{12}=0$，与假设矛盾．

所以

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}. \tag{5.6-8}$$

因为余切的值可以是任意的实数，所以总有 α 满足(5.6-8)，也就是说总可以经过适当的转轴消去(1)的 xy 项.

例 2 化简二次曲线方程

$$x^2+4xy+4y^2+12x-y+1=0,$$

并画出它的图形.

解 因为二次曲线的方程含有 xy 项，因此我们总可以先通过转轴消去 xy 项. 设旋转角为 α，那么由(5.6-8)得：

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=-\frac{3}{4},$$

即

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{3}{4},$$

所以

$$2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0,$$

从而得

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2} \text{ 或 } 2.$$

取 $\operatorname{tg}\alpha=2$①，那么 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以得转轴公式为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y'), \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y'). \end{cases}$$

代入原方程化简整理得转轴后的新方程为

$$5x'^2+2\sqrt{5}\,x'-5\sqrt{5}\,y'+1=0.$$

利用配方使上式化为

---

① 如果取 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$，同样能消去 xy 项.

$$\left(x'+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\sqrt{5}\,y'=0,$$

再作移轴
$$\begin{cases}x'=x''-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\\ y'=y''.\end{cases}$$

曲线方程化为最简形式

$$x''^2-\sqrt{5}\,y''=0.$$

或写成标准方程为

$$x''^2=\sqrt{5}\,y''.$$

这是一条抛物线，它的顶点是新坐标系 O''-$x''y''$ 的原点. 原方程的图形可以根据它在坐标系 O''-$x''y''$ 中的标准方程作出，它的图形如图 5-3 所示.

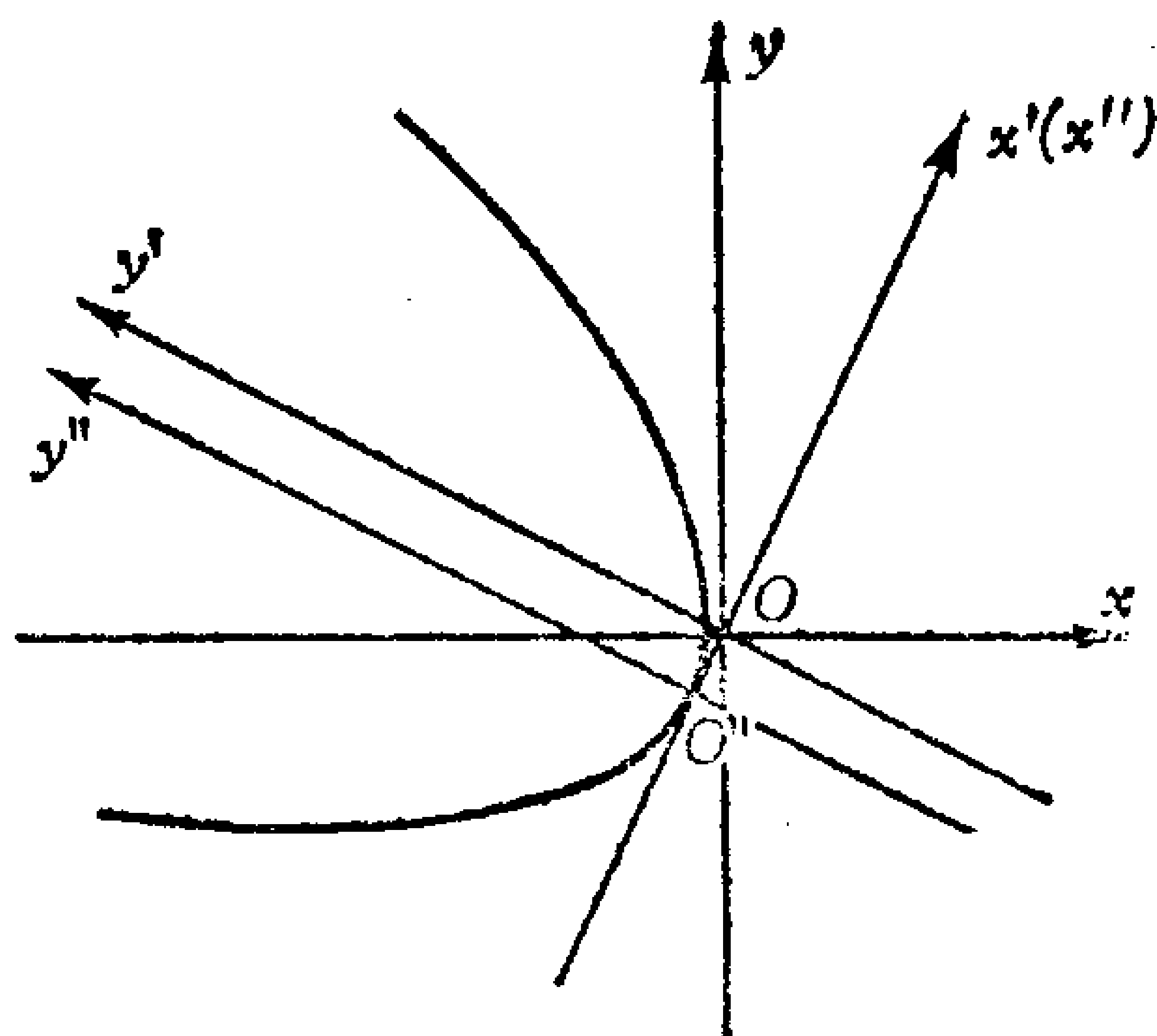


图 5-3

利用坐标变换化简二次曲线的方程，如果曲线有中心，那么为了计算方便，往往先移轴后转轴.

例 3 化简二次曲线方程

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0,$$

并画出它的图形.

解 因为 $I_2=\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\neq 0,$

所以曲线为中心二次曲线，解方程组

$$\begin{cases}F_1(x,\ y)\equiv x-\dfrac{1}{2}y+1=0,\\ F_2(x,\ y)\equiv -\dfrac{1}{2}x+y-2=0,\end{cases}$$

得中心的坐标为 $x=0,\ y=2$，取(0, 2)为新原点，作移轴

$$\begin{cases}x=x',\\ y=y'+2.\end{cases}$$

原方程变为 $$x'^2-x'y'+y'^2-4=0.$$

再转轴消去 $x'y'$ 项，由(5.6–8)得

$$\operatorname{ctg}2\alpha=0,$$

从而可取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，故转轴公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''-y''),\\ y'=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''+y''),\end{cases}$$

经转轴后曲线的方程化为最简形式

$$\frac{1}{2}x''^2+\frac{3}{2}y''^2-4=0,$$

或写成标准形式

$$\frac{x''^2}{8}+\frac{y''^2}{\frac{8}{3}}=1.$$

这是一个椭圆，它的图形如图5–4所示.

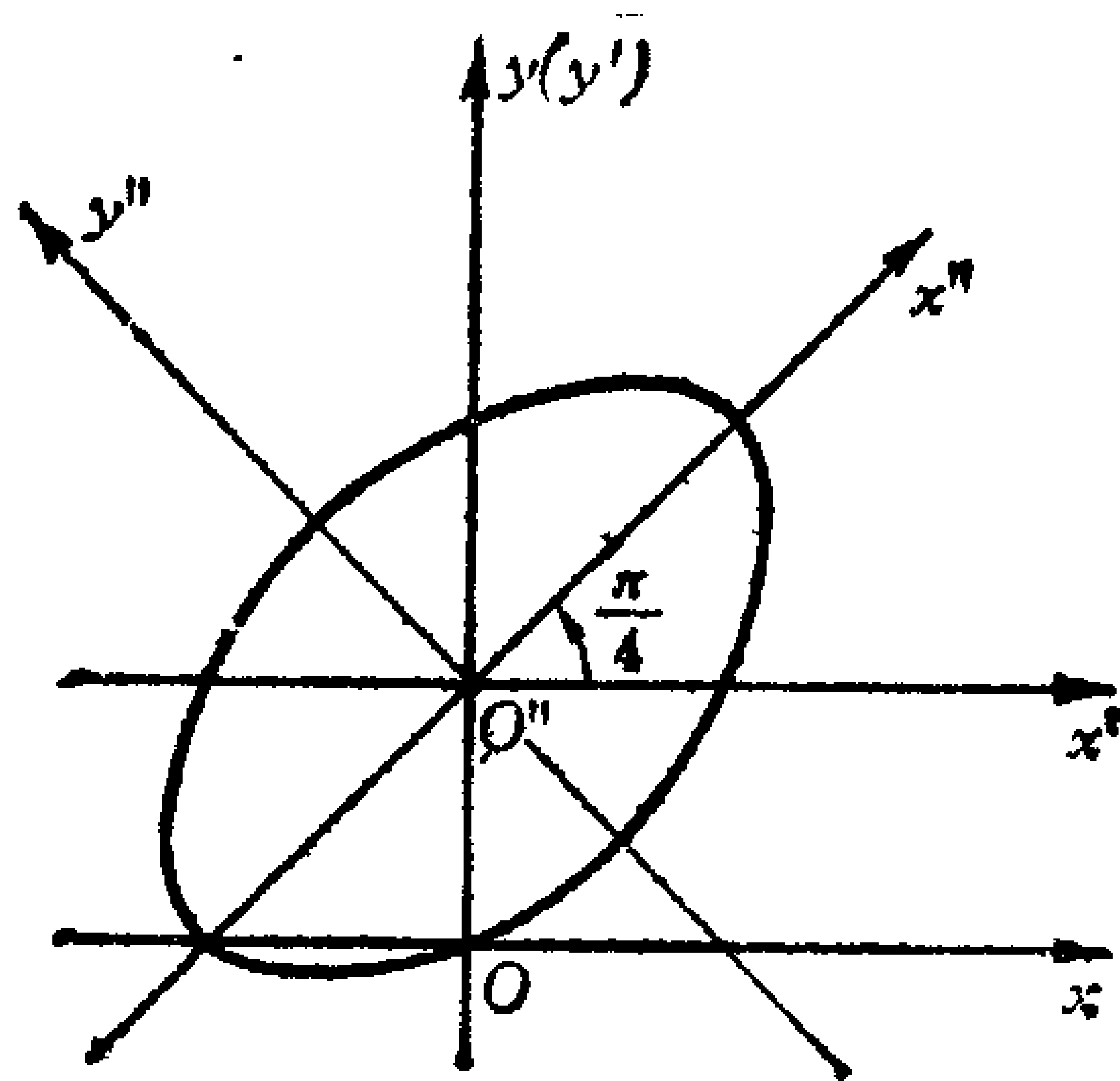


图 5–4

利用转轴来消去二次曲线方程的 xy 项，它有一个几何意义，就是把坐标轴旋转到与二次曲线的主方向平行的位置. 这是因为如果二次曲线的特征根 λ 确定的主方向为 $X:Y$，那么由(5.5–1′)立刻得：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{Y}{X}=\frac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}=\frac{\lambda-a_{11}}{a_{12}},$$

$$\therefore \quad \operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\left(\dfrac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}\right)^2}{2\cdot\dfrac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}}$$

$$=\frac{1-\left(\dfrac{a_{12}}{\lambda-a_{22}}\right)\left(\dfrac{\lambda-a_{11}}{a_{12}}\right)}{\dfrac{2a_{12}}{\lambda-a_{22}}}=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

因此，上面介绍的通过转轴与移轴来化简二次曲线方程的方法，实际上是把坐标轴变换到与二次曲线的主直径(即对称轴)重合的位置. 如果是中心曲线，坐标原点与曲线的中心重合；如果是无心曲线，坐标原点与曲线的顶点重合；如果是线心曲线，坐标原点可以与曲线的任何一个中心重合. 因此，二次曲线方程的化简，只要先求出曲线(1)的主直径，然后以它作为新坐标轴，作坐标变换即可.

例 4 化简二次曲线方程

$$x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0,$$

并作出它的图形.

解 已知二次曲线的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{3}{2} & 5 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 21 \end{pmatrix},$$

$$I_1=1+1=2,\ I_2=\begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}=-\frac{5}{4},$$

所以曲线的特征方程是

$$\lambda^2-2\lambda-\frac{5}{4}=0,$$

解得两特征根为

$$\lambda_1=-\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{5}{2},$$

因而曲线的两个主方向为

$$X_1:Y_1=-\frac{3}{2}:\left(-\frac{1}{2}-1\right)=1:1,$$

$$X_2:Y_2=-\frac{3}{2}:\left(\frac{5}{2}-1\right)=-1:1;$$

曲线的两条主直径为

$$\left(x-\frac{3}{2}y+5\right)+\left(-\frac{3}{2}x+y-5\right)=0$$

与
$$-\left(x-\frac{3}{2}y+5\right)+\left(-\frac{3}{2}x+y-5\right)=0,$$

即
$$x+y=0 \quad 与 \quad x-y+4=0.$$

取这两条主直径为新坐标轴，由(5.6-5)得坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \\ y'=\dfrac{x-y+4}{-\sqrt{2}}, \end{cases}$$

解出 x 与 y

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-2, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'+2, \end{cases}$$

代入已知曲线方程，经过整理得曲线在新坐标系下的方程为①

$$-\frac{1}{2}x'^2+\frac{5}{2}y'^2+1=0,$$

所以曲线的标准方程为

---

① 这里由于取曲线的主直径(即对称轴)为新坐标轴，所以在计算新方程的系数时，对于中心曲线，只要计算平方项的系数与常数项，其余系数均为零，不必计算，对于非中心曲线，也可得出相应的结论。

$$\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{\frac{2}{5}}=1,$$

这是一条双曲线.

在作图时，必须首先确定 x' 轴的正向. 变换公式的 x' 表达式的右端，x 项的系数为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，y 项的系数为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，把这些系数与公式 (5.6-4) 比较就知道 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$，因此 x' 轴与 x 轴的交角为 $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 当新坐标系确定之后，曲线就可以在新坐标系里按标准方程作图，原方程所表示的图形如图 5-5 所示.

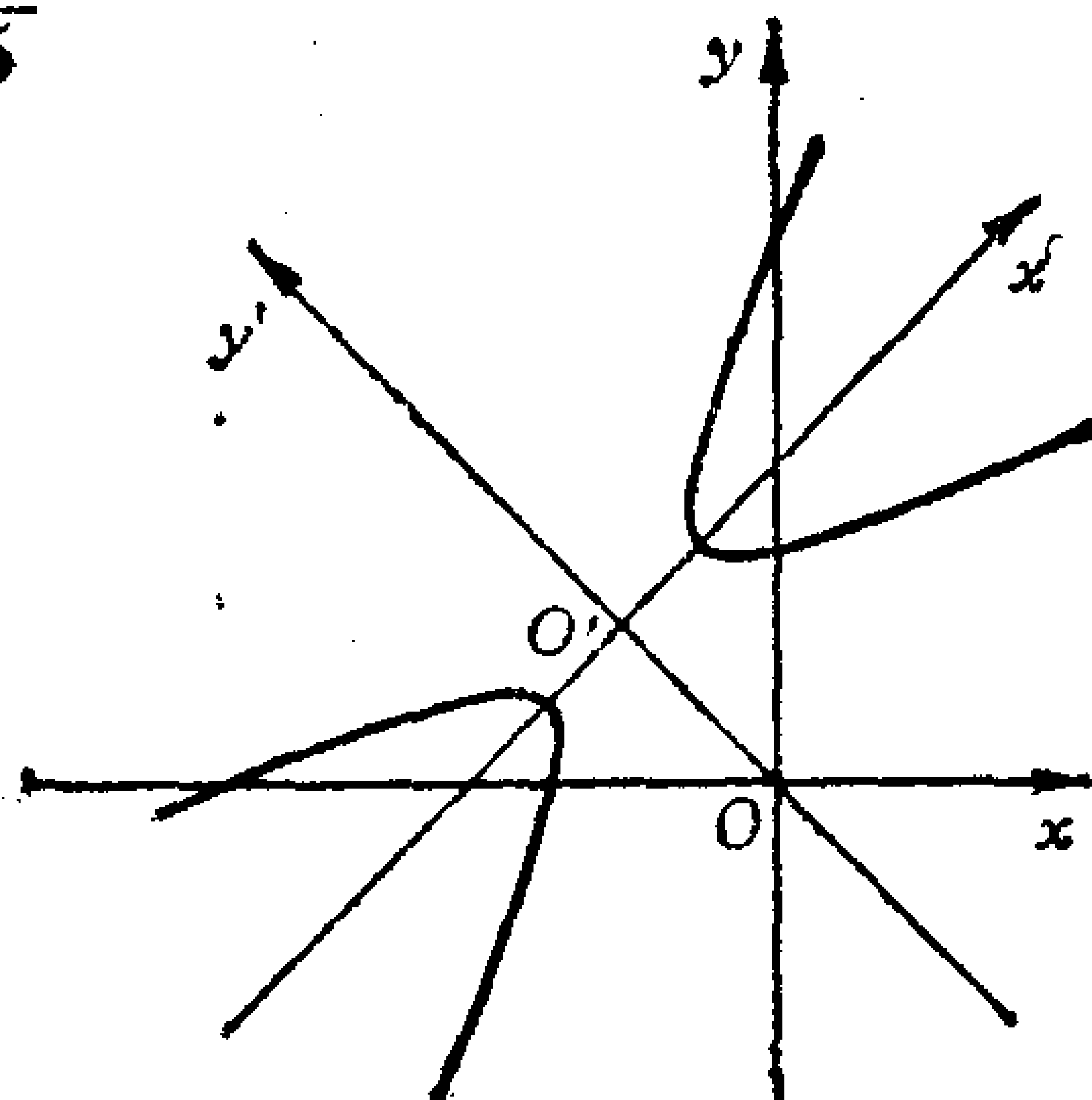


图 5-5

例 5 化简二次曲线方程 $x^2+2xy+y^2+2x+y=0$，并作出它的图形.

解 已知二次曲线的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},$$

$$I_1=1+1=2,\quad I_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

曲线为非中心曲线，它的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda=0,$$

特征根为 $$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=0,$$

曲线的非渐近主方向为对应于 $\lambda_1=2$ 的主方向

$$X:Y=1:1,$$

所以曲线的主直径为

$$(x+y+1)+\left(x+y+\frac{1}{2}\right)=0,$$

即
$$x+y+\frac{3}{4}=0.$$

求出主直径与曲线的交点,即曲线的顶点为$\left(\frac{3}{16},-\frac{15}{16}\right)$. 所以过曲线的顶点且以非渐近主方向为方向的直线为

$$\frac{x-\frac{3}{16}}{1}=\frac{y+\frac{15}{16}}{1} \quad 即 \quad x-y-\frac{9}{8}=0,$$

这也是过顶点垂直于主直径的直线，取主直径 $x+y+\frac{3}{4}=0$ 为新坐标系的 x' 轴，而过曲线的顶点且垂直于主直径的直线 $x-y-\frac{9}{8}=0$ 为 y' 轴,作坐标变换,它的变换公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-y-\frac{9}{8}}{\sqrt{2}}, \\ y'=\dfrac{x+y+\frac{3}{4}}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

解出 x 与 y
$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'+\dfrac{3}{16}, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-\dfrac{15}{16}, \end{cases}$$

代入已知方程,经过整理得

$$2y'^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x'=0,$$

化为标准方程

$$y'^2=-\frac{\sqrt{2}}{4}x',$$

这是一条抛物线. 为了要画出这条抛物线, 我们必须确定代表 x' 轴的直线的正向, 如果 x' 轴与 x 轴的交角为 α, 那么根据变换公式有 $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 因此, $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, x' 轴的正向就能确定了(图 5-6).

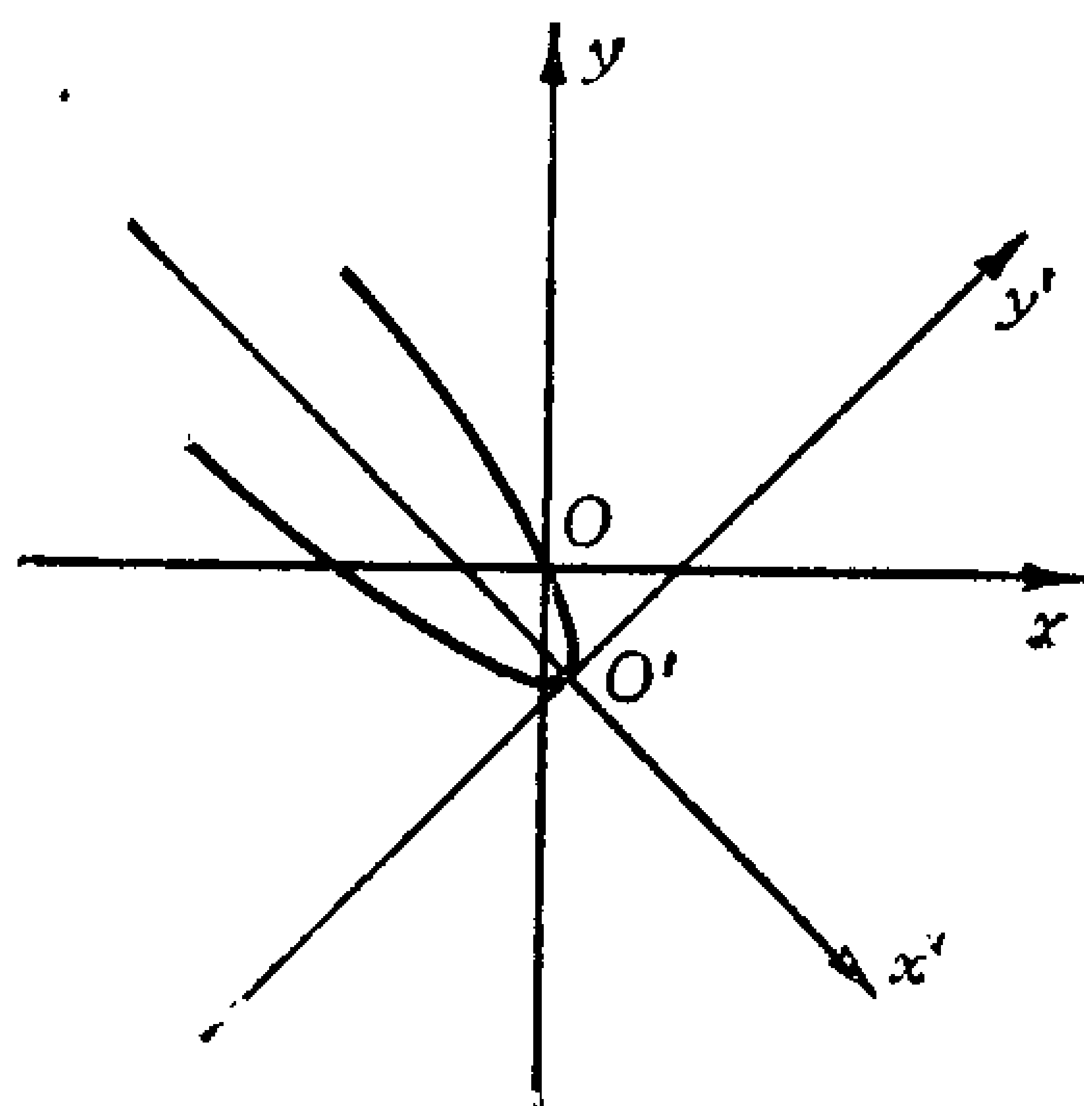


图 5-6

新坐标轴作出后, 我们就能在新坐标系下, 根据抛物线的标准方程来作出它的图形, 如图 5-6 所示.

例 6 化简 $x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$.

解 已知曲线的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

它的第一, 第二两行成比例, 曲线为线心曲线, 它有唯一的直径即中心线, 也是曲线的主直径, 其方程是

$$x-y+1=0,$$

取它为新坐标系的 x' 轴, 再取任意垂直于这中心线的直线, 比如

$$x+y=0$$

为新坐标系的 y' 轴作坐标变换, 这时的变换公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}, \\ y'=\dfrac{x-y+1}{-\sqrt{2}}; \end{cases}$$

解出 x 与 y
$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'+\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

代入已知方程，经过整理得

$$2y'^2-4=0,$$

即 $y'^2=2$ 或 $y'=\pm\sqrt{2}$，

这是两条平行直线(图 5-7).

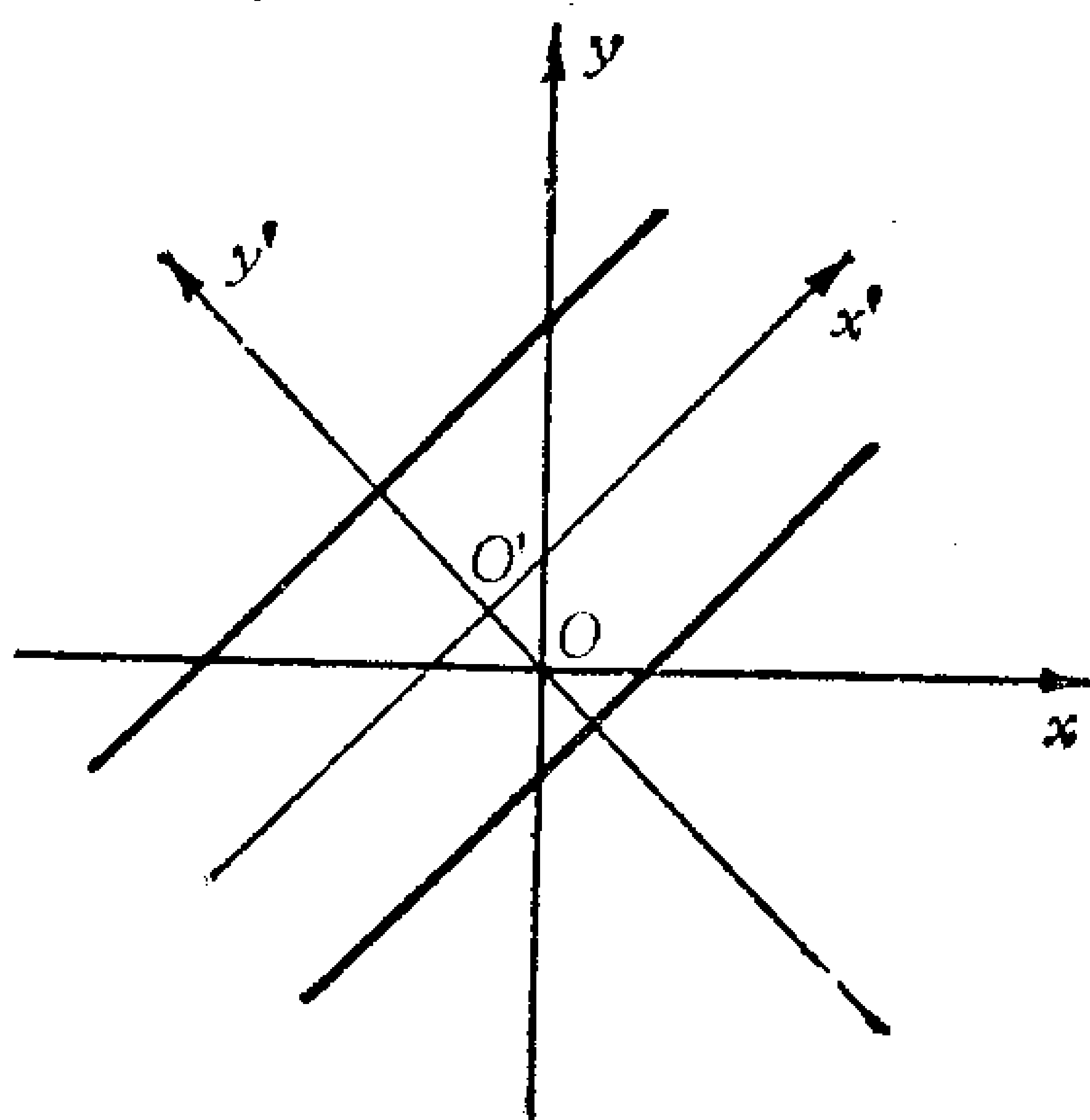


图 5-7

对于线心曲线，我们可以直接从原方程分解为两个一次因式，从而立刻可以作出它的图形. 比如例 5 的方程可以改写为

$$(x-y)^2+2(x-y)-3=0,$$

所以
$$(x-y+3)(x-y-1)=0.$$

因此原方程表示两条直线

$$x-y+3=0 \quad 与 \quad x-y-1=0,$$

它的图象如图 5-7 所示.

一般地说来，我们有

定理 5.6.1 适当选取坐标系，二次曲线的方程总可以化成下列三个简化方程中的一个：

(I) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0, \quad a_{11}a_{22}\neq 0;$

(II) $a_{22}y^2+2a_{13}x=0, \quad a_{22}a_{13}\neq 0;$

(III) $a_{22}y^2+a_{33}=0, \quad a_{22}\neq 0.$

证 我们根据二次曲线是中心曲线、无心曲线与线心曲线三种情况来讨论.

1° 当已知二次曲线为中心曲线时，我们取它的一对既共轭又

互相垂直的主直径作为坐标轴建立直角坐标系. 设二次曲线在这样的坐标系下的方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0①,$$

因为这时原点就是曲线的中心. 所以根据定理 5.2.1 的推论知道

$$a_{13}=a_{23}=0.$$

其次, 二次曲线的两条主直径(即坐标轴)的方向为 1:0 与 0:1, 它们互相共轭, 因此根据(5.4-5)有

$$a_{12}=0,$$

所以曲线的方程为

(I) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0,$

又因为它是中心曲线, 所以又有

$$I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=a_{11}a_{22}\neq 0.$$

2° 当已知二次曲线为无心曲线时, 取它的唯一主直径为 x 轴, 而过顶点(即主直径与曲线的交点)且以非渐近主方向为方向的直线(即过顶点垂直于主直径的直线)为 y 轴建立坐标系, 这时的曲线方程假设为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

因为这时主直径的共轭方向为 $X:Y=0:1$, 所以主直径的方程为

$$a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0,$$

它就是 x 轴, 即与直线 $y=0$ 重合, 所以有

$$a_{12}=a_{23}=0,\quad a_{22}\neq 0.$$

又因为顶点与坐标原点重合, 所以(0, 0)满足曲线方程, 从而又有

$$a_{33}=0.$$

其次, 由于曲线为无心曲线, 所以

---

① 因为坐标变换公式(5.6-3)与其逆变换公式(5.6-4)都是一次式, 所以二次曲线经坐标变换(5.6-3)后, 其新方程的次数 $n\leqslant 2$, 再通过逆变换(5.6-4), 那么又有 $2\leqslant n$, 所以 $n=2$, 即二次曲线方程在坐标变换之下的次数不变.

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}},$$

而 $a_{12}=0$, $a_{22}\neq 0$，所以有

$$a_{11}=0, \quad a_{13}\neq 0.$$

因而曲线的方程为

(II) $a_{22}y^2+2a_{13}x=0$, $a_{22}a_{13}\neq 0$.

3° 当已知二次曲线为线心曲线时，我们取它的中心直线(即曲线的唯一直径也是主直径)为 x 轴，任意垂直它的直线为 y 轴，建立坐标系．设曲线的方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

因为线心曲线的中心直线的方程是方程

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$$

与

$$a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0,$$

中的任何一个，第二个方程表示 x 轴的条件为

$$a_{12}=a_{23}=0, \quad a_{22}\neq 0.$$

而第一个方程在 $a_{12}=0$ 的条件下，不可能再表示 x 轴，所以它必须是恒等式，因而有

$$a_{11}=a_{13}=0,$$

所以线心曲线的方程为：

(III) $a_{22}y^2+a_{33}=0$, $a_{22}\neq 0$.

定理证毕．

现在我们可以根据二次曲线三种简化方程系数的各种不同情况，写出二次曲线的各种标准方程，从而得出二次曲线的分类．

(I) 中心曲线

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0, \quad a_{11}a_{22}\neq 0.$$

当 $a_{33}\neq 0$ 时，那么方程可化为

$$Ax^2+By^2=1,$$

其中 $$A=-\frac{a_{11}}{a_{33}},\quad B=-\frac{a_{22}}{a_{33}}.$$

如果 $A>0$, $B>0$, 那么设

$$A=\frac{1}{a^2},\quad B=\frac{1}{b^2},$$

于是得方程

[1] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (椭圆).$$

如果 $A<0$, $B<0$, 那么设

$$A=-\frac{1}{a^2},\quad B=-\frac{1}{b^2},$$

于是得方程

[2] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (虚椭圆).$$

如果 A 与 B 异号, 那么不失一般性, 我们可以设 $A>0$, $B<0$, (在相反情况下, 只要把两轴 Ox 和 Oy 对调); 设

$$A=\frac{1}{a^2},\quad B=-\frac{1}{b^2},$$

于是得方程

[3] $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (双曲线).$$

当 $a_{33}=0$ 时, 如果 a_{11} 与 a_{22} 同号, 可以假设 $a_{11}>0$, $a_{22}>0$ (在相反情况只要在方程两边同时变号), 再设 $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\frac{1}{b^2}$, 于是得方程

[4] $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \quad (点或称两相交于实点的共轭虚直线);$$

如果 a_{11} 与 a_{22} 异号, 那么我们类似地有

[5] $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad (两相交直线).$$

(II) 无心曲线

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0,\quad a_{22}a_{13}\neq 0.$$

设 $-\dfrac{a_{13}}{a_{22}}=p$，于是得方程

[6] $\qquad y^2=2px$ （抛物线）.

(III) 线心曲线

$$a_{22}y^2+a_{33}=0,\quad a_{22}\neq 0.$$

方程可以改写为：

$$y^2=-\frac{a_{33}}{a_{22}},$$

当 a_{33} 与 a_{22} 异号，设 $-\dfrac{a_{33}}{a_{22}}=a^2$，于是得方程

[7] $\qquad y^2=a^2$ （两平行直线）；

当 a_{33} 与 a_{22} 同号，设 $\dfrac{a_{33}}{a_{22}}=a^2$，于是得方程

[8] $\qquad y^2=-a^2$ （两平行共轭虚直线）；

当 $a_{33}=0$ 时，得方程为

[9] $\qquad y^2=0$ （两重合直线）.

于是，我们就得到了下面的定理.

定理 5.6.2 通过适当的选取坐标系，二次曲线的方程总可以写成下面九种标准方程的一种形式：

[1] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（椭圆）；

[2] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$（虚椭圆）；

[3] $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（双曲线）；

[4] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$（点或称两相交于实点的共轭虚直线）；

[5] $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$（两相交直线）；

[6] $y^2=2px$（抛物线）；

[7] $y^2=a^2$(两平行直线);

[8] $y^2=-a^2$(两平行共轭虚直线);

[9] $y^2=0$(两重合直线).

习　　题

1. 利用移轴与转轴,化简下列二次曲线的方程,并画出它们的图形.

(1) $5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0$;

(2) $x^2+2xy+y^2-4x+y-1=0$;

(3) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

(4) $x^2+2xy+y^2+2x+2y=0$.

2. 以二次曲线的主直径为新坐标轴,化简下列方程,并写出相应的坐标变换公式与作出它们的图形.

(1) $8x^2+4xy+5y^2+8x-16y-16=0$;

(2) $x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$;

(3) $4x^2-4xy+y^2+6x-8y+3=0$;

(4) $4x^2-4xy+y^2+4x-2y=0$.

3. 试证在任意转轴下,二次曲线的新旧方程的一次项系数满足关系式

$$a_{13}'^2+a_{23}'^2=a_{13}^2+a_{23}^2.$$

4. 试证中心二次曲线

$$ax^2+2hxy+ay^2=d$$

的两条主直径为 $x^2-y^2=0$,曲线的两半轴的长分别是

$$\sqrt{\left|\frac{d}{a+h}\right|}\quad 及\quad \sqrt{\left|\frac{d}{a-h}\right|}.$$

§5.7　应用不变量化简二次曲线的方程

1. 不变量与半不变量

二次曲线在任意给定的直角坐标系中的方程为

$$F(x,\ y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \tag{1}$$

设在直角坐标变换(5.6-3)

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0 \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

下，曲线方程(1)的左端变为

$$F'(x',\ y') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33},$$

那么多项式 $F'(x',\ y')$ 也是二元二次多项式，它的每一个系数都可以用多项式 $F(x,\ y)$ 的系数和坐标变换(5.6-3)的系数表出.

定义 5.7.1 由 $F(x,\ y)$ 的系数组成的一个非常数函数 f，如果经过直角坐标变换(5.6-3)，$F(x,\ y)$ 变为 $F'(x',\ y')$ 时，有

$$f(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{33}) = f(a'_{11},\ a'_{12},\ \cdots,\ a'_{33}),$$

那么这个函数 f 叫做二次曲线(1)在直角坐标变换(5.6-3)下的不变量. 如果这个函数 f 的值，只是经过转轴变换不变，那么这个函数叫做二次曲线(1)在直角坐标变换下的半不变量.

定理 5.7.1 二次曲线(1)在直角坐标变换下，有三个不变量 $I_1,\ I_2,\ I_3$，与一个半不变量 K_1：

$$I_1 = a_{11} + a_{22},\quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证 因为直角坐标变换(5.6-3)总可以分成移轴(5.6-1)与转轴(5.6-2)两步来完成，因此本定理的证明、也就分成移轴与转轴两步来完成.

先证明在移轴(5.6-1)下，$I_1,\ I_2,\ I_3$ 不变，而 K_1 一般要改变.

根据(5.6-6)知，在移轴下，二次曲线(1)的二次项系数不变. 所以

$$I_1'=a_{11}'+a_{22}'=a_{11}+a_{22}=I_1,$$

$$I_2'=\begin{vmatrix}a_{11}' & a_{12}'\\ a_{12}' & a_{22}'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=I_2;$$

而

$$I_3'=\begin{vmatrix}a_{11}' & a_{12}' & a_{13}'\\ a_{12}' & a_{22}' & a_{23}'\\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}'\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}\\ a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13} & a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23} & F(x_0,\ y_0)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13} & a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23} & a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=I_3.$$

上面的第三个等式是由第三列减去第一列乘以 x_0，第二列乘以 y_0 而得到的，第四个等式是由第三行减去第一行乘以 x_0，第二行乘以 y_0 而得到的.

K_1 在移轴下一般是要改变的，例如 $F(x,\ y)\equiv 2xy$，它的 $K_1=0$，而通过移轴(5.6–1)，$F(x,\ y)$ 变为

$$F'(x',\ y')\equiv 2x'y'+2y_0x'+2x_0y'+2x_0y_0,$$

而这时

$$K_1'=\begin{vmatrix}0 & y_0\\ y_0 & 2x_0y_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & x_0\\ x_0 & 2x_0y_0\end{vmatrix}=-(x_0^2+y_0^2)\neq 0.$$

$$\therefore\qquad K_1'\neq K_1.$$

现在我们来证明在转轴(5.6–2)下，I_1, I_2, I_3 与 K_1 都不变．对于 I_1 与 I_2 只要考虑方程的二次项系数就够了，根据(5.6-7)，

在转轴下有：

$$\begin{cases} a'_{11}=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{22}=a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{12}=(a_{22}-a_{11})\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha), \end{cases} \tag{2}$$

利用三角函数关系

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2},$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2},$$

(2)可化为：

$$\begin{cases} a'_{11}=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}+\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos2\alpha+a_{12}\sin2\alpha, \\ a'_{22}=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}-\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cos2\alpha-a_{12}\sin2\alpha, \\ a'_{12}=\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\sin2\alpha+a_{12}\cos2\alpha. \end{cases} \tag{3}$$

$$\therefore \qquad I'_1=a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}=I_1,$$

$$\begin{aligned} I'_2&=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}=a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12} \\ &=\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)\cos2\alpha+a_{12}\sin2\alpha\right]^2 \\ &\qquad -\left[\left(\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\right)\sin2\alpha+a_{12}\cos2\alpha\right]^2 \\ &=\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2-\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2-a^2_{12} \\ &=a_{11}a_{22}-a^2_{12}=I_2. \end{aligned}$$

现在来证明 I_3 在转轴下也不变．因为

$$I_3'=\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{vmatrix}$$

$$=a_{13}'\begin{vmatrix} a_{12}' & a_{13}' \\ a_{22}' & a_{23}' \end{vmatrix}+a_{23}'\begin{vmatrix} a_{13}' & a_{11}' \\ a_{23}' & a_{12}' \end{vmatrix}+a_{33}'\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix},$$

而在转轴下，刚才已证得 $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ 不变，即 $\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{12}' & a_{22}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$，且在转轴下二次曲线方程的常数项不变，所以又有 $a_{33}'=a_{33}$，因此

$$I_3'=a_{13}'\begin{vmatrix} a_{12}' & a_{13}' \\ a_{22}' & a_{23}' \end{vmatrix}+a_{23}'\begin{vmatrix} a_{13}' & a_{11}' \\ a_{23}' & a_{12}' \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

将(5.6-7)代入 $\begin{vmatrix} a_{12}' & a_{13}' \\ a_{22}' & a_{23}' \end{vmatrix}$，化简整理得

$$\begin{vmatrix} a_{12}' & a_{13}' \\ a_{22}' & a_{23}' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\cos\alpha-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\sin\alpha.$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{13}' & a_{11}' \\ a_{23}' & a_{12}' \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\sin\alpha-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\cos\alpha,$$

所以

$$I_3'=a_{13}'\left[\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\cos\alpha-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\sin\alpha\right]$$

$$+a_{23}'\left[-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}\sin\alpha-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\cos\alpha\right]$$

$$+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot(a_{13}'\cos\alpha-a_{23}'\sin\alpha)-$$

$$
-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot(a'_{13}\sin\alpha+a'_{23}\cos\alpha)+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}
$$

$$
=a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=I_3.
$$

最后我们来证明 K_1 在转轴下也是不变的，因为

$$
K_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
=(a_{11}+a_{22})a_{33}-(a_{13}^2+a_{23}^2),
$$

而 $a_{11}+a_{22}=I_1$ 与二次曲线(1)的常数项 a_{33} 在转轴下都是不变的，再由§5.6 习题 3 知

$$
a_{13}'^2+a_{23}'^2=a_{13}^2+a_{23}^2.
$$

所以

$$
K_1'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} \\ a'_{13} & a'_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
=(a'_{11}+a'_{22})a'_{33}-(a_{13}'^2+a_{23}'^2)
$$

$$
=(a_{11}+a_{22})a_{33}-(a_{13}^2+a_{23}^2)
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=K_1.
$$

定理证毕.

定理 5.7.2 当二次曲线(1)为线心曲线时，在直角坐标变换下 K_1 是不变量.

证 首先证明当线心曲线的方程具有简化方程

(III) $$a_{22}y^2+a_{33}=0$$

时 K_1 不变，因为 K_1 是半不变量，所以只要证它在移轴下不变.

在移轴(5.1-1)下，(III)的左端变为

$$a_{22}(y'+y_0)^2+a_{33}=a_{22}y'^2+2a_{22}y_0y'+a_{22}y_0^2+a_{33}$$

$$\therefore \qquad K_1'=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & a_{22}y_0^2+a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{22}y_0\\ a_{22}y_0 & a_{22}y_0^2+a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{22}a_{33}.$$

而

$$K_1=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & 0\\ 0 & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}.$$

$$\therefore \qquad K_1'=K_1.$$

其次，如果 $F(x, y)=0$ 经过移轴(5.6-1)变成(III)，那么反过来(III)经过移轴(5.6-1′)就变成 $F(x, y)=0$，所以当线心二次曲线通过移轴其方程能化成(III)时，那么 K_1 不变.

现在设线心二次曲线 $F(x, y)=0$ 经过任意的直角坐标变换 t 变成 $F'(x', y')=0$，我们来证明 $K_1'=K_1$. 因为 $F(x, y)=0$ 为线心二次曲线，因此总存在直角坐标变换 t_1 把 $F(x, y)$ 变成(III)的左端，因此反过来也一定可以通过直角坐标变换 t_1^{-1} 把(III)的左端变成 $F(x, y)$，再通过坐标变换 t 把 $F(x, y)$ 变成 $F'(x', y')$，也就是存在一个直角坐标变换 $t_2=tt_1^{-1}$ 把(III)的左端变成 $F'(x', y')$①，变换的过程，如下图所示:

---

① 直角坐标变换 t_1 的逆变换常记做 t_1^{-1}，它也是一个直角坐标变换. 连续施行两次直角坐标变换 t_1^{-1} 与 t，称为两坐标变换之积，其结果相当于施行某一直角坐标变换 t_2，并记做 $t_2=t\cdot t_1^{-1}$. 这从几何上看是很明显的，如果连续施行的两次直角坐标变换分别为

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha_1-y'\sin\alpha_1+x_1,\\ y=x'\sin\alpha_1+y'\cos\alpha_1+y_1.\end{cases}$$

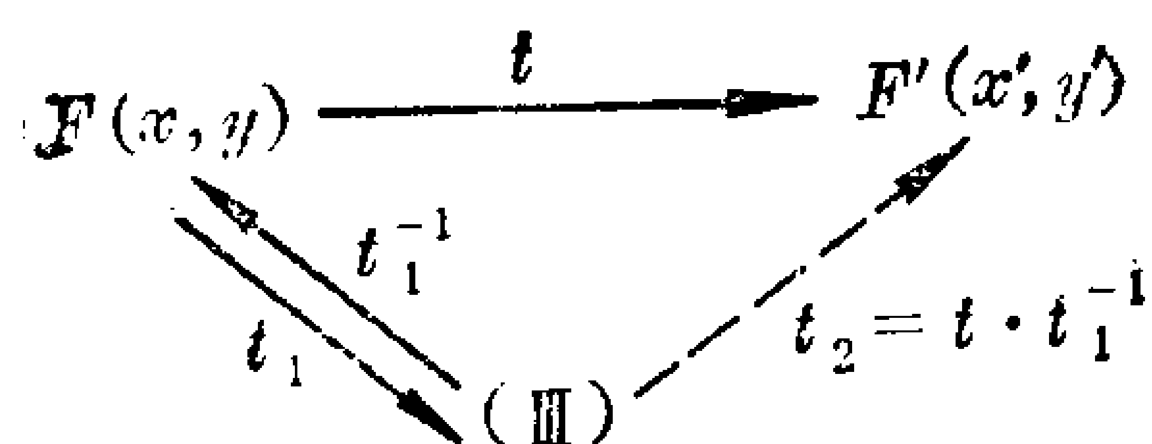
与

$$\begin{cases}x'=x''\cos\alpha_2-y''\sin\alpha_2+x_2,\\ y'=x''\sin\alpha_2+y''\cos\alpha_2+y_2.\end{cases}$$

那么由这两变换公式得

$$\begin{cases}x=x''\cos(\alpha_1+\alpha_2)-y''\sin(\alpha_1+\alpha_2)+(x_2\cos\alpha_1-y_2\sin\alpha_1+x_1),\\ y=x''\sin(\alpha_1+\alpha_2)+y''\cos(\alpha_1+\alpha_2)+(x_2\sin\alpha_1+y_2\cos\alpha_1+y_1).\end{cases}$$

显然，这仍然是一个直角坐标变换.



因此，根据前面已证明的，当通过直角坐标变换 t_1 把 $F(x, y)$ 变成(III)的左端时 K_1 不变，所以有

$$K_1=K_1'',$$

而通过直角坐标变换 $t_2=t\cdot t_1^{-1}$ 把(III)的左端变为 $F'(x', y')$时，又有

$$K_1''=K_1',$$

所以
$$K_1'=K_1,$$

定理证毕.

2. 应用不变量化简二次曲线的方程

在定理 5.6.1 中已经指出，任何一个二次曲线的方程总可以化成三个简化方程(I)，(II)，(III)中的一个. 在这里我们将应用二次曲线的三个不变量 I_1，I_2，I_3 与一个半不变量 K_1 来化简二次曲线的方程. 这种方法可以不必求出具体的坐标变换公式，只要计算一下这些不变量与半不变量就可以决定二次曲线的简化方程，从而可以写出它的标准方程. 现在我们仍然分中心曲线、无心曲线与线心曲线三种情况来讨论.

1° 中心曲线　这时 $I_2\neq 0$，它的简化方程为

(I)
$$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+a_{33}'=0,$$

因此我们有
$$I_1'=a_{11}'+a_{22}'=I_1,$$

$$I_2'=\begin{vmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{vmatrix}=a_{11}'a_{22}'=I_2.$$

根据二次方程的根与系数的关系知道，a_{11}' 与 a_{22}' 是特征方程

$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$$

的两根，即 $a'_{11}=\lambda_1$, $a'_{22}=\lambda_2$ 分别是二次曲线的特征根.

其次又有

$$I'_3=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix}=a'_{11}a'_{22}a'_{33}=I_2a'_{33},$$

而

$$I'_3=I_3,$$

所以

$$a'_{33}=\frac{I_3}{I_2}.$$

这样我们就得到：

定理 5.7.3 如果二次曲线(1)是中心曲线，那么它的简化方程为

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0, \tag{5.7-1}$$

其中 λ_1, λ_2 是二次曲线特征方程的两个根（方程中的撇号已略去）.

例 1 求二次曲线

$$5x^2-6xy+5y^2-6\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-4=0$$

的简化方程与标准方程.

解 因为

$$I_1=10,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=16,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 5 & -3 & -3\sqrt{2} \\ -3 & 5 & \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & \sqrt{2} & -4 \end{vmatrix}=-128.$$

所以

$$\frac{I_3}{I_2}=\frac{-128}{16}=-8,$$

而特征方程 $\lambda^2-10\lambda+16=0$ 的两根为

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=8,$$

所以曲线的简化方程(略去撇号)为:

$$2x^2+8y^2-8=0,$$

曲线的标准方程(略去撇号)为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

这是一个椭圆.

$2°$ 无心曲线　这时 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$ 或 $I_2=0, I_3\neq0$(见§5.2习题7),它的简化方程为

$$\text{(II)}\qquad a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'=0,$$

因此我们有

$$I'_1=a'_{22}=I_1,$$

$$I'_3=\begin{vmatrix}0 & 0 & a'_{13}\\ 0 & a'_{22} & 0\\ a'_{13} & 0 & 0\end{vmatrix}=-a'_{22}a'^2_{13}=-I_1a'^2_{13},$$

而

$$I'_3=I_3,$$

所以

$$a'_{13}=\pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}},$$

因此有

定理 5.7.4　如果二次曲线(1)是无心曲线,那么它的简化方程为

$$I_1y^2\pm2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\,x=0. \tag{5.7-2}$$

这里的正负号可以任意选取(方程中的撇号已略去).

例 2　求二次曲线

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$$

的简化方程与标准方程.

解 $I_1=2,$

$$I_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$I_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ -1 & 1 & -3\\ -5 & -3 & 25\end{vmatrix}=-64.$$

∴ 曲线的简化方程(略去撇号)为

$$2y^2-2\sqrt{32}x=0 \quad 或 \quad 2y^2+2\sqrt{32}x=0,$$

它的标准方程(略去撇号)为

$$y^2=4\sqrt{2}\,x \quad 或 \quad y^2=-4\sqrt{2}\,x,$$

曲线是一条抛物线.

3° 线心曲线　这时 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{a_{13}}{a_{23}}$ 或 $I_2=I_3=0$(见§5.2习题7),它的简化方程为

(III) $$a'_{22}y'^2+a'_{33}=0,$$

因此我们有 $$I'_1=a'_{22}=I_1,$$

$$K'_1=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & a'_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'_{22} & 0\\ 0 & a'_{33}\end{vmatrix}=a'_{22}a'_{33}=I_1a'_{33},$$

而 $$K'_1=K_1,$$

所以 $$a'_{33}=\frac{K_1}{I_1}.$$

因此有

定理 5.7.5 如果二次曲线(1)是线心曲线，那么它的简化方程为

$$I_1y^2+\frac{K_1}{I_1}=0 \tag{5.7-3}$$

(方程中的撇号已略去).

从(5.7-1),(5.7-2)与(5.7-3)我们又可以得到

定理 5.7.6 如果给出了二次曲线(1)，那么用它的不变量与半不变量来判断已知曲线为何种曲线的条件是:

[1] 椭圆: $I_2>0,\ I_1I_3<0$;

[2] 虚椭圆: $I_2>0,\ I_1I_3>0$;

[3] 点(或称一对交于实点的共轭虚直线): $I_2>0,\ I_3=0$;

[4] 双曲线: $I_2<0,\ I_3\neq 0$;

[5] 一对相交直线: $I_2<0,\ I_3=0$;

[6] 抛物线: $I_2=0,\ I_3\neq 0$;

[7] 一对平行直线: $I_2=I_3=0,\ K_1<0$;

[8] 一对平行的虚直线: $I_2=I_3=0,\ K_1>0$;

[9] 一对重合的直线: $I_2=I_3=K_1=0$.

这个定理的证明与定理 5.6.2 十分类似，它的证明留给读者.

推论 二次曲线(1)表示两条直线(实的或虚的，不同的或重合的)的充要条件为 $I_3=0$.

习 题

1. 利用不变量与半不变量，判断下列二次曲线为何种曲线，并求出它的简化方程与标准方程.

(1) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$;

(2) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;

(3) $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$;

(4) $x^2-4xy+4y^2+2x-2y-1=0$;

(5) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+29=0$;

(6) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$;

(7) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$;

(8) $4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$.

2. 当 λ 取何值时，方程

$$\lambda x^2+4xy+y^2-4x-2y-3=0$$

表示两条直线？

3. 按实数 λ 的值讨论方程

$$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$$

表示什么曲线？

4. 设

$$x_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

表示两条平行直线，证明这两条直线之间的距离是

$$d=\sqrt{-\frac{4K_1}{I_1^2}}.$$

5. 试证方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

确定一个实圆必须且只须 $I_1^2=4I_2$, $I_1I_3<0$.

6. 试证如果二次曲线的 $I_1=0$，那么 $I_2<0$.

7. 试证如果二次曲线的 $I_2=0$, $I_3\neq 0$，那么 $I_1\neq 0$，而且 $I_1I_3<0$.

结 束 语

这一章，我们从研究直线与一般二次曲线的相交问题入手，展开了一般二次曲线的几何理论的研究，讨论了一般二次曲线的渐近方向、中心、渐近线、切线、直径与主直径等重要概念与它们的性质，也导出了二次曲线按不同角度的分类，例如按渐近方向的分类与按中心的分类. 我们也讨论了一般二次曲线的代数理论，这就是从坐标变换开始介绍了一般二次曲线方程的化简与判别等问题. 特别地，我们利用了二次曲线的主直径为新坐标轴作坐标变换来化简一般二次曲线的方程，从而使二次曲线的几何理论与代数理论自然地联系在一起，使得一般二次曲线方程的化简，作图以及根据二次曲线标准方程的度量分类也就比较简捷地一起完成了.

平面上的二次曲线的理论与空间的二次曲面的理论有着十分相似的地方，而平面的情况毕竟要比空间的情况简单得多，因此我

们先对一般二次曲线的理论有了比较深入的了解后，再进一步学习空间的一般二次曲面的理论将不会感到费力，而它只是一种自然的推广.

这一章中，提出了二次曲线在直角坐标变换下的"不变量"这一十分重要的概念. 我们知道，解析几何的主要目的是通过曲线的方程来研究曲线的几何性质，而从定理 5.7.6 知，由二次曲线方程的系数所构成的不变量 I_1，I_2，I_3 以及 K_1 完全可以刻划二次曲线的形状与大小，因此研究二次曲线的不变量也就成为解析几何的一个十分重要的中心问题. 在这样的意义下，不变量也最能深刻地反映方程与曲线的关系，它也把我们对形数结合的问题提高到一个新的认识.

*第六章　二次曲面的一般理论

在空间，由三元二次方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1}$$

所表示的曲面叫做*二次曲面*.

在这一章中，我们将在第四章讨论各种二次曲面的标准方程的基础上，在直角坐标系下，进一步讨论一般二次曲面(1)，讨论的步骤和方法几乎与上一章完全一致. 和上一章一样，我们先在空间引进虚元素，把有序三复数组叫做空间复点的坐标，如果三坐标全是实数，那么它对应的点是实点，否则叫做虚点. 有关复元素的内容，可以由平面上直接推广到空间中来，在这里我们不准备叙述了.

在这里我们也只讨论二次曲面的方程是实系数的情况. 为了今后讨论的方便，我们引进一些记号如下：

$$F(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44},$$

$$F_1(x, y, z)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}①,$$

$$F_2(x, y, z)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24},$$

$$F_3(x, y, z)\equiv a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34},$$

$$F_4(x, y, z)\equiv a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44},$$

$$\Phi(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz,$$

---

① 为了便于记忆可借用偏导数的记号：$F_1(x, y, z)=\frac{1}{2}F'_x(x,y,z)$，$F_2(x,y,z)=\frac{1}{2}F'_y(x, y, z)$，$F_3(x, y, z)=\frac{1}{2}F'_z(x, y, z)$.

$$\Phi_1(x,\ y,\ z)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z,$$ ①

$$\Phi_2(x,\ y,\ z)\equiv a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z,$$

$$\Phi_3(x,\ y,\ z)\equiv a_{13}x+a_{23}y+x_{33}z,$$

$$\Phi_4(x,\ y,\ z)\equiv a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z.$$

这样，我们还有下面的两个恒等式

$$F(x,\ y,\ z)\equiv xF_1(x,\ y,\ z)+yF_2(x,\ y,\ z)+zF_3(x,\ y,\ z)$$
$$+F_4(x,\ y,\ z),$$

$$\Phi(x,\ y,\ z)\equiv x\Phi_1(x,\ y,\ z)+y\Phi_2(x,\ y,\ z)+z\Phi_3(x,\ y,\ z).$$

我们把 $F(x,\ y,\ z)$ 的系数排成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

叫做二次曲面(1)的矩阵[或称 $F(x,y,z)$的矩阵]，而由 $\Phi(x,y,z)$ 的系数所排成的矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

叫做 $\Phi(x,\ y,\ z)$ 的矩阵. 显然，二次曲面(1)的矩阵 A 的第一，第二，第三与第四行的元素分别是 $F_1(x,\ y,\ z)$，$F_2(x,\ y,\ z)$，$F_3(x,\ y,\ z)$ 与 $F_4(x,\ y,\ z)$ 的系数.

最后我们还要引进几个今后常用的记号：

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

---

① $\Phi_1(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2}\Phi'_x(x,\ y,\ z)$，$\Phi_2(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2}\Phi'_y(x,\ y,\ z)$，$\Phi_3(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2}\Phi'_z(x,\ y,\ z)$.

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{13}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},\quad I_4=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$K_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{14}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{34}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$K_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{24}\\a_{14}&a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{13}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

这里的 I_1 是矩阵 A^* 的主对角元素的和，I_2 是矩阵 A^* 的二阶主子式的和，I_3 是矩阵 A^* 的行列式. I_4 是矩阵 A 的行列式，K_1 的三项是 I_1 的三项添加上两条"边"而成的三个二阶行列式，K_2 的三项是 I_2 的三项的三个二阶行列式添加上两条"边"而成的三个三阶行列式，以上添加上两条"边"的元素是矩阵 A 中的第四行与第四列的对应元素. 换句话说，用二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{14}&a_{44}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{24}&a_{44}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}$$

分别代替 I_1 中的 a_{11}, a_{22}, a_{33}, 就由 I_1 得到 K_1，而用三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{24}\\a_{14}&a_{24}&a_{44}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{13}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}$$

分别代替 I_2 中的

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{13}&a_{33}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},$$

就由 I_2 得到 K_2.

§6.1 二次曲面与直线的相关位置

设空间二次曲面的方程与直线的方程分别为

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{1}$$

与

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt, \end{cases} \tag{2}$$

现在来讨论它们的交点. 把(2)式代入(1)经过整理得

$$\Phi(X, Y, Z)t^2 + 2[XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0)]t + F(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{3}$$

根据方程(3)的系数的各种不同情况来确定直线(2)与二次曲面(1)相交的各种情况如下:

1. $\Phi(X, Y, Z) \neq 0$. 这时方程(3)是一个关于 t 的二次方程,它的判别式为

$$\Delta = [XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0)]^2 - \Phi(X, Y, Z)F(x_0, y_0, z_0).$$

1° $\Delta > 0$,这时方程(3)有两个不同的实根,因此直线(2)与二次曲面(1)有两个不同的实交点.

2° $\Delta = 0$, 方程(3)有二重根, 这时直线(2)与二次曲面(1)有两个相互重合的实交点.

3° $\Delta < 0$,方程(3)有一对共轭的虚根, 因此直线(2)与二次曲面(1)没有实交点,而有一对共轭的虚交点.

从上看出,当 $\Phi(X, Y, Z) \neq 0$ 时, 直线(2)与二次曲面(1)总有两个交点(两不同实的,两重合实的或一对共轭虚的).

2. $\Phi(X, Y, Z) = 0$. 这时也有三种情况:

1° $XF_1(x_0, y_0, z_0) + YF_2(x_0, y_0, z_0) + ZF_3(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

这时方程(3)是关于 t 的一次方程，它有唯一的实根，因此这时直线(2)与二次曲面(1)有唯一的一个交点.

2° $XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ZF_3(x_0, y_0, z_0)=0$，而 $F(x_0, y_0, z_0)\neq 0$. 这时(3)是一个矛盾方程，无解，因此这时直线(2)与二次曲面(1)没有交点.

3° $XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ZF_3(x_0, y_0, z_0)=F(x_0, y_0, z_0)=0$. 这时方程(3)成为一个恒等式，$t$ 取任何值都能满足它，所以直线(2)上的任何点都在二次曲面(1)上，也就是整条直线属于二次曲面.

§6.2 二次曲面的渐近方向与中心

1. 二次曲面的渐近方向

定义6.2.1 满足条件 $\Phi(X, Y, Z)=0$ 的方向 $X:Y:Z$ 叫做二次曲面的*渐近方向*，否则叫做*非渐近方向*.

根据这个定义，从§6.1中立刻知道，如果给定二次曲面

$$F(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \quad (1)$$

与直线

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt, \end{cases} \quad (2)$$

那么当 $X:Y:Z$ 为曲面(1)的非渐近方向时，直线(2)与曲面(1)总有两个交点；当 $X:Y:Z$ 为曲面(1)的渐近方向时，直线(2)与曲面(1)或者只有一交点，或者没有交点，或者整条直线在曲面上.

现在我们考虑通过任意给定的点 (x_0, y_0, z_0) 且以曲面(1)的任意渐近方向 $X:Y:Z$ 为方向的直线(2)，因为渐近方向 $X:Y:Z$ 满足条件

$$\Phi(X, Y, Z)=0,$$

所以过点(x_0, y_0, z_0)且以渐近方向 $X:Y:Z$ 为方向的一切直线上的点的轨迹是曲面

$$\Phi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0,$$

即

$$\begin{aligned}&a_{11}(x-x_0)^2+a_{22}(y-y_0)^2+a_{33}(z-z_0)^2\\&\quad+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+2a_{13}(x-x_0)(z-z_0)\\&\quad+2a_{23}(y-y_0)(z-z_0)=0.\end{aligned}$$

这是一个关于 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 的二次齐次方程，所以它是一个以(x_0, y_0, z_0)为顶点的锥面，锥面上每一条母线的方向，都是二次曲面的渐近方向. 显然，过锥面顶点的非母线的方向都是二次曲面的非渐近方向.

2. 二次曲面的中心

与二次曲线的情形一样，我们也把以非渐近方向为方向的直线与二次曲面的两个交点所决定的线段叫做二次曲面的**弦**. 也与二次曲线的中心的定义相仿，给出二次曲面中心的定义如下:

定义 6.2.2 如果点 C 是二次曲面的通过它的所有弦的中点(因而 C 是二次曲面的对称中心)，那么点 C 叫做二次曲面的**中心**.

同样地，读者可以仿照定理 5.2.1 来证明下面的定理.

定理 6.2.1 点 $C(x_0, y_0, z_0)$ 是二次曲面(1)的中心，其充要条件是

$$\begin{cases}F_1(x_0, y_0, z_0)\equiv a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0,\\F_2(x_0, y_0, z_0)\equiv a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0,\\F_3(x_0, y_0, z_0)\equiv a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0.\end{cases}\tag{6.2-1}$$

推论 坐标原点是二次曲面的中心，其充要条件是曲面方程里不含 x, y 与 z 的一次项.

因此二次曲面的中心坐标,是由下列方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ F_2(x, y, z) \equiv a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ F_3(x, y, z) \equiv a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases} \tag{6·2-2}$$

决定,方程组(6.2-2)叫做二次曲面(1)的中心方程组.

根据线性方程组(6.2-2)的系数矩阵 A 与增广矩阵 B

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

的秩 r 与 R,我们有①

1° $r=R=3$,这时方程组的系数行列式

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

方程组有唯一解,二次曲面(1)有唯一中心.

2° $r=R=2$, (6.2-2)有无数多解,这些解可用一个参数来线性表示. 因此,这时二次曲面(1)有无数多中心,这些中心构成一条直线.

3° $r=R=1$, (6.2-2)有无数多解,这些解可以用两个参数来线性表示,所以这时二次曲面(1)有无数多中心,这些中心构成一个平面.

4° $r\neq R$, (6.2-2)无解,这时二次曲面(1)无中心.

定义 6.2.3 有唯一中心的二次曲面叫做中心二次曲面,没有中心的二次曲面叫做无心二次曲面,有无数中心且构成一条直线的二次曲面叫做线心二次曲面,而无数中心构成一个平面的二次曲面叫做面心二次曲面,二次曲面中的无心曲面,线心曲面与面

① 见附录 § 3 线性方程组.

心曲面统称为非中心二次曲面.

推论 二次曲面(1)成为中心二次曲面的充要条件为$I_3\neq 0$,成为非中心二次曲面的充要条件为$I_3=0$.

例1 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$与双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$的$I_3$分别为

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{a^2b^2c^2}\neq 0 \quad 与 \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{vmatrix}=\frac{-1}{a^2b^2c^2}\neq 0.$$

所以椭球面与双曲面都是中心曲面,它们的中心方程组分别为

$$\begin{cases} F_1(x,\ y,\ z)\equiv\frac{x}{a^2}=0, \\ F_2(x,\ y,\ z)\equiv\frac{y}{b^2}=0, \\ F_3(x,\ y,\ z)\equiv\frac{z}{c^2}=0, \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} F_1(x,\ y,\ z)\equiv\frac{x}{a^2}=0, \\ F_2(x,\ y,\ z)\equiv\frac{y}{b^2}=0, \\ F_3(x,\ y,\ z)\equiv-\frac{z}{c^2}=0, \end{cases}$$

因此它们的中心都是坐标原点(0, 0, 0).

例2 抛物面$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=2z$的

$$I_3=\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

所以抛物面为非中心二次曲面,它的$F_3(x,\ y,\ z)=-1$,所以中心方程组有矛盾,因此抛物面为无心二次曲面.

例3 对于曲面$y^2+z^2-c^2=0$有

$$I_3=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$

所以它是非中心二次曲面，但由于 $F_1(x, y, z)\equiv 0$, $F_2(x, y, z)\equiv y$, $F_3(x, y, z)\equiv z$, 所以曲面有一条中心直线

$$\begin{cases}y=0,\\z=0,\end{cases}$$

所给曲面为线心曲面. 实际上曲面是一个圆柱面，中心直线就是它的对称轴.

习　　题

求下列二次曲面的中心.

1. $2xz+y^2-2y-1=0$;
2. $x^2+y^2+z^2+2xy+6xz-2yz+2x-6y-2z=0$;
3. $x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz-3=0$;
4. $5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6xz+12x-36z=0$;
5. $4x^2+y^2+9z^2-4xy+12xz-6yz+8x-4y+12z-5=0$;
6. $x^2+4y^2+5z^2+4xy-12x+6y-9=0$;
7. $x^2+25y^2+9z^2-10xy+6xz-30yz-2x-2y=0$;
8. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz-2yz+14x-16y+14z+25=0$.

§6.3　二次曲面的切线与切平面

定义 6·3·1　如果直线与二次曲面相交于两个相互重合的点，那么这条直线叫做二次曲面的*切线*，那个重合的交点叫做*切点*，如果直线全部在二次曲面上，这条直线也叫做二次曲面的切线，直线上的每一点都是切点.

根据这个定义，二次曲面的直母线也是切线.

设二次曲面为

$$F(x, y, z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz$$
$$+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \tag{1}$$

那么从§6.1知道，通过曲面(1)上的点(x_0, y_0, z_0)的直线

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt, \end{cases} \tag{2}$$

与曲面(1)相交于两个重合的点的充要条件是

$$\Phi(X, Y, Z)\neq 0,$$
$$XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ZF_3(x_0, y_0, z_0)=0;$$

而直线(2)整个属于曲面(1)的充要条件是

$$\Phi(X, Y, Z)=0,$$
$$XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ZF_3(x_0, y_0, z_0)=0,$$

把上面的两种情形统一起来，我们有：通过曲面(1)上的点(x_0, y_0, z_0)的直线(2)成为曲面在这个点处的切线的充要条件是

$$XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ZF_3(x_0, y_0, z_0)=0. \tag{3}$$

因此通过曲面(1)上的点(x_0, y_0, z_0)，且以满足条件(3)的矢量$\{X, Y, Z\}$为方向矢量的直线都是二次曲面(1)的切线。

条件(3)可能出现两种情形：

1° $F_1(x_0, y_0, z_0)$, $F_2(x_0, y_0, z_0)$, $F_3(x_0, y_0, z_0)$不全为零。由(2)得

$$X:Y:Z=(x-x_0):(y-y_0):(z-z_0),$$

代入(3)得

$$(x-x_0)F_1(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)F_2(x_0, y_0, z_0)$$
$$+(z-z_0)F_3(x_0, y_0, z_0)=0, \tag{6.3-1}$$

这是一个三元一次方程，因此通过曲面(1)上的点(x_0, y_0, z_0)的一切切线上的点构成一个平面(6.3-1)。

定义6.3.2 二次曲面在一点处的一切切线上的点构成的平

面叫做二次曲面的切平面，这一点叫做切点。

2° $F_1(x_0, y_0, z_0)$, $F_2(x_0, y_0, z_0)$, $F_3(x_0, y_0, z_0)$全为零。这时(3)成为恒等式，它被任何的方向 $X:Y:Z$ 所满足，因此通过点(x_0, y_0, z_0)的任何一条直线都是二次曲面(1)的切线。

定义 6.3.3 二次曲面(1)上满足条件

$$F_1(x_0, y_0, z_0)=F_2(x_0, y_0, z_0)=F_3(x_0, y_0, z_0)=0$$

的点(x_0, y_0, z_0)叫做二次曲面(1)的奇异点，简称奇点，二次曲面的非奇异点叫做二次曲面的正常点。

定理 6.3.1 如果(x_0, y_0, z_0)是二次曲面(1)的正常点，那么曲面在点(x_0, y_0, z_0)处存在唯一的切平面，它的方程是(6.3-1)。

利用恒等式

$$\begin{aligned}F(x, y, z)\equiv xF_1(x, y, z)+yF_2(x, y, z)\\+zF_3(x, y, z)+F_4(x, y, z)\end{aligned}$$

还可以把(6·3-1)改写成

$$\begin{aligned}xF_1(x_0, y_0, z_0)+yF_2(x_0, y_0, z_0)+zF_3(x_0, y_0, z_0)\\+F_4(x_0, y_0, z_0)=0.\end{aligned} \tag{6.3-2}$$

推论 如果(x_0, y_0, z_0)是二次曲面(1)的正常点 那么在(x_0, y_0, z_0)处曲面的切平面方程是

$$\begin{aligned}&a_{11}x_0x+a_{22}y_0y+a_{33}z_0z+a_{12}(x_0y+xy_0)\\&+a_{13}(x_0z+xz_0)+a_{23}(y_0z+yz_0)+a_{14}(x+x_0)\\&+a_{24}(y+y_0)+a_{34}(z+z_0)+a_{44}=0.\end{aligned} \tag{6.3-3}$$

例 求二次曲面

$$\begin{aligned}F(x, y, z)\equiv x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz+2x\\+2y+2z+18=0\end{aligned}$$

在点(1, 2, 3)的切平面方程。

解法一 因为 $F(1, 2, 3)=1+4+9-8-12-24+2+4+6+18=0$，所以点(1, 2, 3)在二次曲面上，又因为

$$F_1(x, y, z)=x-2y-2z+1,$$
$$F_2(x, y, z)=-2x+y-2z+1,$$
$$F_3(x, y, z)=-2x-2y+z+1,$$
所以 $$F_1(1, 2, 3)=-8, \quad F_2(1, 2, 3)=-5,$$
$$F_3(1, 2, 3)=-2,$$
这说明点(1, 2, 3)是已知曲面上的正常点，根据公式(6.3-1)得曲面在点(1, 2, 3)处的切平面方程为
$$-8(x-1)-5(y-2)-2(z-3)=0,$$
即 $$8x+5y+2z-24=0.$$

解法二 由解法一知(1, 2, 3)是已知曲面上的正常点，所以根据公式(6·3-3)得所求切平面的方程是
$$x+2y+3z-2(2x+y)-2(3x+z)-2(3y+2z)$$
$$+(x+1)+(y+2)+(z+3)+18=0,$$
即 $$8x+5y+2z-24=0.$$

习 题

1. 验证点(1, −2, 1)是二次曲面
$$x^2-y^2+z^2+xy+2xz+4yz-x+y+z+12=0$$
上的正常点，并求出通过这一点的切平面方程.

2. 试检验下列二次曲面哪些有奇点，哪些没有，如有求出这些奇点来.

(1) $5x^2+y^2-z^2=1$;　　(2) $x^2+2y^2-z^2=0$;

(3) $x^2-y^2=2z$;　　(4) $x^2-y^2=0$;

(5) $y^2=0$.

3. 证明二次锥面 $ax^2+by^2+cz^2=0$ 上任意一点的切平面通过原点.

4. 证明通过单叶双曲面上两条相交直母线的平面是以交点为切点的单叶双曲面的切平面.

5. 求出平面 $lx+my+nz-k=0$ 成为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面的充要条件.

6. 证明平面 $3x+y-9z-28=0$ 与二次曲面 $x^2+2y^2+6xz+4yz+2y-4z+23=0$ 相切，并且求出切点坐标.

7. 求通过直线 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}$ 而且与曲面 $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$ 相切的平面.

8. 求通过坐标原点，与曲面 $x^2-2yz-2y+4z-3=0$ 相切而且与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 相交的直线方程.

9. 已知某一切线的方向是 1:2:2，试求二次曲面 $x^2-3y^2+z^2-2=0$ 上有同一方向的全部切线的轨迹.

§6.4 二次曲面的径面与奇向

象二次曲线的直径一样，现在我们来讨论二次曲面

$$\begin{aligned}F(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy \\ +2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y \\ +2a_{34}z+a_{44}=0\end{aligned} \tag{1}$$

的平行弦的中点轨迹.

定理6.4.1 二次曲面一族平行弦的中点轨迹是一个平面.

证 设 $X:Y:Z$ 为二次曲面的任意一个非渐近方向，而 (x_0, y_0, z_0) 为平行于方向 $X:Y:Z$ 的任意弦的中点，那么弦的方程可以写成

$$\begin{cases}x=x_0+Xt,\\ y=y_0+Yt,\\ z=z_0+Zt,\end{cases} \tag{2}$$

而弦的两端点，是由下列二次方程

$$\begin{aligned}\Phi(X, Y, Z)t^2+2[XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0) \\ +ZF_3(x_0, y_0, z_0)]t+F(x_0, y_0, z_0)=0\end{aligned}$$

的两根 t_1 与 t_2 所决定，因为 (x_0, y_0, z_0) 为弦的中点的充要条件是

$$t_1+t_2=0,$$

即 $XF_1(x_0, y_0, z_0)+YF_2(x_0, y_0, z_0)+ZF_3(x_0, y_0, z_0)=0,$

所以把上式的(x_0, y_0, z_0)改写成(x, y, z)，便得平行弦中点的轨迹方程为

$$XF_1(x, y, z)+YF_2(x, y, z)+ZF_3(x, y, z)=0, \quad (6.4\text{-}1)$$

即
$$X(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14})+Y(a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24})+Z(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{34})=0,$$

或
$$(a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z)x+(a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z)y+(a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z)z+(a_{14}X+a_{24}Y+a_{34}Z)=0,$$

即

$$\Phi_1(X, Y, Z)x+\Phi_2(X, Y, Z)y+\Phi_3(X, Y, Z)z+\Phi_4(X, Y, Z)=0 \quad (6.4\text{-}2)$$

因为$X:Y:Z$为非渐近方向，所以有

$$\Phi(X, Y, Z)\equiv X\Phi_1(X, Y, Z)+Y\Phi_2(X, Y, Z)+Z\Phi_3(X, Y, Z)\neq 0,$$

因此$\Phi_1(X, Y, Z)$，$\Phi_2(X, Y, Z)$，$\Phi_3(X, Y, Z)$不全为零，所以(6.4-2)或(6.4-1)为一个三元一次方程，它代表一个平面。

定义 6.4.1 二次曲面的平行弦的中点轨迹[就是(6.4-1)或(6.4-2)所代表的平面]叫做共轭于平行弦的**径面**，而平行弦叫做这个径面的**共轭弦**，平行弦的方向叫做这个径面的**共轭方向**.

从二次曲面(1)的径面方程(6.4-1)容易看出，如果二次曲面有中心，那么它一定在任何一个径面上，所以有：

定理 6.4.2 二次曲面的任何径面一定通过它的中心(假如曲面的中心存在的话).

推论 1 线心二次曲面的任何径面通过它的中心线.

推论 2 面心二次曲面的径面与它的中心平面重合.

如果方向$X:Y:Z$为二次曲面(1)的渐近方向，那么平行于它的弦不存在，但如果仍有$\Phi_1(X, Y, Z)$，$\Phi_2(X, Y, Z)$，

$\Phi_3(X, Y, Z)$ 不全为零，那么方程(6.4-2)仍然表示一个平面，这时为了方便起见，我们把这个平面叫做共轭于渐近方向 $X:Y:Z$ 的径面．如果

$$\begin{cases} \Phi_1(X, Y, Z) \equiv a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = 0, \\ \Phi_2(X, Y, Z) \equiv a_{12}X + a_{22}Y + a_{23}Z = 0, \\ \Phi_3(X, Y, Z) \equiv a_{13}X + a_{23}Y + x_{33}Z = 0, \end{cases} \tag{3}$$

那么方程(6.4-2)不表示任何平面．

定义 6.4.2 满足条件(3)的渐近方向 $X:Y:Z$ 叫做二次曲面(1)的奇异方向，简称奇向

根据这个定义，我们立刻可以推出：

定理 6.4.3 二次曲面(1)有奇向的充要条件是 $I_3=0$．

推论 中心曲面而且只有中心曲面没有奇向．

定理 6.4.4 二次曲面的奇向平行于它的任意径面．

证 设二次曲面(1)的奇向为 $X_0:Y_0:Z_0$，那么

$$\Phi_1(X_0, Y_0, Z_0) = \Phi_2(X_0, Y_0, Z_0)$$
$$= \Phi_3(X_0:Y_0:Z_0) = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} & X_0\Phi_1(X, Y, Z) + Y_0\Phi_2(X, Y, Z) + Z_0\Phi_3(X, Y, Z) \\ &= X_0(a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z) + Y_0(a_{12}X + a_{22}Y + a_{23}Z) \\ &\quad + Z_0(a_{13}X + a_{23}Y + a_{33}Z) \\ &= X(a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13}Z_0) + Y(a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23}Z_0) \\ &\quad + Z(a_{13}X_0 + a_{23}Y_0 + a_{33}Z_0) \\ &= X\Phi_1(X_0, Y_0, Z_0) + Y\Phi_2(X_0, Y_0, Z_0) \\ &\quad + Z\Phi_3(X_0, Y_0, Z_0) = 0, \end{aligned}$$

所以二次曲面的奇向 $X_0:Y_0:Z_0$ 平行于它的任意径面(6.4-2)．

例 1 求单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的径面．

解 因为单叶双曲面为中心曲面，即 $I_3\neq 0$. 所以它没有奇向，任取方向 $X:Y:Z$，那么

$$\Phi_1(X,Y,Z)=\frac{X}{a^2},\ \Phi_2(X,Y,Z)=\frac{Y}{b^2},$$

$$\Phi_3(X,Y,Z)=-\frac{Z}{c^2},\ \Phi_4(X,Y,Z)=0,$$

所以单叶双曲面共轭于方向 $X:Y:Z$ 的径面为

$$\frac{X}{a^2}x+\frac{Y}{b^2}y-\frac{Z}{c^2}z=0,$$

显然它通过曲面的中心(0, 0, 0).

例 2 求椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的径面.

解 因为椭圆抛物面为无心曲面，$I_3=0$，所以曲面有奇向 $X_0:Y_0:Z_0$，因为

$$\Phi_1(X,Y,Z)\equiv\frac{X}{a^2},\ \Phi_2(X,Y,Z)\equiv\frac{Y}{b^2},$$

$$\Phi_3(X,Y,Z)\equiv 0,$$

所以曲面的奇向为 $X_0:Y_0:Z_0=0:0:1$，任取非奇方向 $X:Y:Z$，那么因为又有 $\Phi_4(X,Y,Z)\equiv -Z$，因此根据(6·4–2)，椭圆抛物面共轭于非奇方向 $X:Y:Z$ 的径面为

$$\frac{X}{a^2}x+\frac{Y}{b^2}y-Z=0,$$

显然它平行于奇向 0:0:1.

习 题

1. 求下列二次曲面的奇向:

(1) $5x^2+2y^2+2z^2-2xy+2xz-4yz-4y-4z+4=0$,

(2) $9x^2-4y^2-91z^2+18xy-40yz-36=0$,

(3) $x^2+y^2+4z^2+2xy-4xz-4yz-4x-4y+8z=0$,

2 求 $x^2+2y^2-z^2-2xy-2xz-2yz-4x-7=0$ 与方向 $1:(-1):0$ 共轭

的径面.

3. 已知二次曲面 $6x^2+9y^2+z^2+6xy-4xz-2y-3=0$, 求平行于平面 $x+3y-z+5=0$ 的径面和与它所共轭的方向.

4 已知二次曲面 $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$, 求通过原点及点 $(3,6,2)$ 的径面和与它所共轭的方向.

5. 证明通过中心二次曲面中心的任何平面都是径面.

6. 求下列三个二次曲面的公共直径面.

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0,$$
$$3y^2+4xy-2xz+6z+5=0,$$
$$6x^2-3y^2+2z^2+4xy-8xz-4x+4y-5=0.$$

§6.5 二次曲面的主径面与主方向,特征方程与特征根

定义 6.5.1 如果二次曲面的径面垂直于它所共轭的方向,那么这个径面就叫做二次曲面的主径面.

显然主径面就是二次曲面的对称面.

定义 6.5.2 二次曲面主径面的共轭方向(即垂直于主径面的方向),或者二次曲面的奇向,叫做二次曲面的主方向.

下面我们将介绍如何求二次曲面的主方向与主径面.

设二次曲面为

$$\begin{aligned}F(x,y,z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy\\ +2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x\\ +2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,\end{aligned}\tag{1}$$

方向 $X:Y:Z$ 如果是(1)的渐近方向,那么它成为(1)的主方向的条件是

$$\begin{cases}a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z=0,\\ a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z=0,\\ a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z=0\end{cases}\tag{2}$$

成立，即 $X:Y:Z$ 必须是(1)的奇向.

如果 $X:Y:Z$ 是(1)的非渐近方向，那么它成为(1)的主方向的条件是与它的共轭径面

$$(a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z)x+(a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z)y$$
$$+(a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z)z+(a_{14}X+a_{24}Y+a_{34}Z)=0 \quad (3)$$

垂直，所以有

$$(a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z):(a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z)$$
$$:(a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z)=X:Y:Z,$$

从而得

$$\begin{cases} a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z=\lambda X, \\ a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z=\lambda Y, \\ a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z=\lambda Z. \end{cases} \tag{6.5-1}$$

显然，如果在(6.5-1)中取 $\lambda=0$，那么就得到(2)，因此方向 $X:Y:Z$ 成为二次曲面(1)的主方向的充要条件是存在 λ，使得(6.5-1)成立，把(6.5-1)改写成

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)X+a_{12}Y+a_{13}Z=0, \\ a_{12}X+(a_{22}-\lambda)Y+a_{23}Z=0, \\ a_{13}X+a_{23}Y+(a_{33}-\lambda)Z=0. \end{cases} \tag{6.5-2}$$

这是一个关于 X, Y, Z 的齐次线性方程组，因为 X, Y, Z 不能全为零，因此

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{6.5-3}$$

即

$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=0. \tag{6.5-4}$$

定义 6.5.3 方程(6.5-3)或(6.5-4)叫做二次曲面的特征方程，特征方程的根叫做二次曲面的特征根.

从特征方程(6.5-3)或(6.5-4)求得特征根 λ，代入(6.5-1)或

(6.5-2)，就可以求出相应的主方向 $X:Y:Z$. 容易看出，当 $\lambda=0$ 时，与它相应的主方向为二次曲面的奇向；当 $\lambda\neq0$ 时，与它相应的主方向为非奇主方向，将非奇主方向 $X:Y:Z$ 代入(6.4-1)或(6.4-2)就得共轭于这个非奇主方向的主径面.

例 1 求二次曲面

$$3x^2+y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz+4x+14y+4z-23=0$$

的主方向与主径面.

解 这个二次曲面的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & -23 \end{pmatrix},$$

$$I_1=3+1+3=7,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=12,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

二次曲面的特征方程为

$$-\lambda^3+7\lambda^2-12\lambda=0,$$

所以特征根为

$$\lambda=4,\ 3,\ 0.$$

1° 将 $\lambda=4$ 代入(6·5-2)得

$$\begin{cases} -X-Y-Z=0, \\ -X-3Y-Z=0, \\ -X-Y-Z=0, \end{cases}$$

解这方程组得对应于特征根 $\lambda=4$ 的主方向为

$$X:Y:Z=1:0:(-1),$$

将它代入(6·4-1)或(6·4-2)并化简得共轭于这个主方向的主径面为

$$x-z=0.$$

2° 将 $\lambda=3$ 代入(6·5-2)得

$$\begin{cases}-Y-Z=0,\\ -X-2Y-Z=0,\\ -X-Y=0,\end{cases}$$

所以对应于特征根 $\lambda=3$ 的主方向为

$$X:Y:Z=1:(-1):1,$$

与它共轭的主径面为

$$x-y+z-1=0.$$

3° 将 $\lambda=0$ 代入(6·5-2)得

$$\begin{cases}3X-Y-Z=0,\\ -X+Y-Z=0,\\ -X-Y+3Z=0,\end{cases}$$

所以对应于 $\lambda=0$ 的主方向为

$$X:Y:Z=1:2:1,$$

这一主方向为二次曲面的奇向.

例 2 求二次曲面

$$2xy+2xz+2yz+9=0$$

的主方向与主径面.

解 这个二次曲面的矩阵是

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&9\end{pmatrix},$$

$$I_1=0,\ I_2=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-3,$$

$$I_3=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=2,$$

所以特征方程为

$$-\lambda^3+3\lambda+2=0.$$

从而 $$(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0,$$

所以 $$\lambda=-1,\ -1,\ 2.$$

1° 将 λ 的二重根 $\lambda=-1$ 代入(6·5-2)得

$$\begin{cases}X+Y+Z=0,\\X+Y+Z=0,\\X+Y+Z=0,\end{cases}$$

所以对应于二重特征根 $\lambda=-1$ 的主方向为平行于平面

$$x+y+z=0$$

的一切方向，因此过曲面的中心 (0, 0, 0) 且垂直于平面 $x+y+z=0$ 的一切平面，都是二次曲面的主径面.

2° 将 $\lambda=2$ 代入(6.5-2)得

$$\begin{cases}-2X+Y+Z=0,\\X-2Y+Z=0,\\X+Y-2Z=0,\end{cases}$$

所以对应于 $\lambda=2$ 的主方向为

$$X:Y:Z=1:1:1,$$

与它共轭的主径面为

$$x+y+z=0.$$

关于二次曲面的特征根，有着下面的一些重要性质.

定理 6.5.1 二次曲面的特征根都是实数.

证 设 λ 为二次曲面(1)的任一特征根，与它相应的主方向为 $X:Y:Z$，根据(6.5-1)有

$$\begin{cases} a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z=\lambda X, \\ a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z=\lambda Y, \\ a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z=\lambda Z, \end{cases} \tag{4}$$

在没有证明 λ 一定是实数之前，我们把与它相应的方向 $X:Y:Z$ 写成复数形式①：

$$X:Y:Z=(l+l'i):(m+m'i):(n+n'i).$$

这里包括了 $l'=m'=n'=0$ 的情形，也就是包括了 $X:Y:Z$ 是实数形式的情形，所以(4)可写成

$$a_{11}(l+l'i)+a_{12}(m+m'i)+a_{13}(n+n'i) \\ =\lambda(l+l'i), \tag{5}$$

$$a_{12}(l+l'i)+a_{22}(m+m'i)+a_{23}(n+n'i) \\ =\lambda(m+m'l), \tag{6}$$

$$a_{13}(l+l'i)+a_{23}(m+m'i)+a_{33}(n+n'i) \\ =\lambda(n+n'i). \tag{7}$$

再以 X, Y, Z 的共轭复数 $\overline{X}=l-l'i$, $\overline{Y}=m-m'i$, $\overline{Z}=n-n'i$ 分别乘(5)，(6)，(7)三式，然后相加，就得到

$$a_{11}(l^2+l'^2)+a_{22}(m^2+m'^2)+a_{33}(n^2+n'^2) \\ +2a_{12}(lm+l'm')+2a_{13}(ln+l'n')+2a_{23}(mn+m'n') \\ =\lambda(l^2+l'^2+m^2+m'^2+n^2+n'^2).$$

因为 X, Y, Z 不全为零，所以 l, l', m, m', n, n' 总不全为零，而且因为它们都是实数，所以从上式可以看出，λ 一定是实数. 因为 λ 是二次曲面(1)的任一特征根，所以二次曲面(1)的特征根都是

---

① 注意：λ 为实数时，解方程组 (6.5-1) 或 (6.5-2) 所得对应于 λ 的主方向 $X:Y:Z$ 仍然可以写成复数的形式，例如 $X:Y:Z=1:2:3$，也可以写成

$$X:Y:Z=(2+3i):(4+6i):(6+9i).$$

实数.

定理6.5.2 特征方程的三个根至少有一个不为零，因而二次曲面总有一个非奇主方向.

证 如果特征方程(6.5-4)的三个根全为零，那么有

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}=0,$$

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2=0,$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}=0.$$

从而有

$$I_1^2-2I_2=(a_{11}+a_{22}+a_{33})^2-2(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2)=0,$$

即
$$a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+2a_{12}^2+2a_{13}^2+2a_{23}^2=0,$$

因而得
$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{12}=a_{13}=a_{23}=0.$$

于是二次曲面(1)将不含二次项而变成

$$2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

这样便不成为二次方程. 这个矛盾就证明了特征方程的三个特征根不能全为零，即至少有一个根不等于零，因而二次曲面(1)至少有一个非奇主方向.

推论 二次曲面至少有一个主径面.

习 题

1. 求下列二次曲面的主方向与主径面.

(1) $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$;

(2) $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$;

(3) $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$;

(4) $x^2+y^2-2xy+2x-4y-2z+3=0$.

2. 证明二次曲面的两个不同特征根决定的主方向一定相互垂直.

§6.6 二次曲面方程的化简与分类

这一节，我们先介绍空间直角坐标变换，然后利用坐标变换讨论二次曲面方程的化简与分类.

1. 空间直角坐标变换

设在空间给出了两个由标架$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$与$\{O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$决定的右手直角坐标系，为了叙述方便，我们把前面的一个叫做旧坐标系，后面的一个叫做新坐标系. 它们之间的位置关系完全可由新坐标系的原点O'在旧坐标系内的坐标，以及新坐标系的坐标矢量在旧坐标系内的分量所决定. 在这里我们先讨论两种特殊的坐标变换，然后研究一般坐标变换.

(1) 移轴

设标架$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$与$\{O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$的原点$O$与$O'$不同，$O'$在旧坐标系下的坐标为$(x_0,y_0,z_0)$，但是$\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$（图 6-1），这时新坐标系可以看成由$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$平移到使$O$与$O'$重合而得来的，我们把这种情况下的坐标变换叫做**移轴**.

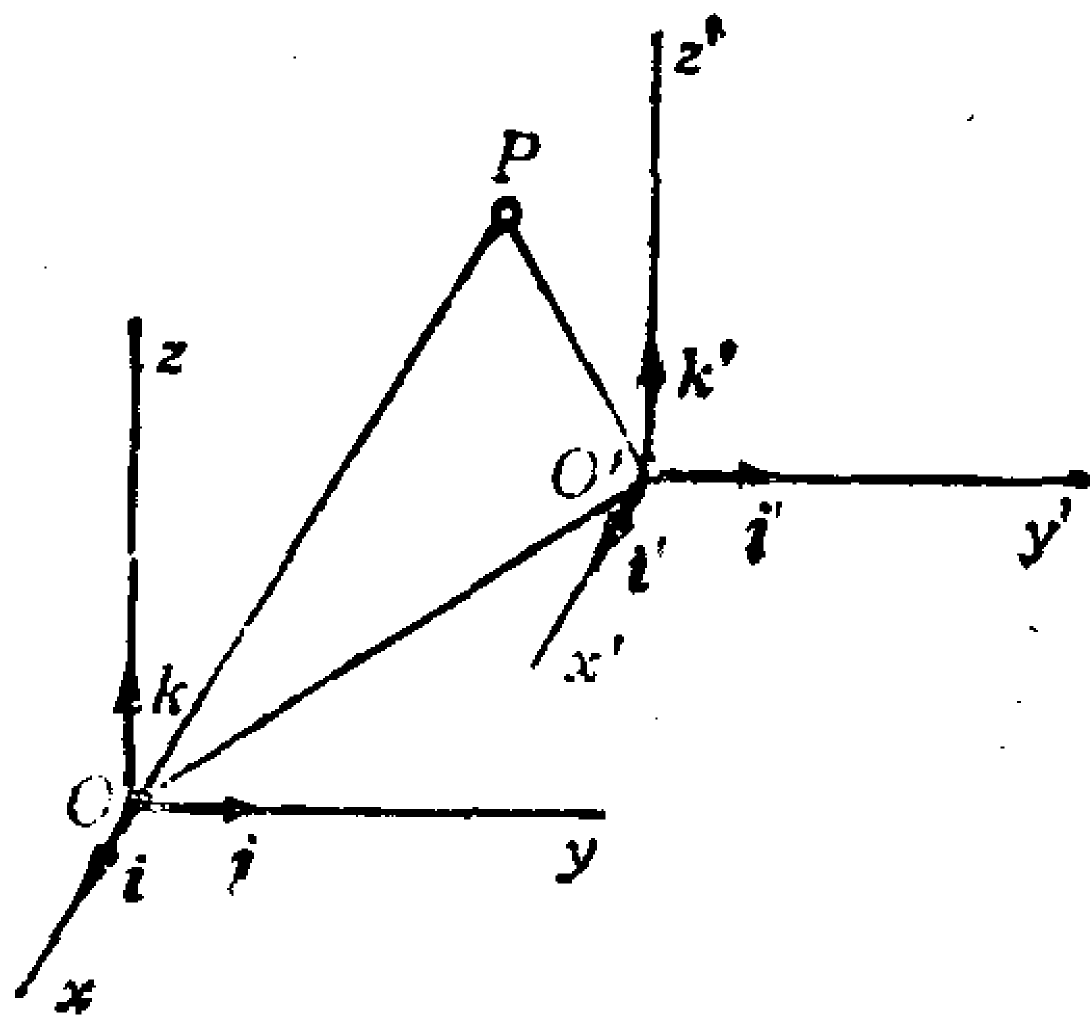


图 6-1

设P为空间任意一点，它在$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$与$\{O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$下的坐标分别是$(x,y,z)$与$(x',y',z')$，那么

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{1}$$
$$\overrightarrow{O'P}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'$$

$$=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

此外又有

$$\overrightarrow{OO'}=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P} \tag{4}$$

将(1),(2),(3)三式代入(4)得:

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x'+x_0)\boldsymbol{i}+(y'+y_0)\boldsymbol{j}+(z'+z_0)\boldsymbol{k},$$

所以得

$$\begin{cases} x=x'+x_0, \\ y=y'+y_0, \\ z=z'+z_0, \end{cases} \tag{6.6-1}$$

这就是空间直角坐标系的**移轴公式**.

从(6.6-1)解出 x', y', z' 就得到用旧坐标表示新坐标的坐标变换公式,即移轴的逆变换公式

$$\begin{cases} x'=x-x_0, \\ y'=y-y_0, \\ z'=z-z_0. \end{cases} \tag{6.6-2}$$

例 1 试求在移轴(6.6-1)下二次曲面

$$\begin{aligned} F(x,\ y,\ z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy \\ +2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x \\ +2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \end{aligned}$$

的新方程.

解 将(6.6-1)代入二次曲面方程 $F(x,\ y,\ z)=0$, 化简整理得移轴后的新方程为

$$\begin{aligned} a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{13}x'z' \\ +2a_{23}y'z'+2F_1(x_0,\ y_0,\ z_0)\cdot x'+2F_2(x_0,\ y_0,\ z_0)\cdot y' \\ +2F_3(x_0,\ y_0,\ z_0)\cdot z'+F(x_0,\ y_0,\ z_0)=0, \end{aligned}$$

由此看出，在移轴下二次曲面方程的二次项系数不变. 如果二次曲面为中心曲面，作移轴时使原点与二次曲面的中心重合，那么有

$$F_1(x_0,\ y_0,\ z_0)=0,\ F_2(x_0,\ y_0,\ z_0)=0,\ F_3(x_0,\ y_0,\ z_0)=0,$$

所以这时曲面的新方程中一次项消失，方程为

$$\begin{aligned}a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{13}x'z'\\+2a_{23}y'z'+F(x_0,\ y_0,\ z_0)=0.\end{aligned}$$

(2) 转轴

设两右手标架 $\{O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ 与 $\{O';\ \boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}'\}$ 的原点相同，但坐标矢量不同 (图 6-2)，这时新坐标系可以看成由旧坐标系绕原点 O 旋转，使得 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 分别与 $\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}'$ 重合而得到的，我们把这种情况下的坐标变换叫做**转轴**.

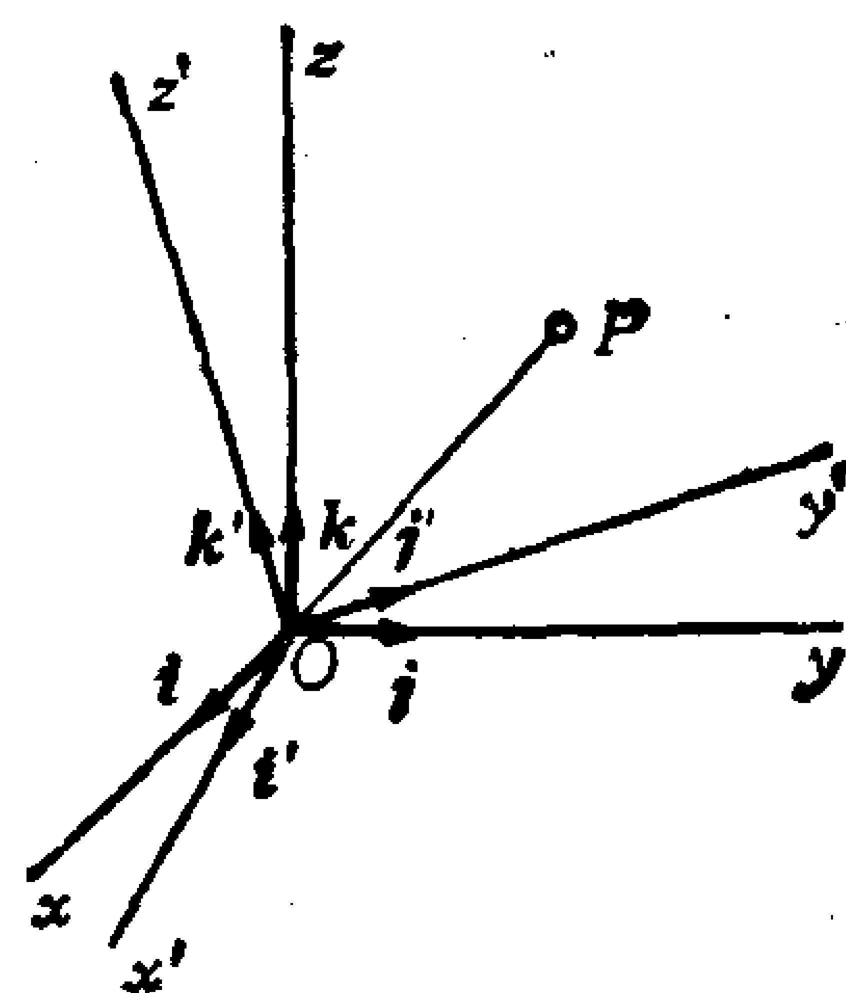


图 6-2

具有相同原点的两坐标系，它们之间的位置关系完全由新、旧坐标轴之间的交角（也就是坐标矢量 $\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}'$ 分别与 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 之间的交角）来决定，为了清楚起见，我们列表如下：

交角 ＼ 旧坐标轴 / 新坐标轴	x 轴 ($\boldsymbol{i}$)	y 轴 ($\boldsymbol{j}$)	z 轴 ($\boldsymbol{k}$)
x' 轴 ($\boldsymbol{i}'$)	α_1	β_1	γ_1
y' 轴 ($\boldsymbol{j}'$)	α_2	β_2	γ_2
z' 轴 ($\boldsymbol{k}'$)	α_3	β_3	γ_3

(5)

从这个表(5)里我们容易知道

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_1+\boldsymbol{j}\cos\beta_1+\boldsymbol{k}\cos\gamma_1, \\ \boldsymbol{j}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_2+\boldsymbol{j}\cos\beta_2+\boldsymbol{k}\cos\gamma_2, \\ \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_3+\boldsymbol{j}\cos\beta_3+\boldsymbol{k}\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{6}$$

设 P 为空间任意一点，它在旧坐标系内的坐标为 (x, y, z)，在新坐标系内的坐标为 (x', y', z')，那么有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{7}$$

$$\overrightarrow{OP}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}', \tag{8}$$

由(7)，(8)得

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'. \tag{9}$$

把(6)代入(9)得

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=&(x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} \\ &+(x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} \\ &+(x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3)\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3, \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3, \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{6.6-3}$$

这就是空间直角坐标变换的转轴公式.

同样地由上面的表格(5)容易知道

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}'\cos\alpha_1+\boldsymbol{j}'\cos\alpha_2+\boldsymbol{k}'\cos\alpha_3, \\ \boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}'\cos\beta_1+\boldsymbol{j}'\cos\beta_2+\boldsymbol{k}'\cos\beta_3, \\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}'\cos\gamma_1+\boldsymbol{j}'\cos\gamma_2+\boldsymbol{k}'\cos\gamma_3, \end{cases} \tag{10}$$

将(10)代入(9)，就得到用旧坐标表示新坐标的公式，也就是转轴的逆变换公式为：

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1, \\ y'=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2, \\ z'=x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{6.6-4}$$

转轴变换公式(6.6-3)及其逆变换公式(6.6-4)都是齐次线性

变换. 它们的一次项系数不是独立的，这是因为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 是两组两两相互垂直的单位矢量，即有

$$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=1, \qquad \boldsymbol{i}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}=0,$$

与

$$|\boldsymbol{i}'|=|\boldsymbol{j}'|=|\boldsymbol{k}'|=1, \quad \boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}'\boldsymbol{i}'=0.$$

所以变换公式(6.6-3)与逆变换公式(6.6-4)中的一次项系数分别满足下列条件:

$$\begin{cases}\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,\\ \cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1,\\ \cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1,\\ \cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3=0,\\ \cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3=0,\\ \cos\gamma_1\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\cos\alpha_2+\cos\gamma_3\cos\alpha_3=0;\end{cases} \tag{6.6-5}$$

与

$$\begin{cases}\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,\\ \cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1,\\ \cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1,\\ \cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,\\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0,\\ \cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0.\end{cases} \tag{6.6-6}$$

这两组条件分别叫做正交条件，我们再从

$$(\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}')=1,$$

又可得(6.6-3)与(6.6-4)的系数行列式

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}$$

$$=1. \tag{6.6-7}$$

例 2 证明在空间任意的转轴下，多项式 $x^2+y^2+z^2$ 变为 $x'^2+y'^2+z'^2$.

证 将(6.6-3)代入 $x^2+y^2+z^2$ 整理得

$$(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1)x'^2+(\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2)y'^2$$
$$+(\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3)z'^2$$
$$+2x'y'(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)$$
$$+2x'z'(\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3)$$
$$+2y'z'(\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3),$$

根据正交条件(6.6-6)得

$$x'^2+y'^2+z'^2.$$

(3) 一般变换公式

设在空间给出了由标架 $\{O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ 决定的旧坐标系与由标架 $\{O';\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}'\}$ 决定的新坐标系，且 O' 在旧坐标系内的坐标为 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，两坐标系的坐标轴之间的交角仍由表格(5)决定，那么在这种一般情况下，由旧坐标系变到新坐标系可分两步来完成. 例如可以先移轴，使原点 O 与新坐标系的原点 O' 重合，变成辅助坐标系 $O'-x''y''z''$. 然后再由辅助坐标系转轴变到新坐标系(图 6-3).

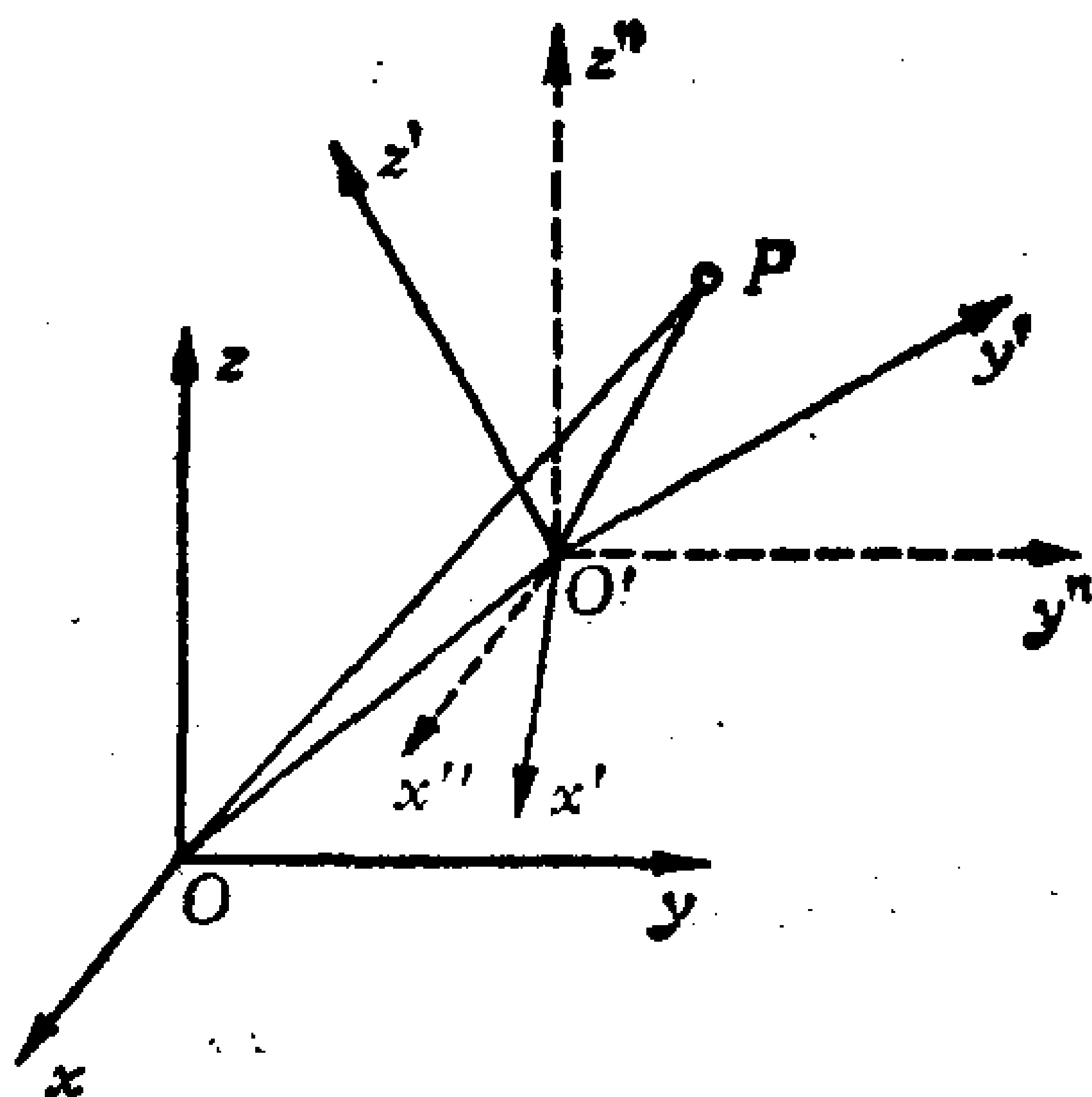


图 6-3

如果 P 为空间任意一点，它在旧坐标系、新坐标系与辅助坐标系内的坐标分别为 $(x,\ y,\ z)$，$(x',\ y',\ z')$ 与 $(x'',\ y'',\ z'')$，那么根据(6.6-1)与(6.6-3)我们有

$$\begin{cases} x=x''+x_0, \\ y=y''+y_0, \\ z=z''+z_0; \end{cases} \tag{11}$$

与

与
$$\begin{cases} x''=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3, \\ y''=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3, \\ z''=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3; \end{cases} \tag{12}$$

将(12)代入(11)得空间直角坐标变换的一般公式为

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3+x_0, \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3+y_0, \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3+z_0. \end{cases} \tag{6.6-8}$$

一般坐标变换公式也可以通过先转轴后移轴得到，其结果仍然是(6.6-8).

由(6.6-7)知，一般坐标变换公式(6.6-8)的系数行列式不为零，因此从(6.6-8)解出 x', y', z' 就得到用旧坐标来表示新坐标的变换公式，也就是(6.6-8)的逆变换公式：

$$\begin{cases} x'=(x-x_0)\cos\alpha_1+(y-y_0)\cos\beta_1+(z-z_0)\cos\gamma_1, \\ y'=(x-x_0)\cos\alpha_2+(y-y_0)\cos\beta_2+(z-z_0)\cos\gamma_2, \\ z'=(x-x_0)\cos\alpha_3+(y-y_0)\cos\beta_3+(z-z_0)\cos\gamma_3. \end{cases} \tag{6.6-9}$$

我们看到一般坐标变换(6.6-8)与其逆变换(6.6-9)的形式十分简单，它们的右端分别是关于 x', y', z' 与 x, y, z 的一次(即线性的)多项式，它们的系数分别满足正交条件(6.6-5)与(6.6-6)，它们的系数行列式都等于1.

空间一般坐标变换公式，还可以由新坐标系的三个坐标面来确定. 设有两两相互垂直的三个平面

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$\pi_3:\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$$

这里 $A_iA_j+B_iB_j+C_iC_j=0$. $(i, j=1, 2, 3, i\neq j)$. 如果取 π_1 为 $y'O'z'$ 平面，π_2 为 $x'O'z'$ 平面，π_3 为 $x'O'y'$ 平面，并设空间任

意一点 $P(x, y, z)$ 到平面 $\pi_i(i=1, 2, 3)$ 的距离为 d_i，P 点的新坐标为(x', y', z')，那么有

$$|x'|=d_1=\frac{|A_1x+B_1y+C_1z+D_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

$$|y'|=d_2=\frac{|A_2x+B_2y+C_2z+D_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

$$|z'|=d_3=\frac{|A_3x+B_3y+C_3z+D_3|}{\sqrt{A_3^2+B_3^2+C_3^2}},$$

去掉绝对值号得坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=\pm\dfrac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \\ y'=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \\ z'=\pm\dfrac{A_3x+B_3y+C_3z+D_3}{\sqrt{A_3^2+B_3^2+C_3^2}}. \end{cases} \qquad (6.6\text{-}10)$$

显然，(6.6–10)符合正交条件，为了使坐标变换为右手系变到右手系，(6.6–10)中的正负号的选取必须使它的系数行列式的值为 $+1$.

例如以下列三个两两相互垂直的平面

$$x-y-z+1=0,$$

$$2x+y+z-1=0,$$

$$y-z+2=0,$$

分别作为新坐标系的 $y'O'z'$ 面，$x'O'z'$ 面与 $x'O'y'$ 面的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x'=\pm\dfrac{x-y-z+1}{\sqrt{3}}, \\ y'=\pm\dfrac{2x+y+z-1}{\sqrt{6}}, \\ z'=\pm\dfrac{y-z+2}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

为了使右手系变为右手系，我们取符号如下：

$$
\begin{cases}
x'=\dfrac{x-y-z+1}{\sqrt{3}},\\
y'=\dfrac{2x+y+z-1}{\sqrt{6}},\\
z'=-\dfrac{y-z+2}{\sqrt{2}}.
\end{cases}
$$

例 3 试将方程 $2x+3y+4z+5=0$ 用适当的坐标变换变为新方程 $x'=0$.

解 取平面 $2x+3y+4z+5=0$ 作为新坐标系的 $y'O'z'$ 坐标面，再任取两个相互垂直且又都垂直于已知平面 $2x+3y+4z+5=0$ 的平面作为另两个新坐标面，例如可取平面 $x-2y+z=0$ 与 $11x+2y-7z=0$.

作坐标变换

$$
\begin{cases}
x'=\dfrac{2x+3y+4z+5}{\sqrt{29}},\\
y'=\dfrac{x-2y+z}{\sqrt{6}},\\
z'=\dfrac{11x+2y-7z}{\sqrt{174}},
\end{cases}
$$

那么 $2x+3y+4z+5=0$ 将变成 $\sqrt{29}\,x'=0$, 即 $x'=0$.

2. 二次曲面方程的化简与分类

二次曲面方程的化简与二次曲线一样，它的关键是适当选取坐标系，如果所取的坐标系中有一坐标面(例如 $x=0$)是曲面的对称面，那么新方程里只含有这个对应坐标(例如 x)的平方项，曲面的方程就比较简单了，二次曲面的主径面就是它的对称面，因而选取主径面作为新坐标面，或者选取主方向为坐标轴的方向，就成为化简二次曲面方程的主要方法了.

定理 6.6.1 适当选取坐标系，二次曲面的方程总可化为下

列五个简化方程中的一个：

(Ⅰ) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}=0,\quad a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0;$

(Ⅱ) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z=0,\quad a_{11}a_{22}a_{34}\neq 0;$

(Ⅲ) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}=0,\quad a_{11}a_{22}\neq 0;$

(Ⅳ) $a_{11}x^2+2a_{24}y=0,\quad a_{11}a_{24}\neq 0;$

(Ⅴ) $a_{11}x^2+a_{44}=0,\quad a_{11}\neq 0.$

证 因为二次曲面

$$F(x,y,z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

至少有一非奇主方向，以及共轭于这个方向的一个主径面，我们就取这个主方向为 x' 轴的方向，而共轭于这个方向的主径面为 $y'O'z'$ 坐标面，建立直角坐标系 O'-$x'y'z'$. 设在这样的坐标系下曲面的方程为①

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{12}x'y'+2a'_{13}x'z'+2a'_{23}y'z'+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0, \tag{13}$$

那么在 O'-$x'y'z'$ 坐标系下，曲面的与 x' 轴方向 1:0:0 共轭的主径面为

$$a'_{11}x'+a'_{12}y'+a'_{13}z'+a'_{14}=0,$$

这个方程表示 $y'O'z'$ 坐标面的充要条件为

$$a'_{11}\neq 0,\ a'_{12}=a'_{13}=a'_{14}=0,$$

所以曲面在 O'-$x'y'z'$ 坐标系下的方程为

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{23}y'z'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0,\quad a'_{11}\neq 0. \tag{14}$$

曲面(14)与 $y'O'z'$ 坐标面的交线为

① 因为空间直角坐标变换公式(6.6-8)与逆变换公式(6.6-9)都是一次式，因此二次曲面的方程在直角坐标变换之下，方程的次数不变。

$$\begin{cases} a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{23}y'z'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}=0, \\ x'=0, \end{cases} \tag{15}$$

为了进一步化简二次曲面的方程，把上面交线方程中的第一个方程(15)看作 $y'O'z'$ 平面上的曲线方程，然后再利用平面直角坐标变换把它化简. 现在分下面三种情形讨论.

1° a'_{22}, a'_{33}, a'_{23} 中至少有一不为零. 这时曲线(15)表示一条二次曲线，那么在平面 $y'O'z'$ 上根据定理5.6.1总能选取适当的坐标系 $y''O''z''$，也就是进行适当的平面直角坐标变换

$$\begin{cases} y'=y''\cos\alpha-z''\sin\alpha+y_0, \\ z'=y''\sin\alpha+z''\cos\alpha+z_0, \end{cases}$$

使二次曲线(15)化成下面三个简化方程中的一个

$$a''_{22}y''^2+a''_{33}z''^2+a''_{44}=0, \qquad a''_{22}a''_{33}\neq 0;$$

$$a''_{22}y''^2+2a''_{34}z''=0, \qquad a''_{22}a''_{34}\neq 0;$$

$$a''_{22}y''^2+a''_{44}=0, \qquad a''_{22}\neq 0.$$

于是在空间，我们只要进行相应的直角坐标变换

$$\begin{cases} x'=x'', \\ y'=y''\cos\alpha-z''\sin\alpha+y_0, \\ z'=y''\sin\alpha+z''\cos\alpha+z_0, \end{cases}$$

就可以把方程(14)变为下面的三个简化方程(略去撇号)中的一个：

(Ⅰ) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}=0, \qquad a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0;$

(Ⅱ) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z=0, \qquad a_{11}a_{22}a_{34}\neq 0;$

(Ⅲ) $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{44}=0, \qquad a_{11}a_{22}\neq 0.$

2° $a'_{22}=a'_{33}=a'_{23}=0$，但 a'_{24}, a'_{34} 不全为零. 这时曲线(15)表示一条直线，我们取这条直线作为 z'' 轴，作空间直角坐标变换，

$$\begin{cases} x''=x', \\ y''=\dfrac{2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a'_{44}}{2\sqrt{a'^2_{24}+a'^2_{34}}}, \\ z''=\dfrac{-a'_{34}y'+a'_{24}z'}{\sqrt{a'^2_{24}+a'^2_{34}}}. \end{cases}$$

就可以把(14)式化成下列形式(略去撇号):

(IV) $a_{11}x^2+2a_{24}y=0,\quad a_{11}a_{24}\neq0.$

3° $a'_{22}=a'_{33}=a'_{23}=a'_{24}=a'_{34}=0$. 这时方程(14)已经是下列简化形式(略去撇号):

(V) $a_{11}x^2+a_{44}=0,\quad a_{11}\neq0.$

定理证毕.

因此二次曲面可以分成(I),(II),(III),(IV),(V)五类,根据这五类曲面的简化方程系数的各种不同情况,仿照定理5.6.2的证明,读者自己可以证明下面的定理:

定理6.6.2 通过适当的选取坐标系,二次曲面的方程总可以写成下面十七种标准方程的一种形式:

[1] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (椭球面);

[2] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (虚椭球面);

[3] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (点或称虚母线二次锥面);

[4] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (单叶双曲面);

[5] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (双叶双曲面);

[6] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (二次锥面);

[7] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ (椭圆抛物面);

[8] $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ （双曲抛物面）；

[9] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （椭圆柱面）；

[10] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ （虚椭圆柱面）；

[11] $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ （交于一条实直线的一对共轭虚平面）；

[12] $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （双曲柱面）；

[13] $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ （一对相交平面）；

[14] $x^2=2py$ （抛物柱面）；

[15] $x^2=a^2$ （一对平行平面）；

[16] $x^2=-a^2$ （一对平行的共轭虚平面）；

[17] $x^2=0$ （一对重合平面）。

例 4 化简二次曲面方程

$$x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+6y-6z+10=0.$$

解 二次曲面的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 10 \end{pmatrix},$$

$$I_1=7,\ I_2=0,\ I_3=-36,$$

所以曲面的特征方程为

$$-\lambda^3+7\lambda^2-36=0,$$

即
$$(\lambda-6)(\lambda-3)(\lambda+2)=0,$$

因此二次曲面的三特征根为

$$\lambda=6,\ 3,\ -2.$$

(i) 与特征根 $\lambda=6$ 对应的主方向 $X:Y:Z$ 由方程组

$$\begin{cases}-5X-3Y-Z=0,\\ -3X-5Y+Z=0,\\ -X+Y-Z=0\end{cases}$$

决定，所以对应于特征根 $\lambda=6$ 的主方向为

$$X:Y:Z=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -5 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 1 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-5 & -3\\ -3 & -5\end{vmatrix}$$

$$=-8:8:16=-1:1:2,$$

与它共轭的主径面为

$$-x+y+2z=0.$$

(ii) 与特征根 $\lambda=3$ 对应的主方向 $X:Y:Z$ 由方程组

$$\begin{cases}-2X-3Y-Z=0,\\ -3X-2Y+Z=0,\\ -X+Y+2Z=0\end{cases}$$

决定，所以对应于特征根 $\lambda=3$ 的主方向为

$$X:Y:Z=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-2 & -3\\ -3 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-5:5:(-5)=1:(-1):1,$$

与它共轭的主径面为

$$x-y+z-3=0.$$

(iii) 与特征根 $\lambda=-2$ 对应的主方向 $X:Y:Z$ 由方程组

$$\begin{cases}3X-3Y-Z=0,\\ -3X+3Y+Z=0,\\ -X+Y+7Z=0\end{cases}$$

决定，所以主方向为

$$X:Y:Z=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & -3\\ 7 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=20:20:0=1:1:0,$$

与它共轭的主径面为

$$x+y=0.$$

取这三主径面为新坐标平面作坐标变换，由(6.6-10)得变换公式为：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{-x+y+2z}{\sqrt{6}}, \\ y'=\dfrac{x-y+z-3}{\sqrt{3}}, \\ z'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

解出 x, y 与 z 得

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z'+1, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z'-1, \\ z=\dfrac{2}{\sqrt{6}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y'+1, \end{cases}$$

代入原方程得曲面的简化方程为①

$$6x'^2+3y'^2-2z'^2+1=0,$$

曲面的标准方程为

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{6}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{3}}-\frac{z'^2}{\frac{1}{2}}=-1.$$

这是一个双叶双曲面.

例 5 化简二次曲面方程

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x$$
$$+6y-2z+3=0.$$

解 因为 $I_1=7$, $I_2=10$, $I_3=0$, 所以曲面的特征方程为

① 在计算新方程的系数时，对于曲面具有三个两两相互垂直的主径面，且以这三主径面为三新坐标面时的情形，只要计算平方项与常数项，其余系数均为零，不必计算. 对于曲面的其他情形，也可得出相应的结论.

$$-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda=0,$$

特征根为 $$\lambda=5,\ 2,\ 0.$$

非零特征根 $\lambda=5$ 所对应的主方向由方程组

$$\begin{cases}-3X+2Y+Z=0,\\ 2X-3Y+Z=0,\\ X+Y-2Z=0\end{cases}$$

决定，所以与 $\lambda=5$ 所对应的主方向为

$$X:Y:Z=1:1:1,$$

与这主方向共轭的主径面为

$$x+y+z=0.$$

非零特征根 $\lambda=2$ 所对应的主方向由方程组

$$\begin{cases}2Y+Z=0,\\ 2X+Z=0,\\ X+Y+Z=0\end{cases}$$

决定，所以与 $\lambda=2$ 所对应的主方向为

$$X:Y:Z=1:1:(-2),$$

与这主方向共轭的主径面为

$$2x+2y-4z+3=0.$$

取上面的两个主径面分别作为新坐标系 $O'\text{-}x'y'z'$ 的 $y'O'z'$ 与 $x'O'z'$ 坐标面，再任意取与这两主径面都垂直的平面，比如

$$-x+y=0$$

为 $x'O'y'$ 坐标面，作坐标变换，得变换公式为

$$\begin{cases}x'=\dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}},\\ y'=\dfrac{2x+2y-4z+3}{2\sqrt{6}},\\ z'=\dfrac{-x+y}{\sqrt{2}};\end{cases}$$

解出 x, y, z 得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x'+\dfrac{\sqrt{6}}{6}y'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z'-\dfrac{1}{4}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x'+\dfrac{\sqrt{6}}{6}y'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z'-\dfrac{1}{4}, \\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x'-\dfrac{\sqrt{6}}{3}y'+\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

代入原方程得

$$5x'^2+2y'^2+5\sqrt{2}z'+\frac{9}{4}=0,$$

$$\therefore \qquad 5x'^2+2y'^2+5\sqrt{2}\left(z'+\frac{9\sqrt{2}}{40}\right)=0.$$

再作移轴

$$\begin{cases} x'=x'', \\ y'=y'', \\ z'=z''-\dfrac{9\sqrt{2}}{40}, \end{cases}$$

得曲面的简化方程为

$$5x''^2+2y''^2+5\sqrt{2}z''=0.$$

这是一个椭圆抛物面.

至于把已知方程化为简化方程的直角坐标变换，则可由上面的两个直角坐标变换的公式求得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x''+\dfrac{\sqrt{6}}{6}y''-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z''-\dfrac{1}{40}, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x''+\dfrac{\sqrt{6}}{6}y''+\dfrac{\sqrt{2}}{2}z''-\dfrac{19}{40}, \\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x''-\dfrac{\sqrt{6}}{3}y''+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

习　题

作直角坐标变换，化简下列二次曲面的方程.

1. $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0;$

2. $5x^2+7y^2+6z^2-4yz-4xz-6x-10y-4z+7=0$;

3. $5x^2-16y^2+5z^2+8xy-14xz+8yz+4x+20y+4z-24=0$;

4. $x^2+4y^2+4z^2-4xy+4xz-8yz+6x+6z-5=0$;

5. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+8xz-4yz-12x-12y+6z=0$.

§6.7 应用不变量化简二次曲面的方程

在这一节里，我们将象§5.7那样，应用二次曲面

$$F(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{1}$$

在直角坐标变换下的不变量来化简它的方程。

1. 不变量与半不变量

这里的不变量与半不变量的定义是与§5.7里的情形完全类似的，这就是说，由(1)的左端 $F(x,y,z)$ 的系数组成的一个非常数函数 f，如果经过直角坐标变换(6.6-8)，$F(x,y,z)$ 变为 $F'(x',y',z')$ 时，有

$$f(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{44})=f(a'_{11}, a'_{22}, \cdots, a'_{44}),$$

那么这个函数 f 就叫做二次曲面(1)在直角坐标变换(6.6-8)下的不变量，如果这个函数 f 的值，只是经过转轴变换不变，那么这个函数叫做二次曲面(1)在直角坐标变换下的半不变量。

关于二次曲面(1)的不变量与半不变量，有着下面的定理，这个定理在这里我们将略去它的证明而直接应用。①

定理6.7.1 二次曲面(1)在空间直角坐标变换下，有四个不变量 I_1, I_2, I_3, I_4 与二个半不变量 K_1, K_2，即

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

① 需要了解定理证明的读者可以参考附录§4例4，例5，例6。

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

推论 在直角坐标变换下，二次曲面的特征方程不变，从而特征根也不变.

仿照定理 5.7.2 可以证明下面的定理.

定理 6.7.2 K_1 是第 V 类二次曲面在直角坐标变换下的不变量，而 K_2 是第 III，第 IV 与第 V 类二次曲面在直角坐标变换下的不变量.

2. 二次曲面五种类型的判别

定理 6.6.1 指出，二次曲面(1)通过坐标变换总可以化成下面的五个简化方程中的一个：

(I) $a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+a'_{44}=0,\quad a'_{11}a'_{22}a'_{33}\neq 0;$

(II) $a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{34}z'=0,\quad a'_{11}a'_{22}a'_{34}\neq 0;$

(III) $a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{44}=0,\quad a'_{11}a'_{22}\neq 0;$

(IV) $a'_{11}x'^2+2a'_{24}y'=0,\quad a'_{11}a'_{24}\neq 0;$

(V) $a'_{11}x'^2+a'_{44}=0,\qquad a'_{11}\neq 0.$

也就是说，任何一个二次曲面，它一定属于这五类曲面中的一类。现在我们介绍如何应用二次曲面的不变量与半不变量来判别二次曲面的类型。我们容易知道：

1° 当二次曲面(1)是第 I 类曲面时，那么有

$$I_3=I'_3=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix}=a'_{11}a'_{22}a'_{33}\neq 0.$$

2° 当二次曲面(1)是第 II 类曲面时，那么有

$$I_3=I'_3=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

而

$$I_4=I'_4=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{34} & 0 \end{vmatrix}=-a'_{11}a'_{22}a'^2_{34}\neq 0.$$

3° 当二次曲面(1)是第 III 类曲面时，那么有

$$I_3=I'_3=0,\ I_4=I'_4=0,$$

而

$$I_2=I'_2=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a'_{11}a'_{22}\neq 0.$$

4° 当二次曲面(1)是第 IV 类曲面时，那么有

$$I_3=I'_3=0,\ I_4=I'_4=0,\ I_2=I'_2=0,$$

而

$$K_2=K'_2$$

$$=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{24} \\ 0 & a'_{24} & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 \\ a'_{24} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= -a'_{11}a'^2_{24} \neq 0.$

5° 当二次曲面(1)是第V类曲面时，那么有

$$I_3 = I'_3 = 0,\ I_4 = I'_4 = 0,\ I_2 = I'_2 = 0,$$

$$K_2 = K'_2 = 0.$$

以上这些区别五类二次曲面的必要条件，包括了所有可能而且互相排斥的各种情况，所以它们不仅是必要的而且也是充分的；因此我们有

定理 6.7.3 如果给出了二次曲面(1)，那么用不变量与半不变量来判别曲面(1)为何种类型的充要条件是：

第I类曲面：$I_3 \neq 0$;

第II类曲面：$I_3 = 0,\ I_4 \neq 0$;

第III类曲面：$I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 \neq 0$;

第IV类曲面：$I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 = 0,\ K_2 \neq 0$;

第V类曲面：$I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 = 0,\ K_2 = 0$.

3. 应用不变量化简二次曲面的方程

在这里我们将应用二次曲面(1)的四个不变量 I_1, I_2, I_3, I_4 与两个半不变量 K_1, K_2 来化简二次曲面(1)的方程，它的方法与平面上的二次曲线方程的化简类似.

1° $I_3 \neq 0$. 这时曲面(1)是第I类曲面，它的简化方程为

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + a'_{44} = 0,\ a'_{11}a'_{22}a'_{33} \neq 0,$$

所以

$$I_1 = I'_1 = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33},$$

$$I_2 = I'_2 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & 0 \\ 0 & a'_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a'_{11}a'_{22} + a'_{11}a'_{33} + a'_{22}a'_{33},$$

$$I_3 = I'_3 = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}a'_{33}.$$

因为二次曲面(1)的特征方程是

$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=0,$$

所以根据根与系数的关系立刻知道二次曲面的三个特征根为:

$$\lambda_1=a'_{11},\ \lambda_2=a'_{22},\ \lambda_3=a'_{33}.$$

又因为
$$I_4=I'_4=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} \end{vmatrix}$$

$$=a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44}=I_3a'_{44},$$

所以
$$a'_{44}=\frac{I_4}{I_3},$$

因此第I类曲面的简化方程可以写成

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+\frac{I_4}{I_3}=0, \tag{6.7-1}$$

这里 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 为二次曲面(1)的三个特征根.

2° $I_3=0,\ I_4\neq 0$, 这时曲面(1)表示第II类曲面, 它的简化方程为
$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{34}z'=0,\ a'_{11}a'_{22}a'_{34}\neq 0,$$

所以
$$I_1=I'_1=a'_{11}+a'_{22},$$

$$I_2=I'_2=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a'_{11}a'_{22},$$

$$I_3=0.$$

这时二次曲面(1)的特征方程是

$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda=0,$$

所以
$$\lambda=0\ 或\ \lambda^2-I_1\lambda+I_2=0,$$

从而知二次曲面(1)的三个特征根为

$$\lambda_1=a'_{11},\ \lambda_2=a'_{22},\ \lambda_3=0.$$

此外, 由于

$$I_4=I'_4=\begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-a'_{11}a'_{22}a'^2_{34}=-I_2a'^2_{34}.$$

所以
$$a'_{34}=\pm\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}},$$

因此第 II 类曲面的简化方程可以写成

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2\pm2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}z'=0, \tag{6.7-2}$$

这里 λ_1, λ_2 为二次曲面(1)的两个不为零的特征根.

3° $I_3=I_4=0$, $I_2\neq0$, 这时二次曲面(1)表示第 III 类曲面,它的简化方程为:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{44}=0. \quad a'_{11}a'_{22}\neq0.$$

象情形 2° 一样,这里 a'_{11} 与 a'_{22} 分别是二次曲面(1)的二个非零的特征根 λ_1 与 λ_2,并且

$$I_2=a'_{11}a'_{22},$$

$$K_2=a'_{11}a'_{22}a'_{44}=I_2a'_{44},$$

所以
$$a'_{44}=\frac{K_2}{I_2},$$

因此第 III 类曲面的简化方程可以写成

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{K_2}{I_2}=0, \tag{6.7-3}$$

这里 λ_1, λ_2 是二次曲面(1)的两个不为零的特征根.

4° $I_3=I_4=I_2=0$, $K_2\neq0$, 这时二次曲面(1)表示第 IV 类曲面,它的简化方程为

$$a'_{11}x'^2+2a'_{24}y'=0, \quad a'_{11}a'_{24}\neq0,$$

所以
$$I_1=a'_{11}, \quad I_2=I_3=0,$$

而特征方程为

$$-\lambda^3+I_1\lambda^2=0,$$

所以特征根为

$$\lambda_1=I_1=a'_{11},\ \lambda_2=\lambda_3=0,$$

又因为

$$\begin{aligned}K_2&=K'_2\\&=\begin{vmatrix}a'_{11}&0&0\\0&0&a'_{24}\\0&a'_{24}&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&a'_{24}\\0&0&0\\a'_{24}&0&0\end{vmatrix}\\&=-a'_{11}a'^2_{24}=-I_1a'^2_{24},\end{aligned}$$

所以

$$a'_{24}=\pm\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}},$$

因此第 IV 类曲面的简化方程可以写成

$$I_1x'^2\pm2\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}}\,y'=0. \tag{6.7-4}$$

5° $I_3=I_4=I_2=K_2=0$. 这时二次曲面 (1) 表示第 V 类曲面，它的简化方程为

$$a'_{11}x'^2+a'_{44}=0,\ a'_{11}\neq0.$$

象情形 4° 一样，这时二次曲面有唯一的非零特征根

$$\lambda_1=a'_{11}=I_1;$$

其次又有

$$\begin{aligned}K_1&=\begin{vmatrix}a'_{11}&0\\0&a'_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&a'_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&a'_{44}\end{vmatrix}\\&=a'_{11}a'_{44}=I_1a'_{44}.\end{aligned}$$

于是

$$a'_{44}=\frac{K_1}{I_1},$$

所以第 V 类曲面的简化方程可以写成

$$I_1x'^2+\frac{K_1}{I_1}=0. \tag{6.7-5}$$

通过上面的讨论，我们得到了下面的定理。

定理6.7.4 二次曲面(1)当且仅当

1° $I_3\neq 0$，表示第I类曲面，简化方程为

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+\frac{I_4}{I_3}=0;$$

2° $I_3=0,\ I_4\neq 0$，表示第II类曲面，简化方程为

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2\pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}\,z'=0;$$

3° $I_3=I_4=0,\ I_2\neq 0$，表示第III类曲面，简化方程为

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{K_2}{I_2}=0;$$

4° $I_3=I_4=I_2=0,\ K_2\neq 0$，表示第IV类曲面，简化方程为

$$I_1 x'^2\pm 2\sqrt{-\frac{K_2}{I_1}}\,y'=0;$$

5° $I_3=I_4=I_2=K_2=0$，表示第V类曲面，简化方程为

$$I_1 x'^2+\frac{K_1}{I_1}=0.$$

这里的 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 分别为二次曲面(1)的非零特征根。

从(6.7-1)，(6.7-2)，(6.7-3)，(6.7-4)与(6.7-5)我们还可以得到①

定理6.7.5 如果给出了二次曲面(1)，那么用它的不变量与半不变量来判断已知曲面为何种曲面的条件是：

[1] 椭球面：$I_2>0,\ I_1I_3>0,\ I_4<0$;

[2] 虚椭球面：$I_2>0,\ I_1I_3>0,\ I_4>0$;

[3] 点(或称虚母线二次锥面)：$I_2>0,\ I_1I_3>0,\ I_4=0$;

[4] 单叶双曲面：$I_3\neq 0,\ I_2\leqslant 0$(或 $I_1I_3\leqslant 0$)，$I_4>0$;

---

① 定理6.7.5的证明，读者可参阅Б. Н. 狄隆涅Д. А. 拉伊可夫著，裘光明等译《解析几何》第二卷§169。

[5] 双叶双曲面：$I_3 \neq 0,\ I_2 \leqslant 0$（或 $I_1I_3 \leqslant 0$），$I_4 < 0$；

[6] 二次锥面：$I_3 \neq 0,\ I_2 \leqslant 0$（或 $I_1I_3 \leqslant 0$），$I_4 = 0$；

[7] 椭圆抛物面：$I_3 = 0,\ I_4 < 0$；

[8] 双曲抛物面：$I_3 = 0,\ I_4 > 0$；

[9] 椭圆柱面：$I_3 = I_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1K_2 < 0$；

[10] 虚椭圆柱面：$I_3 = I_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1K_2 > 0$；

[11] 直线：$I_3 = I_4 = K_2 = 0,\ I_2 > 0$；

[12] 双曲柱面：$I_3 = I_4 = 0,\ I_2 < 0,\ K_2 \neq 0$；

[13] 一对相交平面：$I_3 = I_4 = K_2 = 0,\ I_2 < 0$；

[14] 抛物柱面：$I_3 = I_4 = I_2 = 0,\ K_2 \neq 0$；

[15] 一对平行平面：$I_3 = I_4 = I_2 = K_2 = 0,\ K_1 < 0$；

[16] 一对虚平行平面：$I_3 = I_4 = I_2 = K_2 = 0,\ K_1 > 0$；

[17] 一对重合平面：$I_3 = I_4 = I_2 = K_2 = K_1 = 0$。

习　题

利用不变量与半不变量，判断下列二次曲面为何种曲面，并求出它的简化方程与标准方程。

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 1 = 0$；
2. $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 4yz - 3 = 0$；
3. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$；
4. $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$；
5. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$；
6. $4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 2yz - 24x + 32 = 0$；
7. $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0$；
8. $7y^2 - 7z^2 - 8xy + 8xz = 0$；
9. $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz = 0$；
10. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz - 49 = 0$；
11. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x - 6y - 8z + 21 = 0$；
12. $2x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y + z = 0$。

结 束 语

这一章所介绍的内容与方法，与上一章基本上相类似，它告诉我们如何从二维空间（即平面）关于一般二次曲线方程的讨论推广到三维空间的一般二次曲面方程的情形.

关于二次曲面方程的化简，常用的有两种方法，即从主径面出发或从主方向出发，我们这里采用的是从主径面出发来化简二次曲面的方程. 从主方向出发，就是先找到三个两两相互垂直的主方向，以它作为新坐标轴的方向，进行坐标变换（转轴），这样就可以使得曲面的新方程中不再含有交叉项，然后再进行适当的移轴，就能求出曲面的简化方程。由于二次曲面的不同的特征根所确定的主方向一定相互垂直（§ 6.5 习题 2）. 因此，新坐标轴的三个方向是容易找到的，不过在这里必须注意，在确定转轴公式时，新坐标轴的三个方向，应该是单位矢量的方向. 为了计算方便，如果是中心二次曲面，我们可先进行移轴把坐标原点移到曲面的中心，这样先消去方程中的一次项，然后再转轴化去交叉项，这个思想方法是与平面上利用移轴、转轴来化简二次曲线方程的方法是一致的；我们建议读者作为练习，自己去推导. 直角坐标变换，实际上是一种特殊的线性变换，也就是满足正交条件的线性变换，因此，它的进一步就可转入到线性变换的代数理论的研究，由于线性变换与矩阵这两种代数对象关系十分密切，因此，如果读者要作进一步的探讨，也就必须熟悉与掌握有关矩阵等线性代数的知识了.

附录　矩阵与行列式

矩阵与行列式是研究解析几何的重要工具，它的理论属于线性代数．为了解析几何的需要，在这个附录里，我们将对本书中所涉及到的有关矩阵与行列式的内容，作一简单的介绍．关于矩阵与行列式的详细内容与严格的论证，读者可以参考一般的《高等代数》．

§1　矩阵与行列式的定义

定义 1.1　由 mn 个数排成 m 行 n 列的表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

叫做 m 行 n 列的**矩阵**，或称 $m\times n$ **矩阵**．矩阵 A 中的每个数都叫做矩阵的元素；元素的横排叫做行，行的序数从上到下计算；竖排叫做列，列的序数从左到右计算．每个元素 a_{ij} 有两个足标，左足标 i 表示它所在的行数，右足标 j 表示它所在的列数．

定义 1.2　将 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的第 i 行变成第 i 列，第 j 列变成第 j 行后所得到的 $n\times m$ 矩阵

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

叫做 A 的**转置矩阵**．

显然 $(A')'=A$．

定义 1.3 两个矩阵 A 与 B，如果它们的行数相同，列数也相同，而且对应的有同一足标的元素相等，那么这两个矩阵叫做**相等矩阵**，并记做 $A=B$.

定义 1.4 行数等于列数的矩阵叫做**正方矩阵**，正方矩阵的行(或列)数叫做它的阶，n 阶正方矩阵简称为 **n 阶矩阵**.

定义 1.5 与 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对应的一个数，记做

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

叫做**矩阵 A 的行列式**，简称 n 阶行列式. 矩阵 A 的行与列分别叫做行列式 $|A|$ 的行与列，矩阵 A 的元素叫做行列式 $|A|$ 的元素，n 阶矩阵 A 的转置矩阵 A' 的行列式

$$|A'|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

叫做行列式 $|A|$ 的**转置行列式**. n 阶行列式 $|A|$ 的值，当 $n=1$ 时，就等于矩阵 A 的元素 a_{11}，当 $n>1$ 时，按照它的第一行的展开式来计算：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

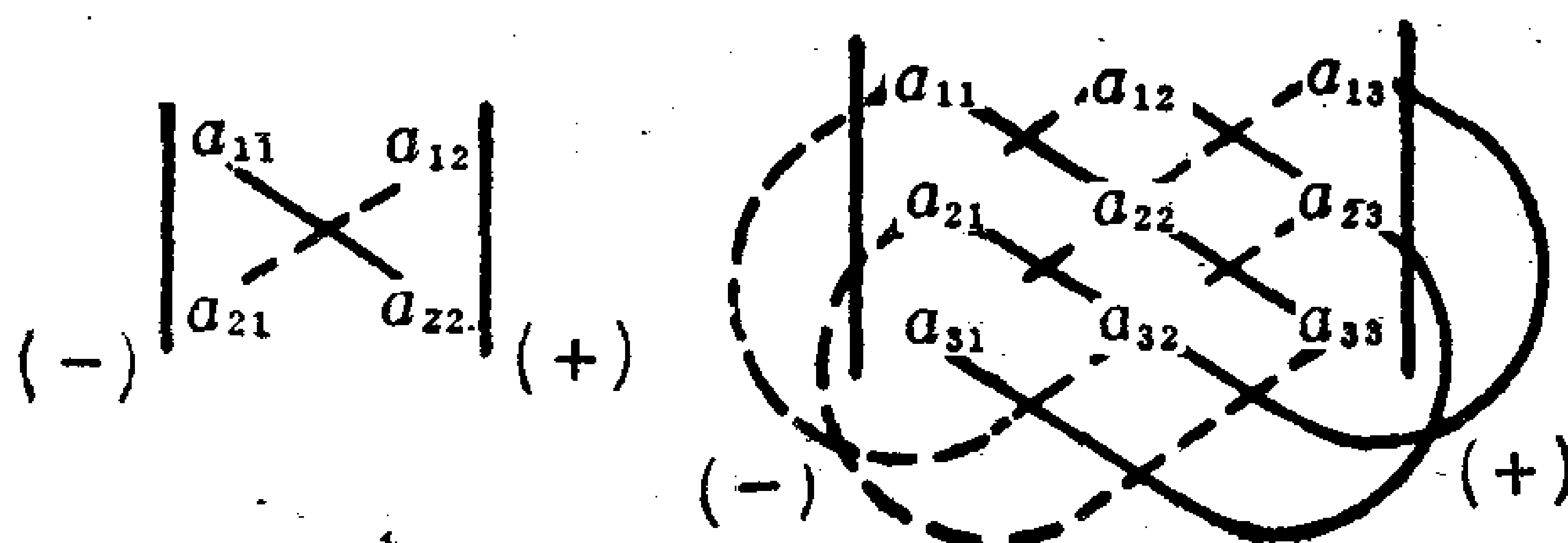
$$-\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix}a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1}\end{vmatrix}. \tag{5}$$

例如，当 $n=2$ 或 3 时，就得到我们熟悉的二阶行列式与三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})\\ &\quad+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &\quad-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

在这里我们看到二阶与三阶行列式的展开式是与我们熟悉的按对角线法则①展开是一致的：



在 n 阶行列式中任取一元素 a_{ij}，把这元素所在的第 i 行与第 j 列划掉，剩下来的一个 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，a_{ij} 在余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 后所得的式子叫做元素 a_{ij} 的代数余子式，用 A_{ij} 表示，这样(5)可改写为：

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, \tag{6}$$

① 注意：对角线法则，对于 $n(n>3)$ 阶行列式是不适用的。

(6)式简称为行列式 $|A|$ 按第一行的代数余子式的展开式，或简称为按第一行展开。

§2 行列式的性质

我们知道三阶行列式有着下面的一些性质：①

定理2.1 把行列式的各行变为相应的列，所得行列式与原行列式相等。

定理2.2 把行列式的两行（或两列）对调，所得行列式与原行列式绝对值相等，符号相反。

推论 如果行列式的某两行（或两列）的对应元素相同，那么行列式等于零。

定理2.3 把行列式的某一行（或一列）的所有元素同乘以某个数 k，等于用数 k 乘原行列式。

推论1 行列式的某一行（或一列）有公因子时，可以把公因子提到行列式外面。

推论2 如果行列式某一行（或一列）的所有元素都是零，那么行列式等于零。

定理2.4 如果行列式某两行（或两列）的对应元素成比例，那么行列式等于零。

定理2.5 如果行列式的某一行（或一列）的元素都是二项式，那么这个行列式等于把这些二项式各取一项作成相应行（或列）而其余行（或列）不变的两个行列式的和。

定理2.6 把行列式某一行（或一列）的所有元素同乘以一个数 k，加到另一行（或另一列）的对应元素上，所得行列式与原行列式相等。

定理2.7 行列式等于它的任意一行（或一列）的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积的和。

定理2.8 行列式某一行（或一列）的各元素与另一行（或一列）对应元素的代数余子式的乘积的和等于零。

以上三阶行列式的这些性质，对于四阶或四阶以上的 n 阶行列式全部成

---

①三阶行列式的性质的证明，见六年制重点中学高中数学课本《代数》第二册，人民教育出版社，1982年12月版。

立，它的证明将在《高等代数》里详细地介绍，我们在这里只运用它的结论。

例1 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 21 & 6 \\ 4 & 12 & 26 & 10 \\ 2 & 9 & 20 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 3 & 9 & 21 & 6 \\ 4 & 12 & 26 & 10 \\ 2 & 9 & 20 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 12 & 26 & 10 \\ 2 & 9 & 20 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \end{vmatrix}$

$$=6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & 13 & 5 \\ 2 & 9 & 20 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & 7 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 9 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=6(27-35)=-48.$$

例2 证明 $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$.

证法一

$$\text{右端}=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

证法二

$$\text{左端}=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

§3 线性方程组

一般的线性方程组是指下面的m个n元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1}$$

我们把方程组(1)的系数所组成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做方程组(1)的**系数矩阵**，把这些系数以及方程右边的常数项所组成的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\, b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn}\, b_m \end{pmatrix}$$

叫做方程组(1)的**增广矩阵**.

显然当$m=n$时，方程组(1)为n个n元一次方程组，它的系数矩阵A为一个n阶正方矩阵.

定义 3.1 在$m\times n$矩阵中任意取k行、k列($k\leqslant m$, $k\leqslant n$)，位于这些交叉处的元素，按原来行列的先后次序构成一个k阶行列式，这个k阶行列式叫做$m\times n$矩阵的**k阶子式**.

定义 3.2 n阶矩阵的不为零的最高阶子式的阶数叫做这个n阶矩阵的**秩**.

因此，当我们说"矩阵的秩是r时"，意思就是说矩阵里所有大于等于$r+1$阶的子式都等于零，但至少有一个r阶子式不为零.

定义 3.3 如果正方矩阵的秩等于它的阶数，那么这样的正方矩阵叫做**满秩矩阵**.

推论 满秩矩阵的行列式不等于零.

现在我们来讨论线性方程组(1)的解，在这里我们只讨论三个变元的线性方程组[①]设

① 一般的线性方程组的解的讨论，可参考《高等代数》.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{2}$$

它的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

设 A 的秩为 r, B 的秩为 R, 那么显然有 $1\leqslant r\leqslant R\leqslant 3$.

将方程组 (2) 的系数行列式 $|A|$ 的第一列元素相应的代数余子式 A_{11}, A_{21}, A_{31} 分别乘方程组(2)的三个方程, 然后相加, 得

$$\begin{aligned}(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21} \\ +a_{32}A_{31})x_2+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})x_3 \\ =b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31},\end{aligned}$$

根据定理 2.7 与定理 2.8 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

同理, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

那么有

$$Dx_1=D_1,\ Dx_2=D_2,\ Dx_3=D_3. \tag{3}$$

现在按方程组 (2) 的系数矩阵 A 的秩与增广矩阵 B 的秩的各种情况讨论如下:

1) 系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 B 的秩，即 $r=R$.

1° $r=R=3$，这时方程组的系数行列式 $D\neq 0$，所以方程组(2)有唯一的解.

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

2° $r=R=2$，这时矩阵 A 及 B 的任何三阶子式都为零，从而$D=0$，因为 $r=2$，所以 A 中至少有一个二阶子式不为零. 不失一般性，设行列式 D 的元素 a_{33} 的代数余子式 $A_{33}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$，然后用 D 的第三列元素的代数余子式 A_{13}，A_{23}，A_{33} 分别与方程组(2)中的三个多项式相乘而求和，得

$$\begin{aligned}&A_{13}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-b_1)+A_{23}(a_{21}x_1+a_{22}x_2\\&\quad+a_{23}x_3-b_2)+A_{33}(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3)\\&\equiv(a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33})x_1+(a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}\\&\quad+a_{32}A_{33})x_2+(a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33})x_3\\&\quad-(b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}),\end{aligned}$$

根据定理 2.8 与定理 2.7 以及题设 $r=R=2$，得

$$\begin{aligned}a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}&=0,\\a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}&=0,\\a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}&=D=0,\\b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}&=D_3=0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&A_{13}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3-b_1)+A_{23}(a_{21}x_1+a_{22}x_2\\&\quad+a_{23}x_3-b_2)+A_{33}(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3-b_3)\equiv 0,\end{aligned}$$

因此，由于 $A_{33}\neq 0$，当 x_1，x_2，x_3 适合于方程组(2)里的第一、第二两式，

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\end{cases}$$

便一定适合第三式

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,$$

因为 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$，把(2)的第一、第二两式改写为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1-a_{13}x_3,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2-a_{23}x_3,\end{cases}\tag{4}$$

从(4)中解出 x_1, x_2(都用 x_3 来表达), 得:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1-a_{13}x_3 & a_{12}\\ b_2-a_{23}x_3 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1-a_{13}x_3\\ a_{21} & b_2-a_{23}x_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\tag{5}$$

或写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1-a_{13}t & a_{12}\\ b_2-a_{23}t & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1-a_{13}t\\ a_{21} & b_2-a_{23}t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},$$

$$x_3=t,\tag{6}$$

其中 t 为参数, 当 t 取任意实数时, x_1, x_2, x_3 总是方程组(2)的解, 所以此时方程组(2)有无穷多组解.

3° $r=R=1$, 这时矩阵 A 与 B 的所有二阶子式都为零, 方程组(2)的三个方程的系数两两成比例, 三个方程实质上是一个方程, 因为方程的系数不能全为零, 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 我们就解得

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3),$$

或写成

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}u-a_{13}v),\ x_2=u,\ x_3=v,$$

其中 u、v 为参数, 当 u, v 分别取任意实数时, x_1, x_2, x_3 总是方程组(2)的解, 所以此时方程组(2)有无数组解.

2) 系数矩阵 A 的秩不等于增广矩阵 B 的秩, 即 $r\neq R$.

1° $r=2$, $R=3$, 这时 $D=0$, 而 D_1, D_2, D_3 中至少有一不为零, 所以由(3)知方程组(2)无解.

2° $r=1$, $R=2$, 这时矩阵 A 的所有二阶子式都为零, 因此方程组(2)中的三方程的系数两两成比例, 但是 $R=2$, 所以在矩阵 B 中, 至少有一个二阶子式不为零, 不妨设

$$\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}\neq\frac{b_1}{b_2},\tag{7}$$

所以方程组(2)的第一、二两方程为矛盾方程, 因而这时方程组(2)无解.

综合上面讨论的结果, 我们得到

定理 3.1 线性方程组(2)有解的充要条件是它的系数矩阵 A 的秩等于增广矩阵 B 的秩.

定理 3.2 线性方程组(2)有唯一解的充要条件是系数矩阵 A 为满秩矩阵,或系数行列式 $D\neq 0$.

定理 3.3 线性方程组(2)有无数解的充要条件为 $r=R=2$, 或 $r=R=1$.

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3=-2, \\ 2x_1+5x_2+3x_3=8, \\ 3x_1+8x_2+7x_3=6. \end{cases}$$

解 方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

它们的秩分别为 $r=2$, $R=2$, 所以方程有无穷多组解.

因为 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\neq 0$, 所以由方程组的第一、二两方程解出 x_1, x_2 得

$$x_1=34+11x_3,\ x_2=-12-5x_3,$$

或写成

$$x_1=34+11t,\ x_2=-12-5t,\ x_3=t,$$

其中的 t 为参数.

在线性方程组(1)的右边的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$, 如果都为零, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \tag{8}$$

那么方程组(8)叫做*齐次线性方程组*. 下面我们只讨论三个变元的齐次线性方程组,

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0, \end{cases} \tag{9}$$

它的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix},$$

容易看出这两个矩阵的秩总是相等的，因而它总有解，显然 $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ 是方程组(9)的一组解.

定义 3.4 线性方程组的解如果全部都是零，那么叫做**零解**，如果不全是零，那么就叫做**非零解**.

因此齐次线性方程组总有零解，而非齐次线性方程组的解都是非零解.

根据定理 3.3，容易知道，下面定理成立：

定理 3.4 齐次线性方程组(9)有非零解的充要条件为其系数行列式 $D=0$.

例 2 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases} \tag{10}$$

解 如果系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

的秩为 2，那么矩阵 A 至少有一个二阶子式不为零，不失一般性，设

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么
$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z,$$

所以得
$$x=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}t, \quad y=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}t, \quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}t,$$

其中 t 是参数. 这时方程组有无数解，它又可以写成

$$x:y:z=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & c_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

如果系数矩阵 A 的秩为 1，那么它的所有二阶子式都为零，方程组(10)中的两方程的系数成比例，因此满足其中一个方程的解，就是方程组的解，这时方程组(10)有无数解.

顺便指出，二元非齐次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \tag{12}$$

就是在(10)中，设 $z=1$ 的结果，因此根据上例，方程组(12)的解是：

$$x:y:1=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，而其他两个行列式不全为零时，上述结果便有矛盾(因$1\neq 0$)，这时非齐次线性方程组(12)为二元矛盾方程组，方程组(12)无解．如果(13)中的三个行列式全为零，那么(12)中的两方程的系数及常数项成比例，两方程仅差一个不为零的常数因子，这时方程组(12)称为**相倚方程组**。

§ 4 矩阵的乘法

定义 4.1 一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 与一个 $n\times p$ 矩阵 $B=(b_{jk})$ 的乘积是一个 $m\times p$ 矩阵 $C=(c_{ik})$，记做 $C=AB$，矩阵 C 的第 i 行第 k 列的元素等于矩阵 A 的第 i 行的 n 个元素与矩阵 B 的第 k 列的对应的 n 个元素的乘积之和，即

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;k=1,\ 2,\ \cdots,\ p.$$

从这个定义可以看出，两个因子矩阵只有当前一个因子矩阵 A 的列数与后一个因子矩阵 B 的行数相同时才能相乘，而且前一个因子矩阵 A 的第 i 行的元素出现且只出现在乘积矩阵 C 的第 i 行中，而后一个因子矩阵 B 的第 k 列元素出现且只出现在乘积矩阵 C 的第 k 列中。

例 1 如果 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

那么
$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

例 2 如果 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

那么
$$AB=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&13\\11&14\end{pmatrix},$$
$$BA=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3&8\\11&4&9\\12&5&13\end{pmatrix}.$$

从例1可以看出，因为矩阵 B 的列数为2，而矩阵 A 的行数为3，所以矩阵 B 与 A 不能相乘，即 BA 没有意义，从例2看出 $AB\neq BA$。一般地说来，**矩阵的乘法不满足交换律**。

例3 直角坐标变换中的转轴公式
$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\end{cases}$$
与
$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3,\\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3,\\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3,\end{cases}$$
利用矩阵乘法分别可以写成
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\tag{4-1}$$
与
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\cos\alpha_2&\cos\alpha_3\\ \cos\beta_1&\cos\beta_2&\cos\beta_3\\ \cos\gamma_1&\cos\gamma_2&\cos\gamma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},\tag{4-2}$$
其中矩阵 $\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\cos\alpha_2&\cos\alpha_3\\ \cos\beta_1&\cos\beta_2&\cos\beta_3\\ \cos\gamma_1&\cos\gamma_2&\cos\gamma_3\end{pmatrix}$

分别叫做(4-1)与(4-2)的变换矩阵。

矩阵乘法有着下面的性质：

定理4.1 矩阵的乘法满足结合律，即
$$(AB)C=A(BC).\tag{4-3}$$

证 设 A, B, C 分别为 $m\times n$, $n\times p$, $p\times q$ 矩阵，记做
$$A=(a_{ij}),\ B=(b_{jk}),\ C=(c_{kl}).$$
这里 $i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,p;\ l=1,2,\cdots,q.$

根据矩阵乘法的定义，有

$$AB=(d_{ik}),\ BC=(e_{jl})$$

这里 $$d_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ p,$$

$$e_{jl}=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ q,$$

其次又有 $$(AB)C=(f_{il}),\ A(BC)=(g_{il}),$$

这里

$$f_{il}=\sum_{k=1}^{p}d_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl},$$

$$g_{il}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_{jl}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{kl},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad l=1,\ 2,\ \cdots,\ q.$$

因为 $$\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{kl},$$

所以 $$f_{il}=g_{il},$$

根据定义 1.3 得 $$(AB)C=A(BC).$$

定理 4.2 矩阵的转置与乘积的关系是

$$(AB)'=B'A' \tag{4-4}$$

证 根据定义 1.2, 矩阵 $(AB)'$ 的第 i 行第 j 列的元素是矩阵 AB 的第 j 行第 i 列的元素, 即等于矩阵 A 的第 j 行与矩阵 B 的第 i 列的对应元素乘积之和. 另一方面矩阵 A 的第 j 行元素就是矩阵 A' 的第 j 列的元素, 而矩阵 B 的第 i 列的元素就是矩阵 B' 的第 i 行的元素, 所以矩阵 $(AB)'$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 B' 的第 i 行与 A' 的第 j 列的对应元素乘积之和, 即正好等于 $B'A'$ 的第 i 行第 j 列的元素, 于是定理得到了证明.

例如 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix},$

那么

$$(AB)'=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}'$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{21}\\ b_{12} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=B'A'.$$

在两矩阵的相乘中，当矩阵是同阶的正方矩阵时，它的乘积矩阵显然也是同阶的正方矩阵，这时因子矩阵的行列式与乘积矩阵的行列式之间有着一个重要的关系式，这就是下面的定理：

定理 4.3 两 n 阶矩阵乘积的行列式等于矩阵的行列式的乘积，即

$$|AB|=|A|\cdot|B|. \tag{4-5}$$

我们以三阶正方矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

为例，说明定理 4.3 的证法，先证明下面的两个引理：

引理 1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ ①

证 逐步按 D 的第一行，第二行，第三行展开（即每次都按新行列式的第一行展开），我们得到

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

① 实际上应用拉普拉斯定理，按 D 的前 3 行展开，立刻得引理的结论，见《高等代数》。

$$
=a_{11}\left\{a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0&0&0\\0&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\-1&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{32}&0&0&0\\0&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\-1&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\0&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}\right\}
$$

$$
-a_{12}\left\{a_{21}\begin{vmatrix}a_{33}&0&0&0\\0&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\-1&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{31}&0&0&0\\-1&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\0&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}\right\}
$$

$$
+a_{13}\left\{a_{21}\begin{vmatrix}a_{32}&0&0&0\\0&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\-1&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\0&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{31}&0&0&0\\-1&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\0&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}\right\}
$$

$$
=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}
$$

$$
-a_{13}a_{22}a_{31})\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}.
$$

引理2

$$
D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&0&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&0&0&0\\-1&0&0&b_{11}&b_{12}&b_{13}\\0&-1&0&b_{21}&b_{22}&b_{23}\\0&0&-1&b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{vmatrix},
$$

式中
$$
c_{ik}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}b_{jk},\ i,\ k=1,\ 2,\ 3.
$$

证 在行列式 D 的第四列加上第一列的 b_{11} 倍，第二列的 b_{21} 倍，第三列的 b_{31} 倍；D 的第五列加上第一列的 b_{12} 倍，第二列的 b_{22} 倍，第三列的 b_{32} 倍；D 的第六列加上第一列的 b_{13} 倍，第二列的 b_{23} 倍，第三列的 b_{33} 倍，就得到

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

根据引理 1 与引理 2, 定理 5.2 也就被证明了, 这是因为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |B|=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$|AB|=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jk}, \quad i,\ k=1,\ 2,\ 3,$$

所以
$$|AB|=|A|\cdot|B|.$$

以上证法可以推广到两个$n(n>3)$阶正方矩阵的情形.

例 4 试证 I_1, I_2, I_3 是二次曲面在转轴下的不变量.

证 因为二次曲面

$$F(x,\ y,\ z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{1}$$

其中

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

仅与(1)的二次项系数有关，而转轴公式(6.6-3)是一个齐次线性变换. 因此在转轴下将使(1)的二次项系数变为新方程的二次项系数，一次项系数变为新方程的一次项系数，而常数项不变，从而我们只要考虑(1)的二次项部分

$$\Phi(x,\ y,\ z)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

就够了，利用矩阵把它写成

$$\Phi(x,\ y,\ z)\equiv(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}. \tag{2}$$

同样地，把转轴公式(6.6-3)也以矩阵的形式表示为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}, \tag{3}$$

取上式两边的转置矩阵得

$$(x\ \ y\ \ z)=(x'\ \ y'\ \ z')\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}, \tag{4}$$

将(3)，(4)两式代入(2)得二次曲面(1)经过转轴(6.6-3)后的新方程的二次项部分为

$$\Phi'(x',\ y',\ z')\equiv(x'y'z')\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}.$$

$$\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$=(x'y'z')\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix},$$

因为矩阵之积的行列式等于它们的行列式之积，从而有

$$I'_3=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

根据(6.6-7)得

$$I'_3=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=I_3.$$

为了证明 I_1 与 I_2 也不变，我们首先指出：经过转轴(6.6-3)多项式 $x^2+y^2+z^2$ 变为 $x'^2+y'^2+z'^2$(§ 6.6 例 2)。

现在考虑一个新的二次曲面方程

$$\psi(x,\ y,\ z)\equiv F(x,\ y,\ z)-\lambda(x^2+y^2+z^2)=0, \tag{5}$$

这里的 λ 是任意固定的常数，经过转轴变换(6.6-3)，显然二次曲面(5)的方程变为

$$\psi'(x',\ y',\ z') \equiv F'(x',\ y',\ z') - \lambda(x'^2+y'^2+z'^2) = 0, \tag{6}$$

因为二次曲面的转轴下的 I_3 不变，而这里

$$I_3(\psi) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

$$I_3(\psi') = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix},$$

所以
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

即
$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3 = -\lambda^3+I'_1\lambda^2-I'_2\lambda+I'_3.$$

因为这里的 λ 是任一常数，所以上式对于 λ 是一个恒等式，因而在转轴(6.6-3)下有 $I_1=I'_1$, $I_2=I'_2$, $I_3=I'_3$.

因为在移轴(6.6-1)下，二次曲面(1)的二次项系数不变(§ 6.6 例 1)，所以仅与二次项系数有关的 I_1, I_2, I_3 也不变，再结合上面的例 4，我们就得：I_1, I_2, I_3 分别是二次曲面在直角坐标变换下的不变量.

例 5 试证 I_4 是二次曲面在直角坐标变换下的不变量.

证 因为 I_4 是二次曲面(1)的矩阵的行列式，利用矩阵把(1)与直角坐标变换(6.6-8)分别改写为

$$F(x,\ y,\ z) \equiv (x\ \ y\ \ z\ \ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{7}$$

与

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & x_0 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & y_0 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

从而有

$$(x\ y\ z\ 1)=(x'\ y'\ z'\ 1)\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & 0\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 0\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & 0\\ x_0 & y_0 & z_0 & 1\end{pmatrix}, \tag{9}$$

将(8)，(9)两式代入(7)，即得二次曲面(1)在直角坐标变换(6.6-8)下的新方程为

$$F'(x', y', z')\equiv(x'\ y'\ z'\ 1)\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & 0\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 0\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & 0\\ x_0 & y_0 & z_0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & x_0\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & y_0\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 & z_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ 1\end{pmatrix}=0,$$

所以

$$I_4'=\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 & 0\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 0\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 & 0\\ x_0 & y_0 & z_0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & x_0\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & y_0\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 & z_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}=I_4,$$

于是行列式 I_4 的确是二次曲面的不变量.

例 6 证明 K_1 与 K_2 在转轴(6.6-3)下不变，而在移轴(6.6-1)下一般要改变，从而 K_1 与 K_2 是二次曲面的半不变量．其中

$$K_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{14}\\ a_{14} & a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{24}\\ a_{24} & a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33} & a_{34}\\ a_{34} & a_{44}\end{vmatrix},$$

$$K_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{24}\\a_{14}&a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{13}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

证 例5已证明了二次曲面在直角坐标变换下 I_4 是不变的，因此由于二次曲面(5)通过转轴(6.6-3)变为(6)，从而我们有

$$I_4(\psi')=I_4(\psi),$$

即
$$\begin{vmatrix}a'_{11}-\lambda&a'_{12}&a'_{13}&a'_{14}\\a'_{12}&a'_{22}-\lambda&a'_{23}&a'_{24}\\a'_{13}&a'_{23}&a'_{33}-\lambda&a'_{34}\\a'_{14}&a'_{24}&a'_{34}&a'_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}-\lambda&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}-\lambda&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

因为这里的 λ 是任意一常数，所以上式关于 λ 是一恒等式，因此在等式两边关于 λ 的两个三次多项式的对应系数是相等的，所以 λ^2 项与 λ 项的系数分别相等，计算这些系数，我们得

$$\begin{vmatrix}a'_{11}&a'_{14}\\a'_{14}&a'_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'_{22}&a'_{24}\\a'_{24}&a'_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'_{33}&a'_{34}\\a'_{34}&a'_{44}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{14}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}$$

与

$$\begin{vmatrix}a'_{11}&a'_{12}&a'_{14}\\a'_{12}&a'_{22}&a'_{24}\\a'_{14}&a'_{24}&a'_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'_{11}&a'_{13}&a'_{14}\\a'_{13}&a'_{33}&a'_{34}\\a'_{14}&a'_{34}&a'_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a'_{22}&a'_{23}&a'_{24}\\a'_{23}&a'_{33}&a'_{34}\\a'_{24}&a'_{34}&a'_{44}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{24}\\a_{14}&a_{24}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{13}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix},$$

即
$$K'_1=K_1 \text{ 与 } K'_2=K_2.$$

但是在移轴(6.6-1)下 K_1 与 K_2 一般是要改变的，例如

$$F(x,\ y,\ z)\equiv 2xy+2xz+2yz=0,$$

它的 $K_1=0$, $K_2=0$, 而通过移轴(6.6-1), $F(x,\ y,\ z)$ 变为

$$F'(x',\ y',\ z')\equiv 2x'y'+2x'z'+2y'z'+2(y_0+z_0)x'+2(x_0+z_0)y'$$
$$+2(x_0+y_0)z'+2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0).$$

而这时

$$K'_1=\begin{vmatrix}0&y_0+z_0\\y_0+z_0&2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & x_0+z_0 \\ x_0+z_0 & 2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & x_0+y_0 \\ x_0+y_0 & 2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0) \end{vmatrix}$$

$$=-[(y_0+z_0)^2+(x_0+z_0)^2+(x_0+y_0)^2]\neq 0.$$

$$K_2'=\begin{vmatrix} 0 & 1 & y_0+z_0 \\ 1 & 0 & x_0+z_0 \\ y_0+z_0 & x_0+z_0 & 2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & 1 & y_0+z_0 \\ 1 & 0 & x_0+y_0 \\ y_0+z_0 & x_0+y_0 & 2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0+z_0 \\ 1 & 0 & x_0+y_0 \\ x_0+z_0 & x_0+y_0 & 2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0) \end{vmatrix}$$

$$=2z_0^2+2y_0^2+2x_0^2\neq 0,$$

所以

$$K_1'\neq K_1,\ K_2'\neq K_2.$$

因此 K_1 与 K_2 是二次曲面的半不变量。

习题答案、提示与解答

第 一 章

§ 1.1

1. (1) 单位球面; (2) 单位圆; (3) 直线; (4) 两个相距为 2 的点. **2.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{DE}$. **4.** (2), (3), (5); (1), (4). **5.** 共线矢量为: $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{C'A'}$; 共面矢量为: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ 与 $\overrightarrow{C'A'}$; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AA'}$ 与 $\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{BB'}$ 与 $\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{CC'}$ 与 $\overrightarrow{AA'}$ 以及 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B'C'}$ 与 $\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{C'A'}$ 与 $\overrightarrow{BB'}$.

§ 1.3

1. (1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; (2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向, (3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$, (4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 反向, (5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 同向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$. **2.** (1) $2(x\boldsymbol{b}-y\boldsymbol{a})$, (2) $4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$, $-2\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$, $-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3$, (3) $\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{17}(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{y}=\dfrac{1}{17}(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$. **3.** $\overrightarrow{EF}=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$. **11.** 提示: 取一对角线的中点, 证它也是另一对角线的中点. **12.** 因为 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3}$, $\cdots$, $\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n}$, $\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1}$, 所以 $2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\lambda(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$, 从而 $(\lambda-2)(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\boldsymbol{0}$, 显然 $\lambda\neq2$, 因此 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{0}$. **13.** 提示: 应用上题结论.

§ 1.4

1. (1) $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{CD}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$; (2) $\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}(2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}(\boldsymbol{q}-2\boldsymbol{p})$. **2.** $\boldsymbol{a}=(\gamma+\lambda)\boldsymbol{e}_1+(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_2+(\mu+\gamma)\boldsymbol{e}_3$. **4.** (1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{e}_2$; (2) $\overrightarrow{AT}=\dfrac{|\boldsymbol{e}_2|\boldsymbol{e}_1+|\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1|+|\boldsymbol{e}_2|}$. **5.** $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. **7.** 线性无关. **8.** $\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{10}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{5}\boldsymbol{c}$. **10.** 提示: $P_i(i=1, 2, 3, 4)$ 四点共面的充要

条件是三矢量$\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_4}$线性相关。

§ 1.5

1. $M\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $N\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{MN}\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right\}$与$M\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{MN}\left\{\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right\}$. **2.** $\overrightarrow{BP}=\left\{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$, $\overrightarrow{EP}=\left\{\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right\}$, $B(1, 0, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $P\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$及$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. **3.** (1) $(2, -3, 1)$, $(-2, -3, -1)$, $(2, 3, -1)$与$(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$; (2) $(2, 3, 1)$, $(-2, -3, 1)$, $(-2, 3, -1)$与$(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$; (3) $(-2, 3, 1)$, $(-a, -b, -c)$. **4.** $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{m}$; $x=x'+a$, $y=y'+b$, $z=z'+c$. **5.** (1) $\{-5, 4\}$; (2) $\{-4, 3, 3\}$. **6.** (1) $D(1, 3)$, $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$; (2) $D(-2, 2, 1)$, $M(0, 1, 1)$. **7.** (1) 共线, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$; (2) 不共线. **8.** (1) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\nparallel\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$共面但$\boldsymbol{c}$不能表示成$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$的线性组合; (2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$共面, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. **9.** $A(-1, 2, 4)$, $B(8, -4, -2)$. **10.** $\left(\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4), \frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4), \frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4)\right)$.

§ 1.6

1. $-5\sqrt{3}\boldsymbol{e}$, $-5\sqrt{3}$与$5\sqrt{3}\boldsymbol{e}'$, $5\sqrt{3}$. **2.** 提示: 应用定理1.6.与定理1.6.3.

§ 1.7

1. (2) $\because \boldsymbol{a}\boldsymbol{m}_i=\boldsymbol{b}\boldsymbol{m}_i$, $\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{m}_i=0$, $(i=1, 2)$, 从而得$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{m}_1+\mu\boldsymbol{m}_2)=0$, ($\lambda$, μ不全为0), $\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\lambda\boldsymbol{m}_1+\mu\boldsymbol{m}_2)$, 而$\boldsymbol{m}_1\nparallel\boldsymbol{m}_2$, 所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$垂直于平面上的任意方向, 因此$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. **2.** (1) 5; (2) -3; (3) $-\frac{7}{2}$; (4) 11. **3.** (1) $-\frac{3}{2}$; (2) $\sqrt{14}$, $\arccos\frac{\sqrt{14}}{14}$, $\arccos\frac{2\sqrt{14}}{14}$, $\arccos\frac{3\sqrt{14}}{14}$; (3) $\frac{\pi}{3}$; (4) 40. **5.** (1) $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, $\arccos\frac{1}{6}$, $\pi-\arccos\frac{1}{6}$; (2) $\sqrt{10}$, $\sqrt{14}$, $\frac{\pi}{2}$. **6.** (1) 5, $\sqrt{89}$, 10; (2) $\arccos\frac{9}{25}$, $\arccos\frac{7\sqrt{89}}{445}$, $\arccos\frac{41\sqrt{89}}{445}$; (3) $\frac{1}{2}\sqrt{161}$, $4\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{353}$; (4) $\left\{\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, -4\right\}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{17}}$, $\cos\gamma=$

$-\frac{3}{\sqrt{17}}$, $\left\{\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right\}$.

§ **1.8**

1. (1) 4; (2) 64; (3) 144. **3**. 提示：应用两矢量矢性积的定义. **4**. (1) $\left\{\frac{7}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{5\sqrt{3}}\right\}$或$\left\{-\frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}}\right\}$; (2) $\left\{\frac{35}{6}, \frac{25}{6}, \frac{5}{6}\right\}$. **5**. (1) $12\sqrt{2}$; (2) $\frac{8\sqrt{33}}{11}$, 8, $2\sqrt{3}$. **6**. (1) $3\sqrt{6}$; (2) $\frac{3\sqrt{21}}{7}$, $\frac{3\sqrt{462}}{77}$. **7**. (2) 提示：$\Delta^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$, 再利用(1.8-7).

§ **1.9**

2. 提示：证$\boldsymbol{R}\perp\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{R}\perp\overrightarrow{AC}$. **3**. 提示：展开$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. **4**. (1) 共面; (2) 不共面, $V=2$. **5**. (1) 共面; (2) 不共面, $V=19\frac{1}{3}$, $h=4\frac{1}{7}$.

§ **1.10**

1. $\{3, 4, -5\}$, $\{-1, 2, -1\}$. **2**. 提示：把等式展开. **3**. 提示：利用公式(1.10-1). **5**. 提示：$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$. **6**. $(\boldsymbol{bcd})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{cda})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{dab})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{d}=[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\boldsymbol{a}-[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{0}$.

第 二 章

§ **2.1**

1. $(x-6)^2+y^2=36$, 中心为(6, 0)半径为6的圆. **2**. $x^2+y^2=a^2$, $(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$. **3**. 设两定点间的距离为$2a$, 并取两定点的连线为$x$轴, 两定点所连线段的中垂线为$y$轴, 那么卡西尼卵形线的方程为$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=m^4-a^4$. **4**. 提示：设等轴双曲线的参数方程为：$x=ct$, $y=\frac{c}{t}$. **5**. 提示：应用四次方程的根与系数的关系. **6**. $\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$. **7**. (1) $y^2=4ax$; (2) $(x-5)^2+\frac{(y+1)^2}{4}=1$; (3) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$, 其中$R=4r$. **8**. (1) $x=t^2$, $y=t^3$; (2) $x=a\cos^4\theta$, $y=a\sin^4\theta$; (3)

$x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$, $(t\neq -1)$, 提示: 设 $y=tx$. **9.** $\boldsymbol{r}=\left[(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta\right]\boldsymbol{i}+\left[(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta\right]\boldsymbol{j}$, $(-\infty<\theta<+\infty)$, 提示: 取定圆的中心为原点, 动圆上的点的初始位置为定圆与 x 轴的正半轴的交点, 并取动圆中心的径矢与 x 轴所成的有向角 θ 为参数. **10.** $x=a\,\mathrm{ctg}\,\theta$, $y=a\sin^2\theta$, $(0<\theta<\pi)$, 或 $x^2y+a^2y-a^3=0$.

§ 2.2

1. $(x-4)^2+y^2=0$. **2.** (1) $(m^2-1)(x^2+y^2+z^2)+2a(m^2+1)x+a^2\cdot(m^2-1)=0$, 提示: 取两定点的连线为 x 轴, 两定点连线段的中点为原点, 并设两定点间的距离为 $2a$, 常数为 $m>0$; (2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, 提示: 坐标选取同 (1), 并设两定点间的距离为 $2c$, 常数为 $2a$, 且 $b^2=a^2-c^2$; (3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$, 式中 $b^2=c^2-a^2$; (4) $x^2+y^2+(1-m^2)z^2-2cz+c^2=0$, 提示: 取定点为 $(0, 0, c)$, 定平面为 xOy 面, 常数为 m. **3.** (1) $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=36$; (2) $x^2+y^2+z^2=49$; (3) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; (4) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$. **4.** (1) $(3, -4, -1)$, 4; (2) $(-1, 2, 0)$, 3; (3) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 1\right)$, 2. **5.** $x=a+r\sin\theta\cos\varphi$, $y=b+r\sin\theta\sin\varphi$, $z=c+r\cos\theta$, $(0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi)$.

§ 2.4

1. 当 $0<C<2$ 时, 轨迹为两条平行于 z 轴的直线; 当 $C=0$ 时, 轨迹为 z 轴; 当 $C=2$ 时, 轨迹为通过点 $(2, 0, 0)$ 且平行于 z 轴的直线; 当 $C<0$ 或 $C>2$ 时无图形. **2.** 曲面分别与 xOy, yOz, zOx 坐标面的交线为(1)圆, 椭圆, 椭圆; (2) 椭圆, 双曲线, 双曲线; (3) 双曲线, 无图形, 双曲线; (4) 点, 抛物线, 抛物线; (5) 两相交直线, 抛物线, 抛物线; (6) 点, 两相交直线, 两相交直线. **3.** (1) $x^2+y^2-x-1=0$, $y^2+z^2-3z+1=0$, $x-z+1=0$; (2) $x^2-2y^2-2x+2y+1=0$, $y-z+1=0$, $x^2-2z^2-2x+6z-3=0$; (3) $7x+2y-23=0$, $2y+7z-2=0$, $x-z-3=0$; (4) $x^2+2y^2-2y=0$, $y+z+1=0$, $x^2+2z^2-2z=0$. **4.** (1) $(2, 0, 2)$, $(-2, 0, -2)$; (2) $(-1, 0, 3)$, $(-1, 0, -3)$. **5.** 曲线在曲面上的充要条件为 $F(f(t), \varphi(t), \psi(t))=0$. **6.** (1) $x=3z+1$, $(z+2)^2=4y$; (2) $5x-3y=0$, $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. **7.** $x=-t^4$, $y=2t$, $z=t^2$. **8.** $x=vt\sin\alpha\cdot\cos\omega t$, $y=vt\sin\alpha\cdot\sin\omega t$, $z=vt\cos\alpha$, $(0\leqslant t<$

$+\infty$). 提示: 取圆锥顶点为原点, 轴线为 z 轴, 并设圆锥角为 2α, 旋转角速度为 ω, 直线速度为 v, 动点的初始位置在原点. **9**. $x=u\cos\omega t$, $y=v\sin\omega t$, $z=vt$ $(-\infty<u<+\infty,\ -\infty<t<+\infty)$. 提示: 取 l_2 为 z 轴, 并设 l_1 在运动中的某一时刻与 x 轴重合, 令角速度为 ω, 直线速度为 v, 时间 t 取作参数.

第 三 章

§3.1

1. (1) $x=3-2u-v$, $y=1-2u$, $z=-1+u+2v$; $4x-3y+2z-7=0$; (2) $x=1+2u$, $y=-5+7u$, $z=1-3u+v$; $7x-2y-17=0$; (3) $x=5-4u-v$, $y=1+5u$, $z=3-u+2v$; $10x+9y+5z-74=0$ 与 $x=5-4u+v$, $y=1+5u+v$, $z=3-u+v$; $2x+y-3z-2=0$. **2**. $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{4}=1$; $x=-4+2u+v$, $y=-u$, $z=v$. **3**. 不妨设 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的 $A\neq0$, 把这平面方程化为参数式; $x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}u-\frac{C}{A}v$, $y=u$, $z=v$, 所以平面的两方位矢量是 $\left\{-\frac{B}{A},\ 1,\ 0\right\}$ 与 $\left\{-\frac{C}{A},\ 0,\ 1\right\}$, 从而知 $\boldsymbol{v}=\{X,\ Y,\ Z\}$ 与已知平面共面的充要条件为 $\boldsymbol{v}$ 与 $\left\{-\frac{B}{A},\ 1,\ 0\right\}$, $\left\{-\frac{C}{A},\ 0,\ 1\right\}$ 共面, 或

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ 即 } AX+BY+CZ=0.$$

如果在直角坐标系下, 那么由于平面的法矢量为 $\boldsymbol{n}=\{A,\ B,\ C\}$, 所以 $\boldsymbol{v}$ 平行于平面的充要条件为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$, 即 $AX+BY+CZ=0$. **4**. $z=-18$, 提示: 应用上题结论. **5**. (1) $z-1=0$, $z-1=0$, $x+y-1=0$; (2) $12x+8y+19z+24=0$; (3) $2y+z=0$, $2x+5z=0$, $x-5y=0$; (4) $x-y-3z+2=0$; (5) $2x+9y-6z-121=0$; (6) $13x-y-7z-37=0$. **6**. (1) $\frac{1}{\sqrt{30}}x-\frac{2}{\sqrt{30}}y+\frac{5}{\sqrt{30}}z-\frac{3}{\sqrt{30}}=0$; (2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; (3) $-x-2=0$; (4) $\frac{4}{9}x-\frac{4}{9}y+\frac{7}{9}z=0$. **7**. (1) $p=5$, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$; (2) $p=7$, $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$. **8**. $3x-2y+6z=0$, $3x-2y$

$+6z-28=0$. **9**. $6x-2y-3z\pm 42=0$. **10**. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$.

§ **3.2**

1. (1) $\delta=-\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{3}$; (2) $\delta=d=0$. **2**. (1) $(0, 7, 0)$, $(0, -5, 0)$; (2) $(0, 0, -2)$, $\left(0, 0, -6\frac{4}{13}\right)$; (3) $(2, 0, 0)$, $\left(\frac{11}{43}, 0, 0\right)$. **3**. $h=3$. **4**. $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$. **5**. $35y+12z=0$ 或 $3y-4z=0$. **6**. (1) $13x-51y+10z=0$ 与 $43x+9y-10z-70=0$; (2) $9x-y+2z-4=0$. **7**. 提示: 点 M 的坐标为: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$. **8**. 点 O, B, E 在平面的一侧, 点 A, D 在另一侧, 而 C, F 在平面上. **9**. (1) 相邻二面角内; (2) 对顶二面角内. 提示: 考察点 M 与 N 分别位于两平面划分的正半空间里, 还是在负半空间里. **10**. $23x-y-4z-24=0$.

§ **3.3**

1. (1) 平行; (2) 相交; (3) 平行. **2**. (1) $l=\frac{7}{9}$, $m=\frac{13}{9}$, $n=\frac{37}{9}$; (2) $l=-4$, $m=3$; (3) $l=-\frac{1}{7}$. **3**. (1) 1; (2) 3. **4**. (1) $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$; (2) $\arccos\frac{8}{21}$ 或 $\pi-\arccos\frac{8}{21}$. **5**. (1) $x\pm\sqrt{26}\,y+3z-3=0$; (2) $x\pm 3y=0$. **6**. $Ax+By+Cz+\frac{1}{3}(D_1+D_2+D_3)=0$.

§ **3.4**

1. (1) $\frac{x+3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0}$; (2) $\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$; (3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{-1}$; (4) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{2}$; (5) $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$. **2**. (1) $(9, 12, 20)$ 与 $\left(-\frac{117}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{130}{7}\right)$; (2) $(0, 2, 7)$. **3**. (1) $x+5y+z-1=0$; (2) $11x+2y+z-15=0$; (3) $x-8y-13z+9=0$; (4) $11x-4y+6=0$, $9x-z+7=0$, $36y-11z+23=0$.

4. (1) $\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}, \\ z=\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}, \end{cases}$ $\frac{x}{3}=\frac{y+\frac{5}{3}}{-1}=\frac{z+\frac{2}{3}}{5}$, $\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{35}}$, $\cos\beta=$

$\mp\frac{1}{\sqrt{35}}$, $\cos\gamma=\pm\frac{5}{\sqrt{35}}$; (2) $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x, \\ z=-x+6, \end{cases}$ $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z-6}{-4}$, $\cos\alpha=\pm\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta=\pm\frac{3}{\sqrt{41}}$, $\cos\gamma=\mp\frac{4}{\sqrt{41}}$; (3) $\begin{cases} x=2, \\ y=z-2, \end{cases}$ $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$, $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** 提示: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

§ **3.5**

1. (1) 平行; (2) 垂直; (3) 直线在平面上; (4) 相交. **2.** $(1, 0, -1)$, $\frac{\pi}{6}$. **3.** (1) $l=-1$; (2) $l=4$, $m=-8$. **4.** 直线在平面上. **5.** (1) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$, $x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$; (2) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$.

§ **3.6**

1. (1) A_1与A_2不全为零, $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}=0$; (2) $A_1=A_2=0$, D_1与D_2不全为零; (3) $A_1=A_2=D_1=D_2=0$. **2.** (1) $\lambda=5$; (2) $\lambda=\frac{5}{4}$. **3.** (1) 平行; $5x-22y+19z+9=0$; (2) 异面; $d=3\sqrt{30}$; (3) 相交, $3x-y+z+3=0$. **4.** $\begin{cases} x-2y+5z-8=0, \\ x+y-z-1=0. \end{cases}$ **5.** (1) $\cos\theta=\pm\frac{72}{77}$; (2) $\cos\theta=\pm\frac{98}{195}$. **6.** 提示: 证明直线$OM$与$OM'$间的角等于0. **7.** $\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{50}=\frac{z+2}{31}$. **8.** $\frac{x-4}{15}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-8}$.

9. (1) $\begin{cases} x-8z+303=0, \\ 8x-9y-z-31=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-3y+5z+21=0, \\ x-y-z-17=0. \end{cases}$

10. $\frac{x-2}{120}=\frac{y-1}{131}=\frac{z}{311}$.

§ **3.7**

1. $D_1=D_2=0$. **2.** $d=15$.

§ **3.8**

1. (1) $9x+3y+5z=0$; (2) $21x+14z-3=0$; (3) $7x+14y+5=0$. **2.** $2x+2y-2z-1=0$ 或 $9x+7y-10z=0$. **3.** $x-z+4=0$ 或 $x+20y+7z-12=0$. **4.** $3x+24y+16z+19=0$ 或 $6x-3y-2z+4=0$. **5.** (1) $x-2y+$

$3z-14=0$; (2) $x-2y+3z-6=0$; (3) $x-2y+3z\pm\sqrt{14}=0$. **6.** $x+3y+2z\pm6=0$. **7.** 提示：仿定理 3.8.1 的证明. **8.** $A_1:A_2=C_1:C_2=D_1:D_2$. 提示：xOz 坐标面属于平面束 $l(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+m(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

第 四 章

§ 4.1

1. (1) $2y^2+2z^2-2yz+12y-10z-3=0$; (2) $x^2+y^2+3z^2-2xy-8x+8y-8z-26=0$. **2.** $4x^2+25y^2+z^2+4xz-20x-10z=0$. **3.** $5x^2+5y^2+5z^2-5xy-5xz-5yz+2x+11y-13z=0$. **4.** 设 $M(x, y, z)$ 为柱面上的任意点，过 M 的母线交准线于点 M_0，令 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，$\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$，因为 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{r}_0+v\boldsymbol{s}$，而 M_0 在准线上，所以 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(u)$，因此柱面的矢量式参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u)+v\boldsymbol{s}$. 以 $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$，$\boldsymbol{r}(u)=\{x(u), y(u), z(u)\}$，$\boldsymbol{s}=\{X, Y, Z\}$ 代入，得坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x=x(u)+Xv, \\ y=y(u)+Yv, \\ z=z(u)+Zv. \end{cases} \quad (u,\ v\ 为参数).$$

§ 4.2

1. $x^2+y^2-z^2=0$. **2.** $3(x-3)^2-5(y+1)^2+7(z+2)^2-6(x-3)(y+1)+10(x-3)(z+2)-2(y+1)(z+2)=0$. **3.** $xy+yz+zx=0$，或 $xy+yz-zx=0$，或 $xy-yz+zx=0$，或 $xy-yz-zx=0$. **4.** $51(x-1)^2+51(y-2)^2+12(z-4)^2+104(x-1)(y-2)+52(x-1)(z-4)+52(y-2)(z-4)=0$. **5.** 参考 § 4.1 第 4 题解法.

§ 4.3

1. (1) $5x^2+5y^2+2z^2+2xy-4xz+4yz+4x-4y-4z-6=0$; (2) $5x^2+5y^2+23z^2-12xy+24xz-24yz-24x+24y-46z+23=0$; (3) $9x^2+9y^2-10z^2-6z-9=0$; (4) $x^2+y^2=1(0\leqslant z\leqslant1)$. **2.** $x^2+y^2-\alpha^2z^2=\beta^2$，当 $\alpha\neq0$，$\beta\neq0$ 时为旋转单叶双曲面；当 $\alpha\neq0$，$\beta=0$ 时为圆锥面；当 $\alpha=0$，$\beta\neq0$ 时为圆柱面；当 $\alpha=\beta=0$ 时曲面退化为直线(z 轴).
3. $x=\sqrt{[x(u)]^2+[y(u)]^2}\cdot\cos\alpha$，$y=\sqrt{[x(u)]^2+[y(u)]^2}\cdot\sin\alpha$，$z=z(u)$. 提示：过母线上的点 (x_0, y_0, z_0) 的纬圆的参数方程是：$x=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cos\alpha$，$y=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sin\alpha$，$z=z_0$.

§ 4.4

2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{3}=1$. **3**. 提示：设过原点具有方向余弦 λ, μ, ν 的直线交椭圆面于(x, y, z)，那么有 $x=r\lambda,\ y=r\mu,\ z=r\nu$. **4**. 提示：应用上题的结论. **5**. 设直线的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$，$P$ 点的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，那么直线的方程为

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta,\ z=z_0+t\cos\gamma,$$

令 $x=0$，得直线与 yOz 面的交点 A 的坐标，因此有 $x_0+t\cos\alpha=0$，根据 t 的几何意义 $|t|=a$，得

$$x_0\pm a\cos\alpha=0,\text{ 即 } x_0=\pm a\cos\alpha,$$

同理得
$$y_0=\pm b\cos\beta,\ z_0=\pm c\cos\gamma,$$

从而有
$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

所以 P 点的轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

6. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}y\pm\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}z=0$. 提示：这里的交线圆总可以把它看成在以原点为中心，a 为半径的球面上.

§ 4.5

2. 当 $\lambda<C$ 时，曲面为椭球面；当 $C<\lambda<B$ 时，曲面为单叶双曲面；当 $B<\lambda<A$ 时，曲面为双叶双曲面；当 $\lambda>A$ 时，无图形. **3**. $x=\pm2$（或 $y=\pm3$）. **4**. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{12}=1$. **5**. $\frac{(x-12)^2}{260}+\frac{y^2}{13}=1$. **6**. 取两异面直线 l, m 的公垂线为 z 轴，公垂线的中点 C 为原点，x 轴与两异面直线成等角，并设两异面直线间的距离为 $2a$，交角为 $2\alpha\neq90°$，那么有：

$$l:\begin{cases}x=t_1\cos\alpha,\\ y=t_1\sin\alpha,\\ z=a;\end{cases}\quad m:\begin{cases}x=t_2\cos\alpha,\\ y=-t_2\sin\alpha,\\ z=-a;\end{cases}$$

$A(t_1\cos\alpha,\ t_1\sin\alpha,\ a)$，$B(t_2\cos\alpha,\ -t_2\sin\alpha,\ -a)$. 而 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$，所以有

$$t_1t_2\cos^2\alpha-t_1t_2\sin^2\alpha-a^2=0,$$

又因为 $2\alpha\neq90°$，所以 $\cos2\alpha\neq0$，从而得

$$t_1t_2=\frac{a^2}{\cos2\alpha},\tag{1}$$

而直线 AB 的方程为

$$\begin{cases} x=t_1\cos\alpha+(t_2-t_1)\cos\alpha\cdot u, \\ y=t_1\sin\alpha-(t_2+t_1)\sin\alpha\cdot u, \\ z=a-2au, \end{cases} \tag{2}$$

由(1)，(2)两式消去参数 u, t_1, t_2 得 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}}-\frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

它是一个单叶双曲面.

§ 4.6

1. $18x^2+3y^2=5z$. **2**. (1) 设定点到定平面的距离为 h, 常数 $c>0$, 那么当 $h=0$ 时，$c>1$ 为圆锥面 $c=1$ 为 z 轴，$c<1$ 为一点，当 $h\neq 0$ 时，$c<1$ 为旋转椭球面，$c>1$ 时为旋转双叶双曲面，当 $c=1$ 时为旋转抛物面. (2) 参阅 § 4.5 第 6 题.

§ 4.7

1. (1) $\begin{cases} w(x+y)=uz \\ u(x-y)=wz \end{cases}$ (u, w 不全为 0); (2) $\begin{cases} x=u, \\ z=auy \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y=v, \\ z=avx. \end{cases}$

2. (1) $z^2=x+y$; (2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$.

3. $\begin{cases} x+2y-4=0, \\ x-2y-4z=0, \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-2y-8=0, \\ x+2y-2z=0. \end{cases}$

4. 提示：求出直母线在 xOy 面上的射影直线方程与在 xOy 面上的腰椭圆方程，然后在 xOy 面上进行证明. **5**. $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{8}=2z$. **6**. $x^2+y^2-z^2=1$.

7. 单叶双曲面的两族直母线为

$$u\text{ 族:}\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{b}\right); \end{cases}\quad v\text{ 族:}\begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

所以过 u 族的任一直母线的平面可以写成

$$t\left[w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-u\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+v\left[u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-w\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0,$$

即 $$w\left[t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-v\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+u\left[v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-t\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0,$$

显然它通过 v 族的一条直母线. 同理通过 v 族的任一直母线的每一平面经过属于 u 族的一条直母线. 但是这个命题对双曲抛物面却不一定成立，例如

平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda$（常数），它通过双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的 u 族直母线中的直线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z,\end{cases}$$

而不通过 v 族直母线

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2v,\\ v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z\end{cases}$$

中的任何直母线，这是因为 v 族直母线的方向矢量为 $\boldsymbol{v}=\frac{1}{ab}\{a,\ b,\ 2v\}$，而平面的法矢量为 $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ 0\right\}=\frac{1}{ab}\{b,\ a,\ 0\}$，所以 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}=\frac{1}{a^2b^2}(ab+ab)=\frac{2}{ab}\neq 0$. **8**. 两相交直母线必异族，单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的两直母线为

u 族：$\begin{cases}w\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=w\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{cases}$ v 族：$\begin{cases}t\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=t\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{cases}$

所以两相交直母线的交点的坐标为

$$x=\frac{a(uv+wt)}{vw+ut},\quad y=\frac{b(vw-ut)}{vw+ut},\quad z=\frac{c(uv-wt)}{vw+ut}.\qquad(*)$$

两族直母线的方向矢量分别为 $\boldsymbol{s}_u=\{a(u^2-w^2),\ 2buw,\ c(u^2+w^2)\}$，$\boldsymbol{s}_v=\{a(v^2-t^2),\ -2bvt,\ c(v^2+t^2)\}$ 因为 $\boldsymbol{s}_u\perp\boldsymbol{s}_v$，所以有 $\boldsymbol{s}_u\cdot\boldsymbol{s}_v=0$，即

$$a^2(u^2-w^2)(v^2-t^2)-4b^2uvwt+c^2(u^2+w^2)(v^2+t^2)=0,$$

从而得

$$\frac{a^2(uv+wt)^2}{(vw+ut)^2}+\frac{b^2(vw-ut)^2}{(vw+ut)^2}+\frac{c^2(uv-wt)^2}{(vw+ut)^2}=a^2+b^2-c^2,$$

将(*)代入得交点坐标满足 $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$，所以所求的轨迹方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

9. 参阅上题解法. **10**. 当 $2\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，轨迹为单叶双曲面，当 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，轨迹为两相交平面. 提示：坐标系选取参阅§4.5第6题.

第五章

§ 5.1

1. (1) $\frac{1}{a^2}x,\ \frac{1}{b^2}y,\ -1$; (2) $\frac{1}{a^2}x,\ -\frac{1}{b^2}y,\ -1$; (3) $-p,\ y,\ -px$; (4) $x+\frac{5}{2},\ -3y,\ \frac{5}{2}x+2$; (5) $2x-\frac{1}{2}y-3,\ -\frac{1}{2}x+y+\frac{7}{2},\ -3x+\frac{7}{2}y-4$. **2**. (1) $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$, $(1,\ 0)$; (2) $\left(\frac{4-2\sqrt{26}i}{5},\ \frac{-7+\sqrt{26}i}{5}\right)$, $\left(\frac{4+2\sqrt{26}i}{5},\ \frac{-7-\sqrt{26}i}{5}\right)$; (3) 二重点 $(1,\ 0)$; (4) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right)$; (5) 无交点. **3**. 整条直线在二次曲线上. **4**. (1) $k<-4$; (2) $k=1$ 或 3; (3) $k=1$ 或 5; (4) $k>\frac{49}{24}$.

§ 5.2

1. (1) $-1:1$, 抛物型; (2) $(-2\pm\sqrt{2}i):3$, 椭圆型; (3) $1:0,\ 0:1$, 双曲型. **2**. (1) 中心曲线; (2) 无心曲线; (3) 无心曲线; (4) 线心曲线. **3**. (1) $\left(\frac{3}{28},\ -\frac{13}{28}\right)$; (2) $(-1,\ 2)$; (3) 无中心; (4) 直线 $2x-y+1=0$ 上的点都是中心. **4**. (1) $a\neq 9$; (2) $a=9,\ b\neq 9$; (3) $a=b=9$. **5**. 设 $(x,\ y)$ 为渐近线上的任意点, 那么由曲线的渐近方向为

$$X:Y=(x-x_0):(y-y_0)$$

$$\therefore \qquad \Phi(x-x_0,\ y-y_0)=0,$$

即
$$a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2=0.$$

6. (1) $2x-y+1=0,\ 3x+y=0$; (2) $x-y+2=0,\ x-2y-1=0$; (3) $x+y+1=0$. **7**. 提示: $I_2=I_3=0$ 与 $I_2=0,\ \ I_3\neq 0$ 分别等价于

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}} \text{ 与 } \frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

8. 设以 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 为渐近线的二次曲线为

$$F(x,\ y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

它的渐近线为
$$\Phi(x-x_0,\ y-y_0)=0,$$

其中 $(x_0,\ y_0)$ 为曲线的中心, 因为它是关于 $x-x_0,\ y-y_0$ 的二次齐次式, 所以它可以分解为两个一次式之积, 从而有

$$\Phi(x-x_0,\ y-y_0)=(A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C),$$

而 $\Phi(x-x_0, y-y_0)=a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-2(a_{11}x_0+a_{12}y_0)x-2(a_{12}x_0+a_{22}y_0)y+a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2,$$

因为(x_0, y_0)为曲线的中心，所以有

$$a_{11}x_0+a_{12}y_0=-a_{13},\ a_{12}x_0+a_{22}y_0=-a_{23},$$

因此 $\Phi(x-x_0, y-y_0)=F(x, y)+\Phi(x_0, y_0)-a_{33}$,

令：$\Phi(x_0, y_0)-a_{33}=-D$, 代入上式就得

$$F(x, y)=\Phi(x-x_0, y-y_0)+D,$$

即 $F(x, y)=(A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)+D$,

所以以 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 为渐近线的二次曲线可写成

$$(A_1x+B_1y+C_1)(Ax+By+C)+D=0.$$

9. (1) $xy-x-4=0$; (2) $2x^2-xy-3y^2-5x+7=0$, 提示：利用第**8**题的结论.

§ **5.3**

1. (1) $9x+10y-28=0$; (2) $x-2y=0$; (3) $y+1=0$, $x+y+3=0$; (4) $11x+5y-10\sqrt{2}=0$, $x-y+2\sqrt{2}=0$; (5) $x=0$. **2**. (1) $x+4y-5=0$, $(1, 1)$ 与 $x+4y-8=0$, $(-4, 3)$; (2) $y\pm2=0$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$ 与 $x=\pm2$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$. **3**. (1) $(-1, 1)$; (2) $(-1, 1)$; (3) 直线 $x-y-1=0$ 上的点都是奇异点. **4**. $6x^2+3xy-y^2+2x-y=0$, 提示：利用已知切线与(5.3-5)重合的条件. **5**. $mx^2+(m^2-1)xy-my^2-m(a^2-b^2)=0$.

§ **5.4**

1. (1) $6x+7y+4=0$; (2) $7x+10y+5=0$; (3) $x+3y+1=0$. **2**. $x+12y-8=0$, $12x-2y-23=0$. **3**. $x-1=0$, $x-2y+3=0$. **4**. $4x+y+3=0$. **5**. $x+3y=0$ 与 $2x+y=0$, 或 $2x-y=0$ 与 $x-3y=0$. **7**. (1) $2x-y+1=0$; (2) $5x+5y+2=0$. **8**. $x^2-xy-y^2-x-y=0$.

§ **5.5**

1. 1:0, 0:1, $x=0$, $y=0$; 1:0, 0:1, $x=0$, $y=0$; 0:1, 1:0, $y=0$. **2**. (1) $1:(-1)$, $1:1$, $x-y=0$, $x+y-2=0$; (2) $1:1$, $1:(-1)$, $x+y=0$, $x-y+2=0$; (3) $3:(-4)$, $4:3$, $3x-4y+7=0$; (4) 任何方向都是主方向，过中心的任何直线都是主直径. **3**. $4x^2-7xy+4y^2-7x+8y=0$. **4**. 设 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 由它们确定的主方向分别为 $X_1:Y_1$ 与 $X_2:Y_2$, 那么有

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}Y_1=\lambda_1X_1 \\ a_{12}X_1+a_{22}Y_1=\lambda_1Y_1 \end{cases}, \quad 与 \begin{cases} a_{11}X_2+a_{12}Y_2=\lambda_2X_2, \\ a_{12}X_2+a_{22}Y_2=\lambda_2Y_2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad \lambda_1X_1X_2+\lambda_1Y_1Y_2 &= (a_{11}X_1+a_{12}Y_1)X_2+(a_{12}X_1+a_{22}Y_1)Y_2 \\ &= (a_{11}X_2+a_{12}Y_2)X_1+(a_{12}X_2+a_{22}Y_2)Y_1 \\ &= \lambda_2X_2X_1+\lambda_2Y_2Y_1, \end{aligned}$$

从而得 $$(\lambda_1-\lambda_2)(X_1X_2+Y_1Y_2)=0,$$

$$\because\ \lambda_1\neq\lambda_2 \qquad \therefore\ X_1X_2+Y_1Y_2=0,$$

所以两主方向 $X_1:Y_1$ 与 $X_2:Y_2$ 相互垂直。

§ 5.6

1. (1) $6x''^2+y''^2-12=0$; (2) $2\sqrt{2}x''^2+5y''=0$; (3) $9x''^2-4y''^2-36=0$; (4) $2x''^2-1=0$. **2.** (1) $9x'^2+4y'^2-36=0$, 变换公式:

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'-1,\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+2;$$

(2) $-3x'^2+2y'^2-1=0$, 变换公式:

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'-1,\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'+2;$$

(3) $5y'^2-\frac{10}{\sqrt{5}}x'=0$, 变换公式:

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'-\frac{9}{10},\quad y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'+\frac{1}{5};$$

(4) $5y'^2-1=0$, 变换公式:

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'-\frac{2}{5},\quad y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'+\frac{1}{5}.$$

4. 提示: 求主直径, 并化简方程.

§ 5.7

1. 曲线名称, 简化方程与标准方程分别为 (1) 双曲线, $4x^2-2y^2-2=0$, $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-y^2=1$; (2) 椭圆, $2x^2-4y^2-8=0$, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$; (3) 两相交直线, $(2+\sqrt{5})x^2+(2-\sqrt{5})y^2=0$, $\frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{5}+2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}=0$; (4) 抛物线, $5y^2-\frac{2}{5}\sqrt{5}x=0$, $y^2=\frac{2\sqrt{5}}{25}x$; (5) 点或称相交于一实点的两条虚直线,

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x^2+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)y^2=0,\ \frac{x^2}{\frac{1}{3+\sqrt{5}}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3-\sqrt{5}}}=0;$$

(6) 抛物线的一部分，$2y^2-2\sqrt{2}ax=0$，$y^2=\sqrt{2}ax(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a)$；(7) 两平行直线，$2y^2-5=0$，$y^2=\dfrac{5}{2}$；(8) 两重合直线，$5y^2=0$，$y^2=0$.

2. $\lambda=4$. **3**. $I_1=2\lambda$，$I_2=(\lambda-1)(\lambda+1)$，$I_3=(5\lambda+3)(\lambda-1)$，$K_1=2(5\lambda-1)$，当 λ 的值变化时，I_1，I_2，I_3，K_1 也随着变化，它们的关系如下表：

λ	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,-\frac{3}{5}\right)$	$-\frac{3}{5}$	$\left(-\frac{3}{5},0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
I_1	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
I_2	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+
I_3	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+
K_1	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+

从而有

$\lambda<-1$	$I_2>0,\ I_1I_3<0$	椭圆
$\lambda=-1$	$I_2=0,\ I_3\neq0$	抛物线
$-1<\lambda<-\frac{3}{5}$	$I_2<0,\ I_3\neq0$	双曲线
$\lambda=-\frac{3}{5}$	$I_2<0,\ I_3=0$	一对相交直线
$-\frac{3}{5}<\lambda<1$	$I_2<0,\ I_3\neq0$	双曲线
$\lambda=1$	$I_2=0,\ I_3=0,\ K_1>0$	一对平行的虚直线
$1<\lambda<+\infty$	$I_2>0,\ I_1I_3>0$	虚椭圆

4. 提示：把二次曲线方程写成简化形式. **5**. 提示：圆为椭圆的特例，在特征方程中有等根.

第 六 章

§ 6.2

1. (0, 1, 0). **2**. (1, 1, −1). **3**. (0, 0, 0). **4**. 中心直线 $\dfrac{x}{3}=$

$\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$. 5. 中心平面 $2x-y+3z+2=0$. 6. 无中心. 7. 无中心. 8. 中心直线 $\begin{cases}2x-y+2z+7=0,\\ x-5y+z+8=0.\end{cases}$

§ 6.3

1. $x+10y-3z+22=0$. 2. (1) 无奇点; (2) (0, 0, 0); (3) 无奇点; (4) 直线 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 上的点都是奇点; (5) 平面 $y=0$ 上的点都是奇点. 3. 提示: 任取锥面上的点 (x_0, y_0, z_0), 求出以 (x_0, y_0, z_0) 为切点的切平面. 5. $k^2=a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2$. 6. (3, 1, −2). 7. $x+2y-2=0$, $25x-112y-54z+58=0$. 8. $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-2}$, $\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{2}$. 9. $8x^2+15y^2+11z^2-12xy+4xz-24yz-14=0$.

§ 6.4

1. (1) 0:1:1; (2) 无奇向; (3) 平行于平面 $x+y-2z=0$ 的方向都是奇向. 2. $2x-3y-2=0$. 3. $x+3y-z-1=0$, 2:(−1):5. 4. $2x-2y+3z=0$, 1:(−2):4. 5. 设中心二次曲面为 $F(x, y, z)=0$, 那么

$$\begin{cases}F_1(x, y, z)=0,\\ F_2(x, y, z)=0,\\ F_3(x, y, z)=0,\end{cases}$$

有唯一解,即曲面的中心,所以方程

$$XF_1(x, y, z)+YF_2(x, y, z)+ZF_3(x, y, z)=0,$$

(其中 X, Y, Z 为不全为零的任意数)表示过曲面中心的任意平面, 它恰好是共轭于 $X:Y:Z$ 方向的曲面的径面,所以过中心的任意平面一定是中心二次曲面的径面. 6. $2x+3y+z+4=0$. 提示: 利用上题结论.

§ 6.5

1. (1) 1:(−1):0, 1:1:0, 0:0:1, $x-y+1=0$, $x+y-1=0$, $5z+2=0$; (2) 1:(−1):0, 1:1:(−1), 1:1:2, $x-y=0$, $x+y-z=0$, $x+y+2z-1=0$; (3) 2:4:1, 1:(−1):2, 3:(−1):(−2)(奇向), $14x+28y+7z+12=0$, $x-y+2z-3=0$; (4) 1:(−1):0, 1:1:t(t 为任意值, 都是奇向), $2x-2y+3=0$. 2. 提示: 仿 § 5.5 第 4 题.

§ 6.6

1. 简化方程: $6x'^2+3y'^2-2z'^2+6=0$, 变换公式: $x=\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+$

$\frac{1}{\sqrt{2}}z'+1$, $y=-\frac{1}{\sqrt{6}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $z=\frac{2}{\sqrt{6}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+1$. **2**. 简化方程: $9x'^2+6y'^2+3z'^2-3=0$ (即 $3x'^2+2y'^2+z'^2-1=0$), 变换公式: $x=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'+1$, $y=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'+1$, $z=-\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'+1$. **3**. 简化方程 $12x''^2-18y''^2+12z''=0$(即 $2x''^2-3y''^2+2z''=0$), 变换公式 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}x''+\frac{1}{3\sqrt{2}}y''+\frac{2}{3}z''+1$, $y=-\frac{4}{3\sqrt{2}}y''+\frac{1}{3}z''+1$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}x''+\frac{1}{3\sqrt{2}}y''+\frac{2}{3}z''+1$. **4**. 简化方程 $9x''^2+6y''=0$ (即 $3x''^2+2y''=0$), 变换公式: $x=\frac{1}{3}x''+\frac{2}{3}y''-\frac{2}{3}z''+\frac{5}{9}$, $y=-\frac{2}{3}x''+\frac{2}{3}y''+\frac{1}{3}z''+\frac{8}{9}$; $z=\frac{2}{3}x''+\frac{1}{3}y''+\frac{2}{3}z''+\frac{1}{9}$. **5**. 简化方程: $9x''^2-18y''=0$ (即 $x''^2-2y''=0$), 变换公式: $x=\frac{2}{3}x''-\frac{2}{3}y''+\frac{1}{3}z''$, $y=-\frac{1}{3}x''-\frac{2}{3}y''-\frac{2}{3}z''$, $z=\frac{2}{3}x''+\frac{1}{3}y''-\frac{2}{3}z''$.

§ 6.7

1. $I_2=3>0$, $I_1I_3=3>0$, $I_4=-49<0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, 球面, 简化方程: $x^2+y^2+z^2-49=0$, 标准方程: $x^2+y^2+z^2=49$(略去撇号, 下同). **2**. $I_3=5\neq0$, $I_2=-9<0$, $I_4=-15<0$, 双叶双曲面, 简化方程 $5x^2-y^2-z^2-3=0$, 标准方程 $\frac{x^2}{\frac{3}{5}}-\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{3}=1$. **3**. $I_3=54\neq0$, $I_2=-27<0$, $I_4=0$, 二次锥面, 简化方程 $6x^2-3y^2-3z^2=0$, 标准方程 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-y^2-z^2=0$. **4**. $I_2=66>0$, $I_1I_3=1200>0$, $I_4=-2560<0$, 椭球面, 简化方程: $2x^2+5y^2+8z^2-32=0$, 标准方程 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{32}{5}}+\frac{z^2}{4}=1$. **5**. $I_3=I_4=0$, $I_2=18>0$, $I_1K_2=-972<0$, 椭圆柱面, 简化方程$3x^2+6y^2-6=0$, 标准方程$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$. **6**. $I_3=I_4=I_2=0$, $K_2=-288\neq0$, 抛物柱面, 简化方程 $6x^2-8\sqrt{3}y=0$ (或 $6x^2+8\sqrt{3}y=0$), 标准方程: $x^2=\frac{4}{3}\sqrt{3}y\left(\text{或 } x^2=-\frac{4}{3}\sqrt{3}y\right)$. **7**. $I_3=0$, $I_4=-162<0$, 椭圆抛物面, 简化方程: $3x^2+6y^2-6z=0$ (或 $3x^2+6y^2+6z=0$) 标准方程:

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=2z\left(或\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=-2z\right)$. **8**. $I_3=I_4=K_2=0$, $I_2=-81<0$, 一对相交平面，简化方程：$9x^2-9y^2=0$, 标准方程 $x^2-y^2=0$. **9**. $I_3=I_4=K_2=0$, $I_2=81>0$, 直线，简化方程：$9x^2+9y^2=0$, 标准方程 $x^2+y^2=0$. **10**. $I_3=I_4=I_2=K_2=0$, $K_1=-2401<0$, 一对平行平面，简化方程 $49x^2-49=0$, 标准方程 $x^2=1$. **11**. $I_2=5>0$, $I_1\cdot I_3=8>0$, $I_4=0$, 一点，简化方程 $2x^2+y^2+z^2=0$, 标准方程 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1}=0$. **12**. $I_3=0$, $I_4=\frac{729}{16}>0$, 双曲抛物面，简化方程 $\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}y^2-3z=0\left(或\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}y^2+3z=0\right)$, 标准方程 $\frac{x^2}{\frac{1}{3}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=2z\left(或\frac{x^2}{\frac{1}{3}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=-2z\right)$.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝解析几何　第三版
作者＝吕林根　许子道等编
页数＝３３４
ＳＳ号＝１０８３２３４５
出版日期＝１９８７年０５月第３版

目　录

第一章 平面坐标法

一、内容概述

本章是平面解析几何的基础，也是中学解析几何的复习，主要谈两个问题，即“平面坐标法”和“方程与图形”.

在平面内建立了坐标系（直角坐标系或极坐标系）后，平面内的点就与有序实数对建立了一种对应关系，这样平面内的点就有了坐标，曲线就有了方程，也就是说，我们可以用有序实数对来表示点，用方程来表示曲线，平面上的几何结构也就被数量化，代数化了，从而我们也就可以用代数方法来研究几何问题了.

本章教材分平面直角坐标、方程与图形和极坐标三个单元.

第一单元：平面直角坐标，即教材的§1.1. 这是解析几何的最基础的部分. 在这一单元中，我们引进了平面直角坐标系，建立了两点间距离与线段的定比分点公式，并且介绍了解析法证题. 这些基础内容，以后经常要用到，十分重要.

第二单元：方程与图形，即教材的§1.2. 它是在前一单元的基础上，阐述了曲线方程的概念，进一步把曲线与方程联系起来. 这一单元介绍的由曲线求它的方程与由方程描绘它的图形，通常叫做曲线与方程的两个基本问题，它揭示了本课程的基本思想，体现了形数结合的基本精神.

第三单元：极坐标，即教材的§1.3. 这是另一种常用的坐标. 它的思想方法与直角坐标十分类似. 在这一单元中，当平面内引进了极坐标系后，就讨论了曲线与它的极坐标方程的两个基本问题，在第一个基本问题，即由曲线求它的极坐标方程中，我们建立了一些常用的曲线如直线、圆、圆锥曲线的极坐标方程，并且

通过例题说明了如何利用极坐标来求动点的轨迹方程，有些复杂的曲线，特别是那些与定点有关的动点的轨迹方程，应用极坐标不仅容易建立，而且形式简单．第二个基本问题即由极坐标方程描绘它的曲线，它与直角坐标的情况一样，基本方法仍然是描点法．最后阐明了极坐标与直角坐标之间的关系，介绍了极坐标与直角坐标的互换公式，以便使点的坐标与曲线的方程在两种坐标系中可以互化．

二、学习要求

1．理解并掌握用有序实数对来刻划点在平面内的位置的直角坐标法与极坐标法，以及两种坐标的互换公式．

2．掌握两点间的距离公式与线段的定比分点公式，并能初步用解析法来证明简单的平面几何题．

3．理解曲线方程的意义，并能根据已知条件选取适当的坐标系，建立曲线的方程（直角坐标方程或极坐标方程）；反过来，能够通过对方程（直角坐标方程或极坐标方程）的讨论，掌握曲线的性质，并画出曲线的图形．

三、学习辅导

1．平面直角坐标

1）有向线段

有向线段，有向线段的长度与有向线段的数值是三个不同的概念，它们既有联系又有区别，它们的记法也不一样．

有向线段是一个几何量，或者说是一个几何图形，以A为起点B为终点的有向线段记做$\overline{AB}$．起点与终点重合的线段叫做零线段，零线段的方向不确定，为方便起见，约定这样的线段也称有向线段．

有向线段的长度是一个正实数，零线段的长度为零，一般有向线段的长度是一个正数，即当选定了一条线段作为长度单位后，去量由有向线段两个端点所决定的线段所得的那个正数．有向线段$\overline{AB}$的长度记做$|AB|$．

有向线段的数值是一个实数，即它的长度加上正号或负号，当它与所在有向直线的方向相同时为正，相反时为负，零线段的数值为零．有向线段$\overline{AB}$的数值记做AB．

必须指出，只有当有向线段配置在有向直线上或平行于有向直线时，我们才能比较出有向线段的方向是正还是负，从而才能确定有向线段的数值是正数还是负数，离开了有向直线谈有向线段的数值是没有意义的．

2）平面解析几何的两个基本公式

平面直角坐标是平面解析几何里应用得最广泛的一种坐标法．在平面上取定了相互垂直且有公共原点的两数轴，平面上就确定了一个直角坐标系．这时平面上的点与一对有序实数就建立了一一对应的关系，这样平面上的点的位置完全可以由一对有序实数，即点的坐标来刻划，也就是说可以用数来表示点，从而研究平面上点的问题就转化为研究点的坐标，也就是数的问题了．例如两点$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$之间的距离和分有向线段$\overline{M_1M_2}$成定比λ的分点M的坐标(x, y)都可以由M_1与M_2的坐标通过计算而得到，它们分别是教材中的(1.1-2)与(1.1-4)，即

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.1\text{-}2)$$

与

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (1.1\text{-}4)$$

公式(1.1-2)的证明，是假定$\overline{M_1M_2}$与坐标轴不平行，利用直角三角形的勾股定理而得证的，为了说明公式(1.1-2)的普遍性，我们最后通过验证，说明当$\overline{M_1M_2}$与坐标轴平行时(1.1-2)也成立，这一验证的步骤是必要的，不可少的，因为当$\overline{M_1M_2}$与坐标轴

平行时，直角三角形不存在，勾股定理也就不能应用了.

公式(1.1-4)的应用，必须注意(x_1, y_1)是有向线段起点的坐标，(x_2, y_2)是终点的坐标，而(x, y)是分点的坐标，不能随意改变. 如果M分有向线段$\overline{M_2M_1}$成定比λ，即取$M_2(x_2, y_2)$为起点，$M_1(x_1, y_1)$为终点，那么，分点坐标为

$$x=\frac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_2+\lambda y_1}{1+\lambda}$$

弄清楚了这一点，那么共线的三点当任意确定了起点、终点与分点后，它们坐标之间的关系就由(1.1-4)给定，教材§1.1例3的解法二就是根据这一点.

公式(1.1-4)的应用，一般有下面四种情况：

1° 已知线段的起点与终点的坐标以及定比λ，求分点的坐标.

2° 已知线段的分点坐标，起点(或终点)坐标及比值λ，求终点(或起点)的坐标；

3° 已知线段的起点、终点及分点的坐标，求比值λ；

4° 证三点共线. 如果按3°，由三点的横坐标求出的λ与由纵坐标求出的λ'的值相同，即$\lambda=\lambda'$，那么，三点共线.

3) 解析法证题

当平面上建立了直角坐标系之后，平面上的点都有了坐标，我们就可以用坐标法即解析法来证明一些简单的几何题. 在这里必须指出，在解析几何中有时也利用平面几何的定理作为论证根据，因为一切都要用解析法徒然增加证明的困难与烦琐. 解析法证题，仅是证明几何命题的一种方法，有时，它不一定比直接从几何的定义、定理经过逻辑推理证明的“综合法”容易，但一般说来，解析法便于构思，方法具有普遍性.

用解析法证题时，选取适当的坐标系可使证明简单，例如教材§1.1例4中的两种坐标系的选取，都有利于简化运算，如果取一

般的坐标系运算就要复杂一些了．这是因为如果取一般的直角坐标系，那么平行四边形 $ABCD$ 的四顶点的坐标可设为

$$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4),$$

再根据平行四边形对角线相互平分的条件有

$$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2} \quad 与 \quad \frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2},$$

即

$$x_1+x_3=x_2+x_4 \quad 与 \quad y_1+y_3=y_2+y_4. \tag{1}$$

然后由两点距离公式通过计算，并运用(1)才能证得

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 =|AC|^2+|BD|^2.$$

虽然我们还可以把上述的证法改进一下，设平行四边形 $ABCD$ 的两顶点 A、B 的坐标为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，两对角线 AC 与 BD 的交点 M_0 的坐标为 $M_0(x_0,y_0)$，那么其余两顶点的坐标为 $C(2x_0-x_1,2y_0-y_1)$，$D(2x_0-x_2,2y_0-y_2)$，这样通过计算也能证得

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2=|AC|^2+|BD|^2$$

但是以上证法与教材中的方法比较，我们不难发现，它在证明过程中的计算就要繁一些了．

2．方程与图形

1）曲线与方程

曲线(或图形)是几何中的对象，方程是代数中的对象，我们通过坐标法把它们联系起来了，因此曲线(或图形)与方程是解析几何的基本概念．我们知道，这里所指的曲线是动点的轨迹，因为动点运动的规律不同，动点的轨迹也不一样，所以轨迹是说明动点变动规律的几何形象．既然点可以用坐标表示，点的变动也就可以用坐标的变动来表示，而点的变动规律可以用坐标 (x,y) 的变动

规律来表示，也就是用含有两个变量 x,y 的方程来表示，于是平面上的曲线便与代数中的方程 $F(x,y)=0$ 联系起来了．这样我们在教材中就提出了关于方程与图形的定义 1.2.1，这个定义非常重要，读者对它要有充分的认识．

关于方程与图形有两个基本问题必须解决．

① 已知曲线(或图形)，求它的方程；

② 已知方程，画出它的图形(或曲线)．

所谓"由曲线求它的方程"就是把"构成曲线的几何条件"转化为"动点的坐标(x,y)所适合的方程"，也就是说把"几何条件"翻译成"代数条件"，因此在一般情况下，求得曲线的方程之后，我们还不能知道这方程所代表的曲线的形状．必须通过第 2 个基本问题的讨论，才能画出这方程所表示的图形．

2) 由曲线求它的方程

由曲线求它的方程一般需要下面的五个步骤：

1° 选取适当的坐标系(如题目中已给定，这一步可省略)；

2° 在曲线上任取一点 $M(x,y)$；

3° 根据曲线上的点所要满足的几何条件写出等式；

4° 用点的坐标 x,y 的关系式来表示这个等式，并化简得方程；

5° 证明所得的方程就是曲线的方程也就是证明它符合定义1.2.1(如果化简的过程都是同解变形的过程，便可断言所得的方程就是曲线的方程)．

教材§1.2 中的例 1 —例 6 基本上就是按照上面的步骤来解的．在这些步骤中的第 1°步，往往影响到方程的繁简，教材中提出的几点习惯的做法，例如，遇到问题中有直角，可取直角边作为两坐标轴建立直角坐标系；如果遇到图形有对称轴或对称中心，又常常取对称轴为坐标轴，或对称中心为坐标原点建立直角坐标系，这时的曲线方程将比较简单，但是一般地说，建立坐标系无一定的

规律可循，只有通过实践，多练习、多总结，注意具体问题具体分析，才能逐步掌握好这一点。

解决了第一个基本问题，即建立了曲线的方程之后，研究曲线与曲线之间的关系就转化为讨论方程与方程之间关系的代数问题，也就是说我们可以用代数的方法来研究有关曲线的几何问题了，教材中以平面上最简单的曲线——直线为例，用代数的方法研究了两直线的位置关系和点与直线的位置关系的判定，以及导出了两直线的交角和点到直线的距离的计算公式，读者不仅要掌握这些结论，而且要领会它的思想方法。

3）由方程画出它的图形

由方程如何画出它的图形，我们介绍了"描点法"，在这里我们提出几点注意事项：

1° 必须明确在画方程的图形时，对方程进行讨论的重要性。例如对方程进行讨论很容易明确 $x^2-y^2=0$ 代表两相交直线 $(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=0$ 代表四个点 $(1,1)$ $(-1,1)$，$(-1,-1)$与$(1,-1)$，而方程$(x^2+1)^2+(y^2+1)^2=0$ 不表示任何实图形，如果不进行讨论，这些结论并不是很显然的。

2° 在讨论曲线的三种对称性(即关于 x 轴，关于 y 轴，关于坐标原点对称)中，如果有两种成立，那么第三种必然成立。例如当曲线关于 x 轴与 y 轴都对称，那么曲线关于坐标原点一定对称，这是因为曲线关于 x 轴对称，所以当点(x,y)在曲线上时，它关于 x 轴的对称点$(x,-y)$也在曲线上；又曲线关于 y 轴也对称，从而当点$(x,-y)$在曲线上时，它关于 y 轴的对称点$(-x,-y)$也在曲线上，这样从点(x,y)在曲线上，推得点$(-x,-y)$也在曲线上，因此曲线关于原点对称。

3° 求曲线的范围，归根到底是确定 x(或y)的变化范围使得 y(或 x)成为实数，它和解不等式有着密切的关系，但无统一法则，只能具体问题具体分析，例如对方程

$$y^2=4x^3-3x-1$$

所表示的图形范围可作如下讨论，先把方程改写为

$$y^2=(x-1)(2x+1)^2,$$

于是可以看出$\left(-\frac{1}{2},0\right)$适合这方程，从而点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$是图形中的点．另一方面当$x\geqslant1$时，$y^2\geqslant0$．因此在直线$x=1$的右侧有图形上的点，但当$x<1$时$\left(\text{除去 } x=-\frac{1}{2}\right)$，$y^2<0$，所以除点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$以外在直线$x=1$的左侧没有图形上的点，所以方程表示的图形是由孤立点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$与直线$x=1$的右侧的曲线构成．

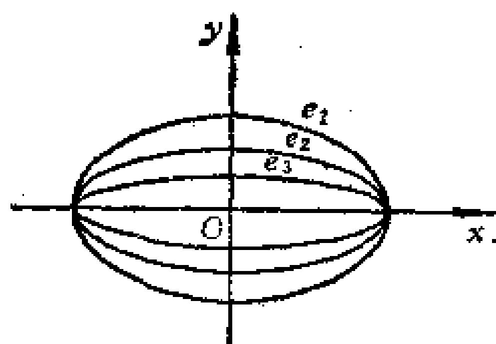
3、椭圆、双曲线的离心率

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b^2=a^2-c^2)$的离心率为

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},$$

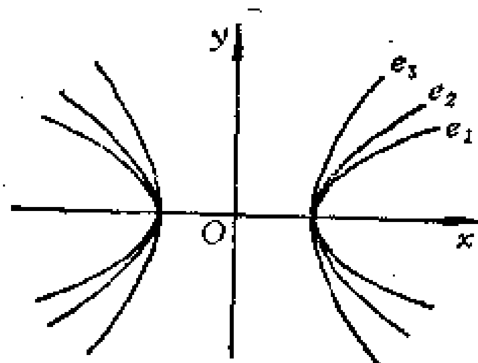
$$0<e<1,$$

所以当e越大，$\frac{b}{a}$越小，椭圆也就越扁；当e越小，$\frac{b}{a}$越大，椭圆也就越圆，如图1-1(图中将椭圆的a值固定)．



$0<e_1<e_2<e_3<1$

图 1-1



$1<e_1<e_2<e_3$

图 1-2

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b^2=c^2-a^2)$的离心率为

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, \quad e>1.$$

所以当离心率 e 越小，$\frac{b}{a}$也越小，双曲线越弯曲；当 e 越大，$\frac{b}{a}$也越大，双曲线就越伸直，如图 1-2(图中双曲线的 a 值固定)。

4. 直线族

直线族是指具有共同性质的直线的集合，在解析几何中常用带有参数的关于 x,y 的一次方程来表示，本课程主要介绍了直线束，定理 1.2.3 证明了以两相交直线

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

的交点为中心的中心直线束的方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{2}$$

其中 λ,μ 是不全为零的参数. 证明的步骤分三步：

1° 不论$\lambda:\mu$取何值，(2) 总是一个二元一次方程，所以(2)总表示直线；

2° 由(2)表示的直线总通过两已知直线 l_1与l_2 的交点；

3° 由(2)表示的直线包含了平面上通过 l_1与 l_2交点的所有直线.

定理 1.2.4 是关于平行直线束的问题.

如果把定理 1.2.3 的条件作一些扩充，即如果$l_1 /\!/ l_2$，那么有

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

于是

$$\frac{\lambda A_1+\mu A_2}{A_2}=\frac{\lambda B_1+\mu B_2}{B_2},$$

所以直线

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)=0,$$

即(2)也与它们平行，因此当 $l_1 \parallel l_2$ 时，方程(2)表示平行直线束.

利用直线束来求直线的方程是一个很重要的方法，特别是对于那些通过两已知直线交点或平行于已知直线的直线问题. 利用直线束可使这些问题的解法更加方便. §1.2 的例 8 与 例 9 就说明了这个问题.

5. 极坐标

1) 极坐标系下曲线与其方程的关系

极坐标是平面解析几何中常用的另一种坐标法，也是用一对有序实数来确定平面上点的位置，但是在极坐标系下，平面上的点 M 与有序实数对 (ρ,φ) 之间的对应关系并不是一一对应的，同一个点，它的极坐标却有无数多，例如当 (ρ,φ) 是点 M 的极坐标时，那么 $(\rho,\varphi+2k\pi)$ 与 $(-\rho,\varphi+(2k+1)\pi)$（$k$ 为整数）都可以作为点 M 的极坐标，所以在极坐标系下，曲线与其极坐标方程之间的关系是：满足方程 $F(\rho,\varphi)=0$ 的 (ρ,φ) 必是曲线 L 上的某一点的坐标；反过来，曲线 L 上的任何一点至少有一组极坐标 (ρ,φ) 满足方程 $F(\rho,\varphi)=0$，例如对于双曲线与其极坐标方程

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\varphi},\quad (e>1),\tag{3}$$

它的一支由 ρ 取正值各点所组成，而另一支是由 ρ 取负值的各点所组成，下面我们来说明这个问题，

∵ $e>1, -1\leqslant\cos\varphi\leqslant 1$,

∴ $1-e\cos\varphi\gtreqless 0$,

当 $1-e\cos\varphi=0$ 时，由(3)知对应的 ρ 值不存在，但因为这时有 $0<\cos\varphi=\frac{1}{e}<1$，所以 $\varphi=\pm\arccos\frac{1}{e}$，又因为 $e=\frac{c}{a}$，所以

$\cos\varphi=\frac{a}{c}$，从而 $\operatorname{tg}\varphi=\pm\frac{b}{a}$，因此这时过极点与极轴交成角 $\arccos\frac{1}{e}$ 或 $-\arccos\frac{1}{e}$ 的两射线分别与双曲线的两条渐近线平行。两射线间的角 $2\arccos\frac{1}{e}$ 等于两渐近线的交角(图1-3)。

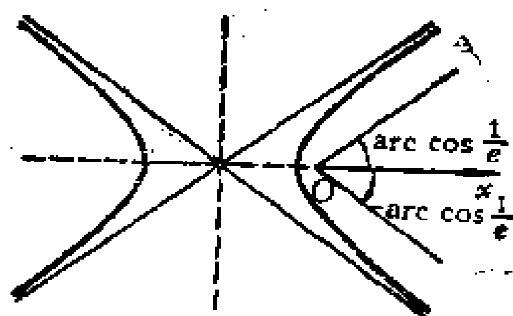


图 1-3

当 $1-e\cos\varphi<0$，即 $\cos\varphi>\frac{1}{e}$ 时，由(3)知 ρ 取负值，也就是当 $-\arccos\frac{1}{e}<\varphi<\arccos\frac{1}{e}$ 时，ρ 取负值，这时的点为双曲线(3)左支上的点。

当 $1-e\cos\varphi>0$，即 $\cos\varphi<\frac{1}{e}$ 时，由(3)知 ρ 取正值，也就是当 $\arccos\frac{1}{e}<\varphi\leqslant\pi$ 或 $-\pi<\varphi<-\arccos\frac{1}{e}$ 时，ρ 取正值，这时的点为双曲线(3)右支上的点。

在极坐标系下，平面上的点与其极坐标不是一一对应的，这就使得同一条曲线的极坐标方程有时可以有不同的表达形式，如方程

$$\rho=a \quad 与 \quad \rho=-a$$

表示同一个圆，而方程

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\varphi} \text{与} \quad \rho=-\frac{ep}{1+e\cos\varphi}$$

表示同一条圆锥曲线．此外，根据方程来讨论曲线的性质时，也必须注意到这一点．

2）极坐标系下曲线（图形）与其方程的两个基本问题

在极坐标系下，关于方程与曲线（图形）之间也存在着两个基本问题，这就是

① 由曲线求它的极坐标方程；

② 由极坐标方程画出它的图形．

这两问题的解决，其思想方法与直角坐标系下的情况是十分类似的．因此在熟悉直角坐标系下的情况的基础上，再注意极坐标的特点，对于一些常见的问题，也就不难解决了．教材中的例子已初步说明了这个问题．但是我们必须指出，对于极坐标方程的讨论与画图，是一个比较复杂的问题，在本课程中只作初步的介绍．有兴趣的读者，可去参考其他书籍．下面对这两问题再作两点说明：

1° 对于一些曲线，它的直角坐标方程比较复杂，而极坐标方程却比较简单．例如，教材§1.3中的例1、例2所指出的等速螺线（即阿基米德螺线）与帕斯卡蜗线，再如例3的心脏线，例4的三叶玫瑰线等都能说明这个问题，特别是那些绕定点转动或与定点有关的点的轨迹，用极坐标方程来表示往往比直角坐标方程要简单得多．

2° 在判别极坐标方程所表示的曲线的对称性（关于极轴、或极点，或过极点且垂直于极轴的直线对称）时，我们常以满足方程的动点的对称点的坐标代入方程来检验，如果它也满足方程，那么曲线具有对称性（对称于极轴，或极点，或过极点且垂直于极轴的直线）．由于在极坐标系下，我们知道，点的坐标不是唯一的，除极点外，同一点的坐标一般有两类表达形式，$(\rho,\varphi+2k\pi)$与$(-\rho,\varphi+(2k+1)\pi)$，因此在检验时必须考虑这两种情况，只要有一种

适合，曲线就具有对称性。例如方程

$$\rho=a\cos 2\varphi,$$

当(ρ,φ)满足方程时，它关于极轴的对称点$(\rho,-\varphi)$[或$(\rho,-\varphi+2k\pi)$]也满足方程，所以曲线$\rho=a\cos\varphi$关于极轴对称。再如方程

$$\rho=a\sin 2\varphi,$$

当(ρ,φ)满足方程，虽然$(\rho,-\varphi)$[或$(\rho,-\varphi+2k\pi)$]不满足方程，但(ρ,φ)关于极轴的对称点的坐标的另一表达式$(-\rho,\pi-\varphi)$[或$(-\rho,-\varphi+(2k+1)\pi$]却满足方程，所以$\rho=a\sin 2\varphi$关于极轴对称。至于关于极点或过极点且垂直于极轴的直线对称的判别，也有类似的情况。

最后我们还要指出，曲线性质的研究，往往利用曲线的方程来进行的，但是某些曲线，它的直角坐标方程比较复杂而它的极坐标方程却比较简单，而另一些曲线恰巧相反，因此为了方便，我们应根据比较简单的方程来研究。这样就有必要把两种坐标系下的曲线方程互换，而公式(1.3-12)或(1.3-13)就提供了方便。

公式(1.3-13)有时也写成

$$\begin{cases}\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2},\\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x},\end{cases}\tag{1.3-13'}$$

但它必须除去$x=0$的例外情形。

四、补 充 例 题

例 1 已知三角形的顶点是$A(4,0)$，$B(7,4)$，$O(0,0)$，求角A的平分线的长度。

解 设AD是角A的平分线，交BO边于$D(x,y)$(图 1-4)，由三角形的平分线的性质知

$$\frac{|BD|}{|DO|}=\frac{|AB|}{|AO|},$$

而 $|AB|=\sqrt{(7-4)^2+4^2}=5$, $|AO|=4$,

且 D 是 BO 的内分点，所以得

$$\frac{BD}{DO}=\frac{5}{4},$$

因此 D 的坐标为

$$x=\frac{7}{1+\frac{5}{4}}=\frac{28}{9},\qquad y=\frac{4}{1+\frac{5}{4}}=\frac{16}{9}.$$

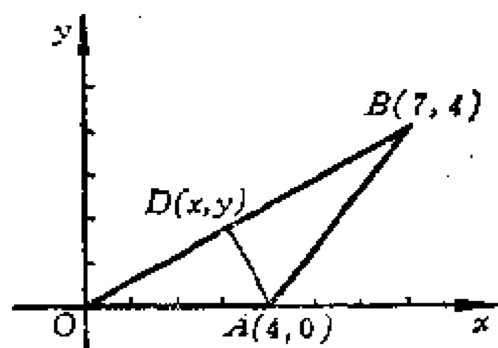


图 1-4

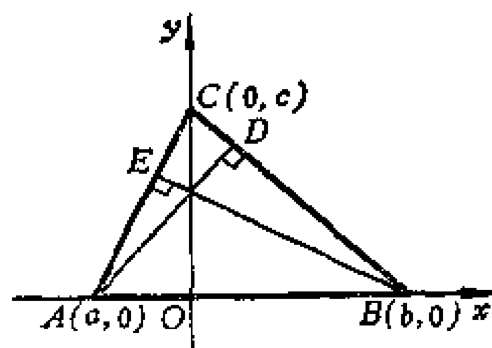


图 1-5

$$\therefore\quad |AD|=\sqrt{\left(\frac{28}{9}-4\right)^2+\left(\frac{16}{9}-0\right)^2}=\frac{8}{9}\sqrt{5}.$$

注　在解析几何中，可以利用初等几何的定理作为解题的依据，本例的解法利用了平面几何中关于三角形内角平分线的定理.

例 2　用解析法证明三角形的三条高共点.

证法一　设三角形 ABC，取 AB 边所在直线作为 x 轴，AB 边上的高线为 y 轴，建立直角坐标系(图 1-5).

设 A,B,C 三点坐标分别为 $(a,0),(b,0),(0,c)$，于是三条高线的方程分别为

AD： $y-0=\frac{b}{c}(x-a)$，即$bx-cy-ab=0$，

BE： $y-0=\frac{a}{c}(x-b)$，即$ax-cy-ab=0$，

CO： $x=0$。

因为BE与CO的交点$\left(0,-\frac{ab}{c}\right)$满足 AD 的方程，所以三高线 AD、BE、CO 共点.

证法二 当三角形为直角三角形时，本题显然成立，这时直角顶点即为三高的交点. 下面在非直角三角形的情况下，来证明本题也成立.

设三角形 ABC 的顶点坐标为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，三高为$|AA'|=h_a$，$|BB'|=h_b$，$|CC'|=h_c$(图 1-6)，那么在直角三角形 $AA'B$ 与 $AA'C$ 中分别有

$$BA'=\frac{h_a}{\operatorname{tg}B}, \qquad A'C=\frac{h_a}{\operatorname{tg}C}$$

所以

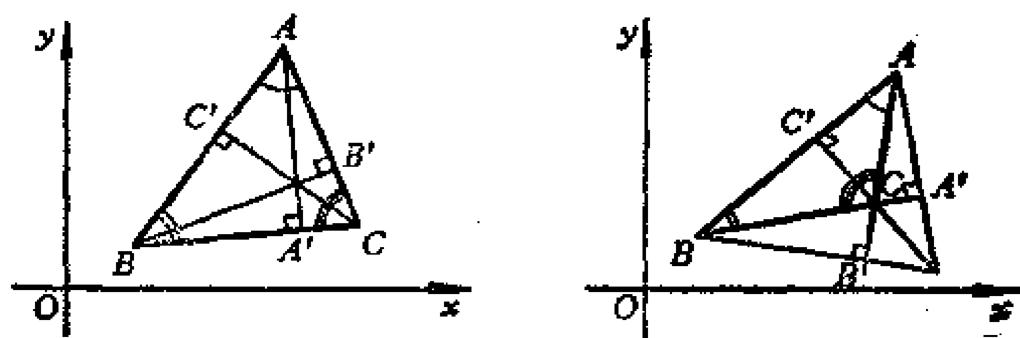


图 1-6

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B}.$$

同理可得

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}C}, \quad \frac{AC'}{C'B}=\frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A},$$

再设点A'的坐标为(x', y')，那么

$$x'=\frac{x_2+\dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}x_3}{1+\dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}}=\frac{x_2\operatorname{tg}B+x_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C},$$

$$y'=\frac{y_2+\dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}y_3}{1+\dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}}=\frac{y_2\operatorname{tg} B+y_3\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}.$$

现在把$\overline{AA'}$分成定比$(\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C):\operatorname{tg}A$，那么分点的坐标为

$$x=\frac{x_1+\dfrac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A}\left(\dfrac{x_2\operatorname{tg} B+x_3\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}\right)}{1+\dfrac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg} A}}$$

$$=\frac{x_1\operatorname{tg}A+x_2\operatorname{tg}B+x_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C},$$

$$y=\frac{y_1+\dfrac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A}\left(\dfrac{y_2\operatorname{tg}B+y_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}\right)}{1+\dfrac{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg} A}}$$

$$=\frac{y_1\operatorname{tg}A+y_2\operatorname{tg}B+y_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}.$$

类似地，我们把另两条高$\overline{BB'}$与$\overline{CC'}$分别分成定比$(\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A):\operatorname{tg}B$与$(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B):\operatorname{tg}C$，求得它们的分点坐标都是

$$\left(\frac{x_1\operatorname{tg}A+x_2\operatorname{tg}B-x_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C},\ \frac{y_1\operatorname{tg}A+y_2\operatorname{tg}B+y_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}\right)$$

因此三角形ABC的三条高线交于一点

$$\left(\frac{x_1\operatorname{tg}A+x_2\operatorname{tg}B+x_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C},\ \frac{y_1\operatorname{tg}A+y_2\operatorname{tg}B+y_3\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}\right).$$

注　本例的证法二选取的是一般坐标系，而证法一选取的是一个特殊位置的适当坐标系，在证法二中，由于计算三高线上的分

点坐标的方法是完全一致的，仅轮换坐标脚码与三角形的相应的顶角，因此采用一般坐标系是非常自然的，也是比较方便的，而在证法一中，由于要建立三条高线的方程和求两高线交点的坐标，因此为了计算简便，我们选取了一个使三角形的顶点坐标尽可能简单的特殊位置的坐标系，如果在这里也取一般坐标系，那么它的计算就要繁得多. 因此在解题中，怎样根据具体问题与解法，选取适当的坐标系，是十分重要的.

例 3 已知两定点间的距离是12，一动点到两定点距离的乘积等于定值36，求动点的轨迹.

解法一 设两定点为A_1与A_2，由题意容易知道，动点的轨迹关于直线A_1A_2，线段A_1A_2的中垂线以及A_1A_2的中点都对称，因此我们取直线A_1A_2为x轴，线段A_1A_2的中垂线为y轴建立直角坐标系(图1-7)，从而得两定点A_1与A_2的坐标分别为$(-6,0)$与$(6,0)$，设动点为$M(x,y)$，那么有

$$|MA_1|\cdot|MA_2|=36,$$

或

$$\sqrt{(x+6)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-6)^2+y^2}=36,$$

从而得

$$[(x+6)^2+y^2]\cdot[(x-6)^2+y^2]=36^2,$$

化简得

$$(x^2+y^2)^2-72(x^2-y^2)=0.$$

这就是所求的轨迹方程. 它的图形如图 1-8 所示，曲线叫做双纽线.

解法二 取A_1A_2之中点O为极点，射线OA_2为极轴建立极坐标系(图1-9)，并设$M(\rho,\varphi)$为轨迹上的点，那么

$$|MA_1|\cdot|MA_2|=36,$$

由余弦定理得：

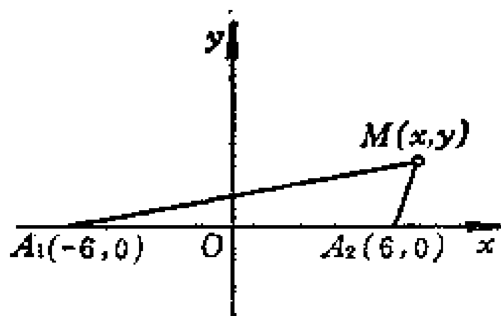


图 1-7

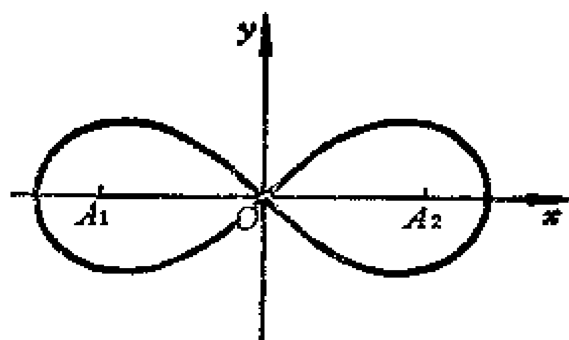


图 1-8

$$|MA_1|^2=|OM|^2+|OA_1|^2-2|OM|\cdot|OA_1|\cos(\pi-\varphi)$$
$$=\rho^2+36+12\rho\cos\varphi,$$
$$|MA_2|^2=|OM|^2+|OA_2|^2-2|OM|\cdot|OA_2|\cos\varphi$$
$$=\rho^2+36-12\rho\cos\varphi,$$

从而有

$$(\rho^2+36+12\rho\cos\varphi)(\rho^2+36-12\rho\cos\varphi)=36^2.$$

所以 $$(\rho^2+36)^2-144\rho^2\cos^2\varphi=36^2,$$

因此 $$\rho^4-72\rho^2(2\cos^2\varphi-1)=0,$$

于是有 $$\rho^2=72\cos2\varphi,\rho^2=0.$$

因为$\rho^2=0$包含在$\rho^2=72\cos2\varphi$中$\left(\text{例如当 }\varphi=\frac{\pi}{4}\text{时,}\right)$所以所求轨迹方程为

$$\rho^2=72\cos2\varphi.$$

这个方程的图形见例 8 .

注 1 本例的两种解法，都是直接由轨迹上的点所满足的几何条件列出等式,然后代入坐标，得到动点坐标所满足的方程,这种求轨迹方程的方法叫做直接法,也称普通法,这是求轨迹方程的最基本的一种方法.

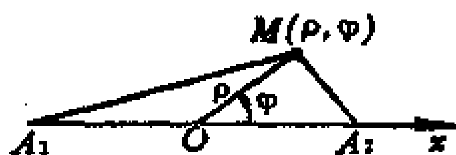


图 1-9

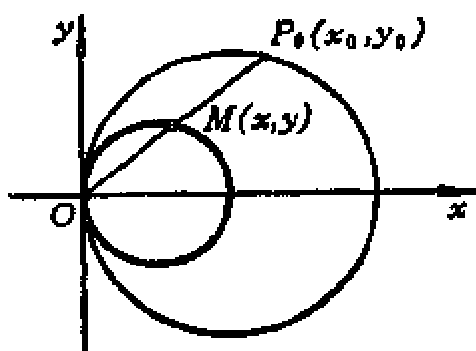


图 1-10

注 2 这个双纽线的极坐标方程也可由它的直角坐标方程通过两种坐标的互换公式(1.3-12)而得到，本例是 §1.2 习题 6 当 $a=m=6$ 时的情形，因此双纽线是卡西尼卵形线的特例.

例 4 给定半径为 a 的圆及其上的定点 O，过 O 任意作弦，求这些弦的中点的轨迹.

解法一 取 O 为原点，过 O 的直径所在直线为 x 轴建立直角坐标系(图1-10)那么这时的已知圆的方程为

$$x^2+y^2-2ax=0.$$

设 OP_0 为过 O 的任意弦，P_0 的坐标为 (x_0,y_0)，OP_0 的中点 M 的坐标为 (x,y)，那么

$$x=\frac{x_0}{2},\qquad y=\frac{y_0}{2},$$

或

$$x_0=2x,\qquad y_0=2y, \tag{1}$$

因为 (x_0,y_0) 在圆上，所以有

$$x_0^2+y_0^2-2ax_0=0, \tag{2}$$

(1)代入(2)，得

$$(2x)^2+(2y)^2-2a(2x)=0,$$

即 $\quad x^2+y^2-ax=0$，或 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}.$

这就是所求的轨迹的方程，它是一个圆心在$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$，半径为$\frac{a}{2}$的圆.

解法二 取O为极点，过O的直径所在的射线为极轴建立极坐标系(图1-11)，那么这时的已知圆的方程为

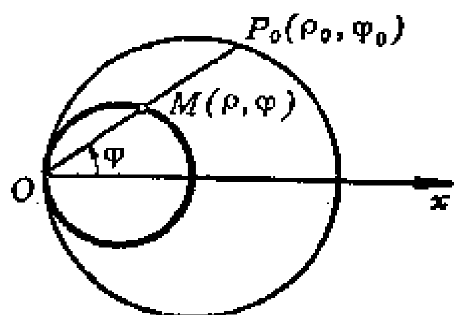


图 1-11

$$\rho=2a\cos\varphi.$$

设过O的任意弦OP_0的中点为$M(P,\varphi)$，P_0的坐标为(ρ_0,φ_0),那么显然有

$$\rho_0=2\rho,\ \varphi_0=\varphi, \tag{3}$$

而P_0在已知圆上,从而有

$$\rho_0=2a\cos\varphi_0, \tag{4}$$

所以将(3)代入(4),得

$$2\rho=2a\cos\varphi,$$

即
$$\rho=a\cos\varphi,$$

这就是所求的轨迹方程,它是一个半径为$\frac{a}{2}$的圆.

例 5 三角形$P_1P_2P_3$的三个顶点分别在三条已知的平行直线l_1、l_2、l_3上,试求三角形$P_1P_2P_3$重心M的轨迹.

解 设三角形$P_1P_2P_3$的三个顶点的坐标分别为$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$,$P_3(x_3,y_3)$,重心M的坐标为$M(x,y)$，三条已知的平行直线为

$$l_1:\ Ax+By+C_1=0,$$
$$l_2:\ Ax+By+C_2=0,$$
$$l_3:\ Ax+By+C_3=0,$$

那么有

$$Ax_1+By_1+C_1=0, \tag{5}$$

$$Ax_2+By_2+C_2=0, \tag{6}$$

$$Ax_3+By_3+C_3=0, \tag{7}$$

且

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}. \tag{8}$$

由(5)+(6)+(7),得

$$A(x_1+x_2+x_3)+B(y_1+y_2+y_3)+(C_1+C_2+C_3)=0,$$

将(8)代入,得

$$3Ax+3By+(C_1+C_2+C_3)=0,$$

即

$$Ax+By+\frac{C_1+C_2+C_3}{3}=0.$$

这就是所求三角形$P_1P_2P_3$的重心M的轨迹方程. 它是一条与已知三平行直线平行的直线.

注 例4与例5的解法,都是将动点M的坐标[(x,y)或(ρ,φ)]转移到题中给定的图形上的点的坐标,以间接地求得动点M的轨迹方程,这种方法通常叫做转移法或称代入法.

例 6 已知抛物线的顶点在坐标原点,对称轴的方向与x轴的负向一致,且焦点参数p等于双曲线$4x^2-9y^2-36=0$的焦点到渐近线的距离,求这抛物线的方程.

解 设所求抛物线的方程为

$$y^2=-2px,$$

而双曲线的焦点为$(\pm\sqrt{13},0)$渐近线为

$$2x\pm3y=0.$$

所以抛物线的焦点参数为

$$p=\frac{|\pm2\times\sqrt{13}|}{\sqrt{13}}=2,$$

于是得所求抛物线的方程为:

$$y^2=-4x.$$

例 7 一直线通过点$A(5,2)$且点$(-3,1)$到它的距离是4，求这直线的方程.

解 设通过点$A(5,2)$的直线方程为

$$y-2=k(x-5),$$

因为点$(-3,1)$到它的距离为4，所以有

$$\frac{|-8k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=4,$$

因此得

$$48k^2-16k-15=0,$$

由此解得

$$k=\frac{3}{4} \quad 或 \quad -\frac{5}{12},$$

于是所求直线的方程为

$$y-2=\frac{3}{4}(x-5)或\ y-2=-\frac{5}{12}(x-5),$$

即

$$3x-4y-7=0或5x+12y-49=0.$$

注 例 6 与例 7 两题都是已知所求曲线的类型，这时我们先设所求曲线的标准方程或一般方程（或已满足某一已知条件的曲线的标准方程或一般方程），然后再根据已知条件，求出所设方程中的参数（即待定系数），这种方法叫做*待定系数法*，待定系数法也是应用非常广泛的一种方法.

例 8 作方程$\rho^2=72\cos 2\varphi$的图形.

解 1）曲线与极轴的交点 设$\varphi=0$（或$\varphi=\pi$），那么$\rho=\pm 6\sqrt{2}$，所以曲线与极轴交于点$(\pm 6\sqrt{2},0)$. 又当$\varphi=\frac{\pi}{4}$时，$\rho=0$，即点$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$满足方程，所以曲线又过极点.

2) 曲线的对称性　当$(\rho,\ \varphi)$满足方程时，显然$(\rho, -\varphi)$，$(-\rho, -\varphi)$，$(-\rho, \varphi)$都满足方程，所以曲线关于极轴，过极点且垂直于极轴的直线以及极点都对称。

3) 曲线的存在范围　因为$|\cos 2\varphi| \leqslant 1$，所以$\rho^2 \leqslant 72$，或$|\rho| \leqslant 6\sqrt{2}$，因此曲线被包围在圆$\rho = 6\sqrt{2}$内。另一方面，由于方程的左端$\rho^2 \geqslant 0$，因此当$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3}{4}\pi$或$-\frac{3}{4}\pi < \varphi < -\frac{1}{4}\pi$时无对应的$\rho$的实数值，所以在$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3}{4}\pi$与$-\frac{3}{4}\pi < \varphi < -\frac{1}{4}\pi$部分无图形。

4) 描点绘图　求出ρ, φ的对应值，根据 2）与 3），我们只要考虑$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$，且$\rho \geqslant 0$的情况可以了，其余根据对称性画出（图1-12）。

φ	0	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$
ρ	8.46	7.86	7.1	6	0

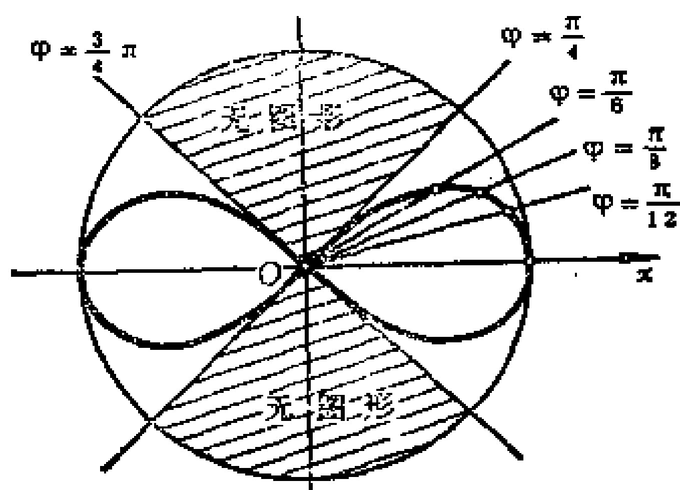


图 1-12

五、自我测验题

1．填空题

(1) 如果点P的直角坐标为$(-1,2)$,那么它关于x轴的对称点的坐标为________,关于y轴的对称点的坐标为________,关于原点的对称点的坐标为________,关于直线$x-y=0$的对称点的坐标为________.

(2) 如果点P的极坐标为$\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$,那么它关于极轴的对称点的坐标是________或________,关于极点的对称点的坐标是________或________,关于过极点且垂直于极轴的直线的对称点的坐标是________或________.

(3) 三角形ABC的顶点A、B的坐标分别为$(-1,2)$,$(1,5)$,三角形的重心W的坐标为$(1,3)$,那么这三角形的顶点C的坐标为________,AB边上的中线长为________.

(4) 以椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$在$x$轴上的顶点为双曲线的焦点,椭圆的焦点为双曲线的顶点的双曲线方程为________.

(5) 已知方程$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1$ $(a>b>0)$,当λ的值为________时表示椭圆,当λ的值为________时表示双曲线,这些椭圆与双曲线的公共焦点为________.

(6) 直线l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$与l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$相交的条件是________,平行的条件是________,重合的条件是________.

(7) 直线l_1: $x-2y+4=0$与l_2: $3x-y-7=0$的夹角是________,过l_1与l_2的交点且与直线l_3: $x+y+1=0$垂直的直线方程是________,原点到直线l_1的距离是________,原

点到直线 l_2 的距离是_________.

(8) 曲线的极坐标方程为 $\rho^2\sin 2\varphi=6$,它的直角坐标方程为_________，而直角坐标方程为 $(x^2+y^2)^{3/2}=x^2$ 的曲线的极坐标方程为_________.

2．已知 P 是矩形 $ABCD$ 所在平面上的任意一点，试用解析法证明

$$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

3．求到两定点 P_1 与 P_2 的距离之比为常数 k (>0) 的动点的轨迹.

4．三角形 ABC 底边的两个端点为 $B(-3,0)$,$C(3,0)$,顶点 A 在直线 $7x-5y-35=0$ 上移动,求这三角形重心的轨迹.

5．试证不论 k 为何值,直线 $(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 恒过一定点，并求出这一定点.

6．半径都为 a 的两个等圆，它们的圆心分别在两根互相垂直相交于 O 点的定直线上，且两圆都通过 O 点，过 O 点任作直线 l，分别交两圆于 A 与 B,试求线段 AB 中点的轨迹.

7．画出下列方程所表示的图形

(1) $y=|x|$;(2) $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\varphi}$.

第二章　平面曲线的参数方程

一、内容概述

本章主要介绍在直角坐标系下曲线的参数方程，它是第一章曲线方程的继续. 对于曲线及其参数方程，也有两个基本问题，即由曲线求其参数方程与由参数方程画出它的图形，但是在这里我们只介绍曲线的参数方程.

本章教材分平面曲线的参数方程，参数方程与普通方程的互化，以及参数方程的应用三个单元.

第一单元：平面曲线的参数方程，即教材的§2.1. 我们从斜抛运动这个实际例子出发，引进了曲线参数方程的概念，说明参数方程这个概念来自实际需要，然后通过圆的渐开线，摆线和圆的内旋轮线几个典型的例子说明曲线的参数方程的探求方法.

第二单元：参数方程与普通方程的互化，即教材的§2.2. 这一单元重点介绍了两种方程互化的方法，这就是由参数方程消去参数化为普通方程和由普通方程适当地选取参数化为参数方程. 由于两种不同形式的方程表示同一条曲线，因此在互化时，我们特别强调了两种方程的等价性. 参数方程与普通方程的互化是一个技巧性较高的问题，读者只有通过多练习、多思考，不断总结，才能真正的理解与掌握它.

第三单元：参数方程的应用，即§2.3. 根据曲线参数方程的特征，举例说明如何利用曲线的参数方程来解决与该曲线上的点的位置有关的一些几何问题，还介绍了适当引进参数，利用参数法来解题.

二、学 习 要 求

1. 掌握曲线的参数方程的概念，了解同一条曲线的参数方程，可以有多种不同的形式.

2. 基本掌握曲线的参数方程与普通方程的互化.

3. 熟悉几条常用曲线的参数方程及其图形.

4. 能初步应用曲线的参数方程来解与该曲线有关的一些几何题，并能利用参数法来解题.

三、学 习 辅 导

1. 曲线的参数方程

曲线的参数方程的定义 2.1.1 实际上是与曲线的普通方程的定义 1.2.1 是一致的. 这是因为当曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b) \tag{1}$$

时，由定义 2.1.1 知，对于每一个 $t(a\leqslant t\leqslant b)$，由(1)所确定的点 $M(x,y)$都在曲线Γ上，这就是所有满足方程(1)的点(x,y)都在曲线Γ上；反过来，曲线Γ上的任一点$M(x,y)$由定义 2.1.1 知，它都可由 t 的某一个容许值通过(1)式得到. 也就是说，曲线Γ上的点 $M(x,y)$的坐标满足方程(1).

曲线的参数方程(1)中有三个变数，其中两个即 x 与 y 表示曲线上动点的坐标，而另一个变数 t 叫做参数，它起着联系 x 与 y 的作用. 所谓参数是相对于 x 与 y 而言的，因此参数方程的一个特征是既有表示坐标的变数，也有坐标以外的其他变数，即参数. 参数方程的另一个特征是：坐标变数 x 与 y 分别可以表示成参数的函数，至于这个参数用什么字母来表示是无关紧要的.

在建立曲线的参数方程时，参数的选择是非常重要的. 同一

个问题，由于选取的参数不同，所得的参数方程的形式也就不一样．例如通过两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t, \\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty). \tag{2}$$

另一方面，如果把直线上的动点 $M(x,y)$看作$\overline{M_1M_2}$的定比分点，那么有

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \end{cases} \quad (\lambda\neq-1). \tag{3}$$

这时把λ看成是参数，方程(3) 就是由两点 M_1，M_2 决定的直线的参数方程了(除去点M_2)．方程(2)与(3)表示着同一条直线(除去点 M_2)，它们应该是等价的．事实上将(2)改写为

$$\begin{cases} x=(1-t)x_1+tx_2, \\ y=(1-t)y_1+ty_2, \end{cases} \tag{4}$$

作参数代换 $t=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$，那么由(4)[即(2)]就可化为(3)；由(3) 就可化为(4)[即(2)]了．

教材中的内旋轮线的两种不同形式的参数方程 (2.1-5) 与(2.1-5′)，也可以通过参数代换$\theta=\dfrac{b}{a}\varphi$ 而互化，从而它们是等价的．

2．参数方程与普通方程的互化

普通方程的名称是相对于参数方程而言的．这一单元主要介绍了下面三个问题：

1）化曲线的参数方程为普通方程．

化参数方程为普通方程，关键在于如何消去参数，但是怎样消去参数，确实是一个比较困难的问题，我们既没有一般的方法来消

参数，而且不一定所有的参数方程都能化成普通方程，但是本课程所介绍的参数方程都是比较简单的，因此在消参数时常常使用代入法或利用三角公式．应用代入消去法，对于一些特别简单的参数方程可直接代入．例如§2.2例1，如果参数方程稍许复杂一些，就要先作一些化简，然后再代入，如化参数方程

$$\begin{cases} x=t^2+t+1, \\ y=t^2-3t+2, \end{cases} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

为普通方程时，先把两式相减得

$$x-y=4t-1,$$

所以

$$t=\frac{x-y+1}{4},$$

再把它代入参数方程的第一式(或第二式)就得普通方程为

$$x=\left(\frac{x-y+1}{4}\right)^2+\left(\frac{x-y+1}{4}\right)+1,$$

即

$$x^2+y^2-2xy-10x-6y+21=0.$$

应用三角公式消参数也是如此，§2.2例2基本上是直接应用三角公式

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad 与 \quad \sec^2\theta-\mathrm{tg}^2\theta=1.$$

对于有些参数方程的消参数，也必须先作一些化简再应用三角公式，例如

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\cos 2\theta, \end{cases} (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

先把第二式化为

$$y=a(2\cos^2\theta-1),$$

再把第一式代入化简，即得它的普通方程为

$$2x^2-ay-a^2=0,(-a\leqslant x\leqslant a).$$

方程中附加了条件$-a\leqslant x\leqslant a$，这是因为$-1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$，由原参数方程的第一式知$-a\leqslant x\leqslant a$.

2）化曲线的普通方程为参数方程

把曲线的普通方程 $F(x,y)=0$ 化为参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，一般分下列三个步骤进行.

1° 根据普通方程 $F(x,y)=0$ 或它所表示的图形的特征选取适当的参数 t；

2° 找出 x,y 中的一个与参数 t 的关系，如 $x=\varphi(t)$[或 $y=\psi(t)$]；

3° 把这个关系式 $x=\varphi(t)$[或 $y=\psi(t)$] 代入 $F(x,y)=0$，然后解出 $y=\psi(t)$[或 $x=\varphi(t)$].

于是普通方程 $F(x,y)=0$ 就化为参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$$

了. 但是必须注意，由于选取的参数不同，关系式 $x=\varphi(t)$ 可以有不同的形式，从而 $y=\psi(t)$ 也就有所不同，因此一条曲线的参数方程也就有多种不同的形式. 在化普通方程为参数方程时，由于选取的参数不同，x 可以是 t 的代数函数，也可以是 t 的三角函数. 在代数函数中，显然有理函数比无理函数来得简单，因此怎样适当地选取参数 t，使得

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}$$

具有比较简单的形式，也就成为我们在化普通方程为参数方程时应注意的问题，但是要做到这一点，有时并不容易，也没有一定的法则可遵循. 在本课程的习题中，为了减少读者的困难，已预先给出了关系式 $x=\varphi(t)$[或 $y=\psi(t)$]. 但读者不要受此束缚，在解题时，多考虑几个为什么？

教材 §2.2 例 5 化椭圆的普通方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为参数方程，我们采用了两种不同的解法. 解法一是从椭圆的普通方程的特征

出发，利用三角函数公式，而迅速地把它化为参数方程（2.2-3）。解法二是从椭圆的图形特征出发，在椭圆上取点$(0,b)$，以它为中心作直线束 $y=tx+b$（t 为参数），由于直线与椭圆最多只有两个交点，所以用$y=tx+b$代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，在几何上就是求直线与椭圆的第二个交点，因而方程必然有解，而且不会出现无理式，从而得到了椭圆参数方程的另一种形式（2.2-3′）。由于它的表达式都是有理式，因此每当给定 t 的一个值时，即得一个有理点，而在原方程中，每给定 x 的值，其对应的 y 值却不能保证为有理数。因此利用描点法由方程来画它的图形时，参数方程有它优越的地方，从上分析，我们还可以知道直线束的中心除$(0,b)$外，可取椭圆上任意其他定点，例如$(0,-b)$，或$(a,0)$，或$(-a,0)$等，即可设 $y=tx-b$，或 $x=ty+a$，或 $x=ty-a$ 等都能达到化椭圆的标准方程为参数方程的目的。仿此，在化双曲线的普通方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

为参数方程时，可设 $x=ty+a\left[\text{或 } y=\frac{1}{t}(x-a)\right]$，从而得它的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a(a^2+b^2t^2)}{a^2-b^2t^2}, \\ y=\dfrac{2ab^2t}{a^2-b^2t^2}, \end{cases} \quad \left(t\neq\pm\frac{a}{b}\right).$$

作为练习，读者可用此方法化抛物线方程 $y=2px$ 为参数方程。

这里还要指出，在相同的坐标系下，虽然曲线的参数方程因参数选取不同而有多种不同的形式，但是消去参数后的普通方程却是一样的。

3）参数方程与普通方程互化时的等价性

在普通方程与参数方程互化时，必须注意不要把 x 与 y 的取值范围缩小或扩大，也就是说同一条曲线的普通方程与参数方程必须等价. 这里所说的两方程等价，就是指两方程的“解集”相等，这就是说，满足普通方程 $F(x,y)=0$ 的任意一组解 (x,y)，总能由参数方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 通过某一参数 t(在参数的允许值范围内)给出；反过来，对于任一参数 $t(a\leqslant t\leqslant b)$，由参数方程决定的 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 一定满足普通方程，即有 $F(\varphi(t),\psi(t))=0$ 成立. 例如前面我们把参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\cos2\theta\end{cases}\quad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

化为普通方程

$$2x^2-ay-a^2=0$$

时，就扩大了 x 与 y 的取值范围，因此我们必须附加条件 $-a\leqslant x\leqslant a$，这样就保证了两方程的等价.

在两种方程的互化时，切戒草率从事，而必须把所得的结果与原方程比较研究一下，看看它们是否等价，如果发现有问题，就必须重新考虑或补上附加条件，务必使所得的结果与原方程等价.

3. 参数方程的应用

曲线参数方程的特征是曲线上的动点的两个坐标 x 与 y 分别表示成参数 t 的函数，即 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$，当参数取定后，曲线上的点的位置也就被确定了，因此对于那些与曲线上的点的位置有关的一类几何题，常常应用曲线的参数方程来解. 应用曲线的参数方程，往往思路清楚，有时也比较方便. §2.3 的例 1，例 2 与例 3 它们充分说明了这个问题，也显示了参数方程的优越性. 下面几个习题也都可以象例 1，例 2 与例 3 那样利用曲线的参数方程来解(解法见补充例题).

1° 设 P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 上的点，但不是短轴的端

点，过P的切线与过点$B(0,b)$的切线交于Q，求三角形BPQ的垂心H的轨迹方程.

2° 设A,A'是等轴双曲线$x^2-y^2=a^2$的两顶点，P、P'为双曲线上关于双曲线实轴对称的两点，求证$AP\perp A'P'$，$AP'\perp A'P$.

3° 试证抛物线在顶点张直角的弦必过一定点.

我们还通过§2.3的例4与例5介绍了引进适当的参数，利用参数求轨迹方程的实例，这类习题也不少，而且往往是不易直接找到轨迹上动点的两个坐标之间的关系，这时引进适当参数（也可以不止一个），利用参数来求解就比较容易，这也是一种常用的求轨迹方程的方法，叫做*参数法*.

利用曲线的参数方程或应用参数法来解题，消参数是关键，从而要求我们比较熟练地掌握代数运算与三角运算，希望读者引起注意.

四、补 充 例 题

例 1 如图2-1，OB是机器上的曲柄，长为r，绕点O转动，AB是连杆，A在直线OX上往返运动，P是AB上的一点，$|PA|=a$，$|PB|=b$，当点B绕着点O作圆周运动时，求点P的轨迹的参数方程.

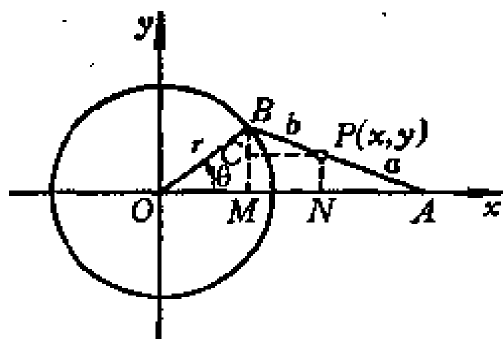


图 2-1

解 自点B、P向OX轴分别作$BM\perp OX$，$PN\perp OX$，又作$PC\perp MB$（图2-1），取$\angle AOB=\theta$为参数，并设P的坐标为(x,y)，那么

$$x=ON=OM+MN,$$

$$y=NP,$$

$$OM=r\cos\theta,$$

$$MN=CP=\frac{b}{a+b}MA=\frac{b}{a+b}\sqrt{|AB|^2-|MB|^2}$$

$$=\frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta},$$

$$NP=\frac{a}{a+b}\cdot MB=\frac{a}{a+b}r\sin\theta,$$

所以点P的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta+\dfrac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2-r^2\sin^2\theta},\\ y=\dfrac{ar}{a+b}\sin\theta,\end{cases}\quad(0\leqslant\theta\leqslant2\pi).$$

例 2 化旋轮线的参数方程

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a(1-\cos\theta),\end{cases}\quad(-\infty<\theta<+\infty)$$

为普通方程.

解 由 $y=a(1-\cos\theta)$得

$$\cos\theta=1-\frac{y}{a},$$

或
$$\theta=2k\pi\pm\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right),(k\text{是整数})\qquad(1)$$

又
$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}$$

$$=\pm\frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2},\qquad(2)$$

把(1),(2)两式代入 $x=a(\theta-\sin\theta)$便得旋轮线的普通方程为

$$x=a\left[2k\pi\pm\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)\right]\pm\sqrt{2ay-y^2}.$$

必须指出,如果在(1)中只取θ的主值,而$\sin\theta$仅取正号,那么

方程为

$$x=a\cdot\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)-\sqrt{2ay-y^2},$$

它只代表旋轮线的一段弧，与原方程不等价.

例 3 设P为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$上的点，但不是短轴的端点，过$P$的切线与过点$B(0,b)$的切线交于$Q$，求三角形$BPQ$的垂心$H$的轨迹方程(图2-2).

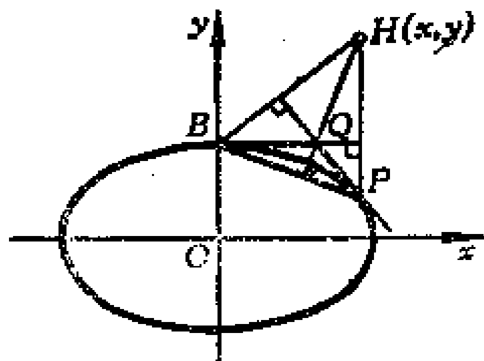


图 2-2

解 把椭圆的普通方程改写为参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta.\end{cases}\qquad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

设点P的坐标为$(a\cos\theta,b\sin\theta)$，那么过$P$的切线方程为

$$\frac{\cos\theta}{a}\cdot x+\frac{\sin\theta}{b}\cdot y=1^{①},$$

所以过三角形BPQ顶点B的高线BH的方程为

$$\frac{\sin\theta}{b}\cdot x-\frac{\cos\theta}{a}\cdot y=-\frac{b}{a}\cos\theta. \tag{3}$$

过顶点P的高线PH的方程为

$$x=a\cos\theta, \tag{4}$$

两高线(3)与(4)的交点即为垂心H，因此由(3)，(4)两式消去参数θ即得H的轨迹方程. 为此将(4)改写为

$$\cos\theta=\frac{x}{a}, \tag{5}$$

(5)代入(3)，并注意到$x\neq0$，化简得

① 椭圆、双曲线、抛物线的切线公式见六年制重点中学高中数学课本《解析几何》(平面)第114页，人民教育出版社，1982年12月版.

$$\sin\theta=\frac{b(y-b)}{a^2}, \tag{6}$$

由(5)，(6)两式，利用公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2(y-b)^2}{a^4}=1,$$

即
$$a^2x^2+b^2(y-b)^2=a^4,$$

这就是垂心H的轨迹方程.

注 本题不应用参数方程也能解，但必须注意，如果设P的坐标为(x_0,y_0)，那么因为P在椭圆上，所以一定有$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，漏掉了这个条件本题就解不出了. 应用参数方程的好处是，不论取参数θ为何值，点$(a\cos\theta,b\sin\theta)$总在椭圆上.

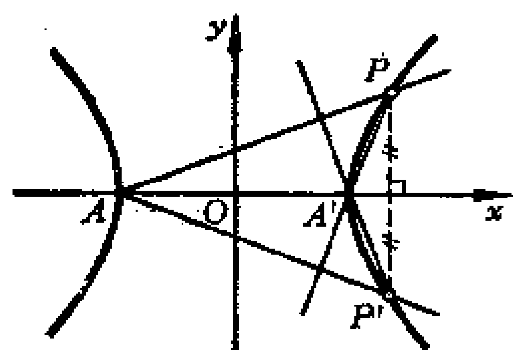


图 2-3

例 4 设A,A'是等轴双曲线$x^2-y^2=a^2$的顶点，P、P'为双曲线上关于双曲线实轴对称的两点. 求证：$AP\perp A'P'$，$AP'\perp A'P$(图 2-3).

证 把双曲线的方程改写为参数式

$$\begin{cases}x=a\sec\theta,\\ y=a\operatorname{tg}\theta,\end{cases}\qquad \left(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \theta\neq\pm\frac{\pi}{2}\right).$$

那么可设P与P'的坐标分别为$(a\sec\theta,a\operatorname{tg}\theta)$与$(a\sec\theta,-a\operatorname{tg}\theta)$，而两顶点为$A(a,0)$；$A'(-a,0)$，所以直线$AP$，$A'P'$，$AP'$，$A'P$的斜率分别为：

$$k_{AP}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta-1},\qquad k_{A'P'}=\frac{-\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta+1}$$

$$k_{AP'}=\frac{-\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta-1},\qquad k_{A'P}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta+1}$$

而
$$k_{AP}\cdot k_{A'P'}=\frac{-\text{tg}^2\theta}{\sec^2\theta-1}=-1,$$

$$k_{AP'}\cdot k_{A'P}=\frac{-\text{tg}^2\theta}{\sec^2\theta-1}=-1,$$

∴
$$AP\perp A'P',\ AP'\perp A'P.$$

例 5 试证抛物线在顶点张直角的弦必过一定点.

证 设抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt,\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

弦 P_1P_2 的端点坐标为 $P_1(2pt_1^2,2pt_1)$，$P_2(2pt_2^2,2pt_2)$，那么弦 P_1P_2 所在的直线方程为：

$$\frac{x-2pt_1^2}{2pt_2^2-2pt_1^2}=\frac{y-2pt_1}{2pt_2-2pt_1},$$

即
$$x-(t_1+t_2)y+2pt_1t_2=0,$$

∵
$$OP_1\perp OP_2,$$

∴
$$k_{OP_1}\cdot k_{OP_2}=\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{t_2}=-1,$$

即
$$t_1\cdot t_2=-1,$$

所以弦 P_1P_2 的方程为

$$x-(t_1+t_2)y-2p=0.$$

令 $t_1+t_2=-\lambda$，那么 P_1P_2 的方程可化为

$$(x-2p)+\lambda y=0,$$

这是以两直线 $x-2p=0$，$y=0$ 交点$(2p,0)$为中心的直线束，所以弦 P_1P_2 过定点$(2p,0)$.

注 证明弦 P_1P_2 过一定点的其他方法，可参考§1.2 例9.

例 6 等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的切线交圆 $x^2+y^2=a^2$ 于 P_1，P_2，试求弦 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程.

解法一 设双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的切线的斜率 k 为参数，那么切线的方程为

$$y=kx\pm\sqrt{k^2a^2-a^2},$$

即
$$y=kx\pm a\sqrt{k^2-1}. \tag{7}$$

过圆 $x^2+y^2=a^2$ 的中心 $O(0,0)$ 且垂直于切线的直线为

$$y=-\frac{1}{k}x. \tag{8}$$

直线(7)与(8)的交点即为弦 P_1P_2 的中点 P，从而由(7)，(8)两式消去参数 k，并化简即得所求的轨迹方程为

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

注 把方程 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 化为极坐标方程为 $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$，这是一条双纽线(图 2-4)。

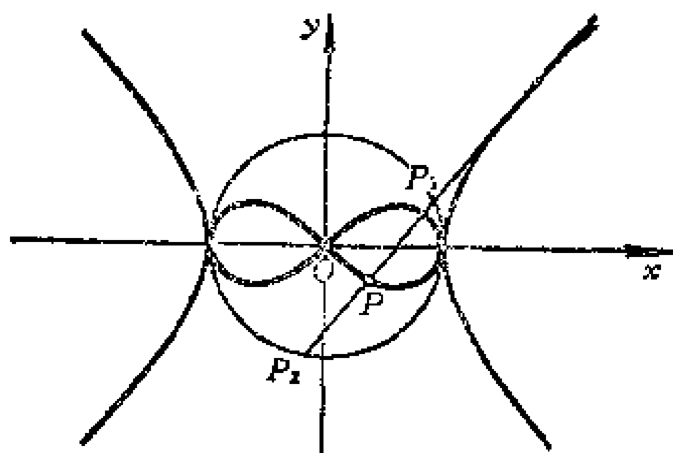


图 2-4

解法二 设等轴双曲线上的任一点 M 的坐标为 $(a\sec\theta, a\mathrm{tg}\theta)$，($\theta$ 为参数)，那么过点 M 的切线方程为

$$x\sec\theta-y\mathrm{tg}\theta=a,$$

即
$$x-y\sin\theta=a\cos\theta. \tag{9}$$

而过 $O(0,0)$ 垂直于切线(9)的直线为

$$x\sin\theta+y=0, \tag{10}$$

由(9)，(10)两式消去参数 θ 并化简得所求的轨迹方程为

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

五、自我测验题

1．填空题

(1) 过点(2,3)斜率为2的直线的参数方程是________．

(2) 写出下列曲线的参数方程(任写一种形式)

1° 圆　　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$________；

2° 椭圆　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$________；

3° 双曲线　　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$________；

4° 抛物线　　$y^2=2px$________．

(3) 写出下列参数方程(t,θ为参数)所表示曲线的普通方程．

1° $\begin{cases}x=t^2-3t+1\\y=t-1\end{cases}$ ________；

2° $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=2+\cos 2\theta\end{cases}$ ________；

3° $\begin{cases}x=a\cos^4\theta\\y=a\sin^4\theta\end{cases}$ $(a>0)$ ________；

4° $\begin{cases}x=2a\,\mathrm{tg}\theta\\y=2a\cos^2\theta\end{cases}$ $(a>0)$ ________．

(4) 参数方程$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta\\y=y_0+t\sin\theta\end{cases}$中，如果$\theta$为参数，而$t(t\neq0)$为定值，那么方程表示的曲线的普通方程为：________，方程的图形是________；如果t是参数，θ为定值，那么方程所表示的曲线的普通方程为________，方程的图形是________；

(5) 根据所给条件，写出下列方程所表示的曲线的参数方程

(t,θ 为参数).

1° $y^2=ax^2-bx^3$,设 $y=tx$,参数方程为________;

2° $x^2+y^2=9$,设 $x=3\cos\theta$,参数方程为________,如果设 $y=tx+3$,那么参数方程为________.

2. 如图 2-5,等腰直角三角形 ABC 中,$\angle ACB=90°$,$AC=BC=a$,顶点 A 在 y 轴上移动,顶点 C 在 x 轴上移动,求顶点 B 的轨迹方程.

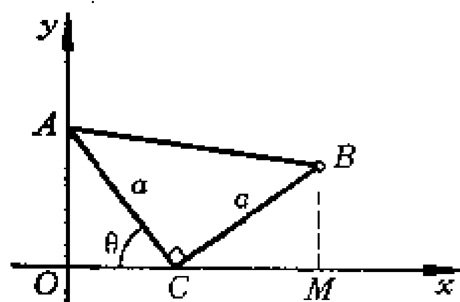


图 2-5

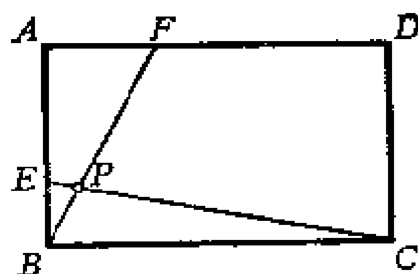


图 2-6

3. 试证:抛物线上任意四点组成的四边形不可能是平行四边形.

4. CD 是与椭圆长轴 $A'A$ 垂直的弦,求两直线 $A'C$ 与 AD 交点 P 的轨迹.

5. 已知矩形 $ABCD$ 的边 AB 与 AD 上各有一点 E 与 F(图 2-6)且 $BE:BA=AF:AD$,连结 CE 与 BF,交于点 P,求点 P 的轨迹.

第三章　一般二次曲线方程的研究

一、内容概述

本章首先介绍直角坐标变换，然后利用直角坐标变换来化简一般二次曲线方程，得出二次曲线的分类．最后引进二次曲线的“不变量”的概念，并利用它对二次曲线的类型与形状的判定作了讨论．

本章内容可分三个单元．

第一单元：平面直角坐标变换，即教材的§3.1．这一单元中介绍了三种坐标变换（移轴、转轴与一般坐标变换）的公式，并证明了经过直角坐标变换，平面上曲线方程的代数性或超越性以及代数方程的次数都是不变的．

第二单元：二次曲线方程的化简，类型的判定以及位置的确定，即教材中的§3.2．这也是本章的中心内容，这一单元通过研究坐标变换对二次方程系数的影响，找出其规律性，在此基础上就可适当地选择坐标变换把方程化简为过去已经研究过的标准方程，并作出它的图形．最后总结出如何根据方程的系数来判定它所表示的曲线类型，得出二次曲线仅有九种的结论．

第三单元：二次曲线的不变量及其应用，即教材的§3.3与§3.4．这一单元研究了二次曲线在直角坐标变换下的三个不变量 I_1, I_2, I_3 与一个半不变量 K_1，并利用它们来化简二次曲线的方程与判定二次曲线的类型与形状．

二、学习要求

1．理解坐标变换的意义，掌握坐标变换公式及其应用．

2. 了解移轴与转轴对二次曲线方程系数的影响，以及这两种坐标变换在化简二次曲线方程中所起的作用.

3. 能判别二元二次方程所表示的曲线的类型，并能熟练地化简二次曲线方程与作出它的图形.

4. 明确"不变量"的地位与作用，并能应用不变量来化简二次曲线的方程与判定二次曲线的类型与形状.

三、学 习 辅 导

1. 平面直角坐标变换

1) 我们知道，对于同一条曲线，由于坐标系选取的不同，它的方程也将不一样. 如果我们不改变图形在平面上的位置、形状与大小，而只是把坐标系作适当的改变，那么曲线上的点的坐标将改变，从而它们的方程也将会改变，因此通过坐标系的变换，可以使得曲线的方程简化而不改变图形在平面上的位置、形状与大小，这样将十分有利于我们通过曲线的方程用代数的方法来研究曲线的性质. 这就是我们为什么在本章一开始就研究坐标变换的原因.

2) 因为一般坐标变换总可以看成是由移轴与转轴合成，所以当我们研究了移轴与转轴后，一般坐标变换也就清楚了.

坐标变换公式中的旧坐标与新坐标是两个相对的概念，不能绝对化. 例如移轴公式

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases} \tag{3.1-1}$$

其中 (x,y) 是平面上的任意点 P 的旧坐标，而(x',y') 是它的新坐标，(x_0,y_0)是新坐标系 $O'\text{-}x'y'$ 的原点 O' 关于旧坐标系的坐标. 如果我们把 $O'\text{-}x'y'$ 看成是旧坐标系. 把 $O\text{-}xy$ 看成是新坐标系，那么新坐标系 $O\text{-}xy$ 的原点 O 对旧坐标系 $O'\text{-}x'y'$ 的坐标将是$(-x_0,-y_0)$(见教材图 3-2)，这时的移轴公式将是

$$\begin{cases}x'=x+(-x_0),\\ y'=y+(-y_0),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x'=x-x_0,\\ y'=y-y_0,\end{cases}$$

它就是(3.1-1′)，这也是移轴(3.1-1)的逆变换公式(3.1-1′)的另一种解释．对于转轴公式(3.1-2)与(3.1-2′)也有类似的解释，这在教材中已说清楚了．

3）本单元最后证明的定理 3.1.1，即曲线方程的代数性或超越性，以及代数方程的次数都是曲线的固有性质，它们与坐标系的选择无关，它不仅是曲线分类的基础，也是我们今后利用坐标变换化简二次曲线方程的理论基础．

2．二次曲线方程的化简、类型的判定以及位置的确定

1）利用移轴可以化简缺 xy 项的二次曲线的方程，化简的关键是找到恰当的移轴公式．我们常用的方法有配方法与代入法，教材 § 3.2 的例 1 化简曲线方程

$$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0,$$

使用的是配方法，下面再用代入法解一遍．设

$$x=x'+x_0,\qquad y=y'+y_0,$$

代入原方程并整理得

$$4x'^2+9y'^2+8(x_0-5)x'+18(y_0+2)y'+4x_0^2$$
$$+9y_0^2-40x_0+36y_0+100=0,$$

令

$$\begin{cases}x_0-5=0,\\ y_0+2=0,\end{cases}$$

解这方程组得 $x_0=5$，$y_0=-2$，代入上式即得通过移轴

$$\begin{cases}x=x'+5,\\ y=y'-2,\end{cases}$$

后的新方程为

$$4x'^2+9y'^2-36=0,$$

即

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

在应用配方法时必须注意，应分别先对有关 x 的项与 y 的项进行集项，然后分别把 x^2 与 y^2 项的系数括出来再进行配方，也就是象例 1 那样进行．如果把上式配方成下列形式

$$(2x-10)^2+(3y+6)^2=36,$$

在这里是不正确的，因为如果令

$$x'=2x-10, \qquad y'=3y+6,$$

即

$$x=\frac{1}{2}(x'+10), \quad y=\frac{1}{3}(y'-6),$$

那么这个变换就不是直角坐标变换的移轴了．

2）对于含有 xy 项的二次曲线方程的化简，必须应用转轴，因为只有通过转轴才能使新方程中不含交叉项．这时转轴的角度 α 决定于公式

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}},$$

在这里要说明一下，我们为什么不用 $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$，这是因为当 $a_{11}=a_{22}$ 时，$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$ 没有意义，而 $\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=0$ 完全可以决定旋转角 α，而当 $a_{12}=0$ 时，虽然 $\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$ 也无意义，但这时方程中不含交叉项，我们只要通过移轴就能化简方程，而根本用不到转轴．

由公式

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2\, a_{12}}$$

变形可得

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2\, a_{12}},$$

或

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0.$$

因为这个二次方程的判别式

$$\Delta = \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}\right)^2 + 4 > 0$$

所以它有两个不等的实根 $\operatorname{tg}\alpha_1$ 与 $\operatorname{tg}\alpha_2$，因此在 $(0,\pi)$ 间有两个旋转角 α_1 与 α_2，通过转轴都能化简二次曲线的方程，使它不含交叉项．另一方面由一元二次方程的根与系数的关系知

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = -1,$$

所以 α_1 与 α_2 仅相差$\frac{\pi}{2}$，因此在这两种转轴中，横坐标轴与纵坐标轴的位置恰好对调．

3）在定理 3.2.1 的证明中，当 $a'_{11}a'_{22} = 0$ 时，我们在假定 $a'_{11} = 0, a'_{22} \neq 0$ 的情况下证明的，从而得简化方程

$$\text{(II)}\quad a^*_{22}y^{*2} + 2\, a^*_{13}x^* = 0, \qquad a^*_{22}a^*_{13} \neq 0$$

或

$$\text{(III)}\quad a^*_{22}y^{*2} + a^*_{33} = 0, \qquad a^*_{22} \neq 0.$$

如果设 $a'_{11} \neq 0$，$a'_{22} = 0$，那么这时有

$$a'_{11}x'^2 + 2\, a'_{13}x' + 2\, a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

1° 如果 $a'_{23} \neq 0$，配方得

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + 2\, a'_{23}\left(y' + \frac{a'_{11}a'_{33} - a'^2_{13}}{2\, a'_{11}a'_{23}}\right) = 0$$

再作移轴

$$\begin{cases} x' = x^* - \dfrac{a'_{13}}{a'_{11}}, \\ y' = y^* - \dfrac{a'_{11}a'_{33} - a'^2_{13}}{2\,a'_{11}a'_{23}}. \end{cases}$$

并令 $a'_{11} = a^*_{11}$，$a'_{23} = a^*_{23}$.

得简化方程为

$$(\text{II}')\quad a^*_{11}x^{*2} + 2\,a^*_{23}y^* = 0,\quad (a^*_{11}a^*_{23} \neq 0).$$

2° 如果 $a'_{23} = 0$，那么配方得

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} = 0$$

作移轴

$$\begin{cases} x' = x^* - \dfrac{a'_{13}}{a'_{11}}, \\ y' = y^*. \end{cases}$$

并令 $\qquad a'_{11} = a^*_{11}, \qquad a'_{33} - \dfrac{a'^2_{13}}{a'_{11}} = a^*_{33}$,

得简化方程为

$$(\text{III}')\quad a^*_{11}x^{*2} + a^*_{33} = 0.$$

简化方程(II′)与(II)，(III′)与(III)，看上去似乎不一致，但如果我们再作一次旋转角为$\dfrac{\pi}{2}$的转轴，即

$$\begin{cases} x^* = -y^{**}, \\ y^* = x^{**}. \end{cases}$$

那么(II′)与(III′)将分别化成(II)与(III)的形式

$$a^{**}_{22}y^{**2} + 2\,a^{**}_{13}y^{**} = 0,\qquad a^{**}_{22}a^{*}_{13} \neq 0,$$

(其中 $a^{**}_{22} = a^*_{11}$，$a^{**}_{13} = a^*_{23}$)

与

$$a^{**}_{22}y^{**2} + a^{**}_{33} = 0,\qquad a^{**}_{22} \neq 0,$$

(其中 $a^{**}_{22} = a^*_{11}$，$\qquad a^{**}_{33} = a^*_{33}$).

因此我们总可以认为无心二次曲线的简化方程(略去星号)，为

$$a_{22}y^2+2a_{13}x=0,\qquad a_{22}a_{13}\neq 0.$$

而线心二次曲线简化方程(略去星号)为

$$a_{22}y^2+a_{33}=0,\qquad a_{22}\neq 0.$$

4) 二次曲线的类型可按其中心分类或按其二次项系数所成的判别式 $I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ 来分类,今分别列表如下.

表 一

方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

条 件	类 型	简化方程	一般情形	特殊情形
$\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{12}}{a_{22}}$	中心二次曲线	$a_{11}^*x^{*2}+a_{22}^*y^{*2}+a_{33}^*=0$ $(a_{11}^*a_{22}^*\neq 0)$	椭圆,双曲线	虚椭圆,点,两相交直线
$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$	无心二次曲线	$a_{22}^*y^{*2}+2a_{13}^*x^*=0$ $(a_{22}^*a_{13}^*\neq 0)$	抛物线	
$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$	线心二次曲线	$a_{22}^*y^{*2}+a_{33}^*=0$ $(a_{22}^*\neq 0)$	两平行直线	两平行虚直线,两重合直线

表 二

方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

条 件	类 型	一般情形	特 殊 情 况
$I_2>0$	椭圆型	椭 圆	虚椭圆、点
$I_2<0$	双曲型	双曲线	两相交直线
$I_2=0$	抛物型	抛物线	两平行直线,两重合直线,两平行的虚直线

5) 通过转轴与移轴,把一般二次曲线方程进行化简,再根据化简后的方程进行作图. 在作图时,为了防止把图形画错,必须进

行检验，例如教材§3.2的例4，把二次曲线方程 $x^2+4xy+4y^2+12x-y+1=0$ 通过转轴与移轴化简后得 $x''^2=\sqrt{5}y''$，然后根据这个方程作图，但所画的图是否正确，必须进行检验．检验的方法是根据原方程求出曲线上的几个特殊点，一般取与原坐标轴的交点，看看所画的曲线是否通过这几个特殊点．在这里因为曲线 $x^2+4xy+4y^2+12x-y+1=0$ 与 x 轴交于点 $(-0.35,0)$ 与 $(-11.65,0)$，而与 y 轴不相交，于是可知所画的抛物线（教材图3-7）大体上无错误．

3．二次曲线的不变量及其应用

1）二次曲线的三个不变量 I_1、I_2、I_3 以及半不变量 K_1，完全可以刻划二次曲线的类型，形状与大小①．由不变量来判别二次曲线的类型与形状如表三：

表　三

<table>
<tr><th colspan="2">类型判别</th><th colspan="3">形状判别</th></tr>
<tr><td rowspan="5">$I_2\neq0$
中心二次曲线</td><td rowspan="3">$I_2>0$
椭圆型</td><td rowspan="2">$I_3\neq0$</td><td>$I_1I_3<0$</td><td>椭圆</td></tr>
<tr><td>$I_1I_3>0$</td><td>虚椭圆</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3=0$</td><td>点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$I_2<0$
双曲型</td><td colspan="2">$I_3\neq0$</td><td>双曲线</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3=0$</td><td>两相交直线</td></tr>
<tr><td>$I_2=0$，$I_3\neq0$
无心二次曲线</td><td rowspan="4">$I_2=0$
抛物型</td><td colspan="2">$I_3\neq0$</td><td>抛物线</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$I_2=I_3=0$
线心二次曲线</td><td rowspan="3">$I_3=0$</td><td>$K_1<0$</td><td>两平行直线</td></tr>
<tr><td>$K_1>0$</td><td>两平行共轭虚直线</td></tr>
<tr><td>$K_1=0$</td><td>两重合直线</td></tr>
</table>

① 这里所说的二次曲线的大小，是指二次曲线的一些几何量的大小，例如椭圆或双曲线的两半轴长 a 与 b，抛物线的焦点参数 p 等．

对于二次曲线的大小，可以利用不变量通过计算决定曲线形状与大小的元素来确定．下面对决定椭圆、双曲线与抛物线形状与大小的元素计算如下：

1° 椭圆与双曲线的情形，决定椭圆与双曲线的形状与大小的是两半轴 a 与 b，因为椭圆与双曲线都是中心曲线．它们由不变量直接写出的简化方程为(略去撇号)

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0\ , \tag{1}$$

其中 λ_1 与 λ_2 是特征方程 $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ 的两根，叫做二次曲线的特征根．当(1)表示椭圆时($I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$)，它的两半轴为

$$a = \sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}},\qquad b = \sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}}.$$

特别地，当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时，曲线为圆，它的半径 $r = \sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}}$，当(1)表示双曲线时，($I_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$)，不妨设 $-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} > 0$，$\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} > 0$，它的实半轴与虚半轴分别为

$$a = \sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}},\qquad b = \sqrt{\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}}.$$

2° 抛物线的情形．决定抛物线的形状、大小的是它的焦点参数 p，而抛物线由它的不变量写出的简化方程为

$$I_1 y^2 \pm 2x\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} = 0\ ,$$

所以抛物线的焦点参数为

$$p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}.$$

由上而知，不变量更能深刻地反映方程与曲线的关系，因此找

出不变量，就显示出我们对形与数的结合提高到了一个新的认识.

2）定理3.4.1指出，利用不变量，中心二次曲线的简化方程

$$a_{11}^* x^{*2} + a_{22}^* y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0 \tag{2}$$

可以写成

$$\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0, \tag{3}$$

这里的 λ_1 与 λ_2 是特征方程 $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ 的根，即二次曲线的特征根，这里的两个特征根哪一个是 λ_1，哪一个是 λ_2，一般说来，可以任意选取，其中一个根取作 λ_1，另一个根就是 λ_2，也就是说中心二次曲线的简化方程有着两种形式，即除(3)外，还有

$$\lambda_2 x^{*2} + \lambda_1 y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0. \tag{4}$$

但是如果再作一次旋转角为$\frac{\pi}{2}$的转轴

$$\begin{cases} x^* = -y^{**}, \\ y^* = x^{**}, \end{cases}$$

使得 x^{**}轴与 y^*重合，y^{**}轴与 x^* 轴重合，那么(4)变为

$$\lambda_2 y^{**2} + \lambda_1 x^{**2} + \frac{I_3}{I_2} = 0, \tag{5}$$

即
$$\lambda_1 x^{**2} + \lambda_2 y^{**2} + \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

它就是(3)的形式. 因此，特征根的两种不同的选取所得的简化方程(3)与(4)的 x^{*2} 项与 y^{*2} 的系数恰好对调，而两方程所在的坐标系的坐标轴的名称也恰好对调，即(3)所在的坐标系的 x^* 轴即为(4)所在的坐标系的 y^* 轴，而(3)的 y^* 轴恰好为(4)的 x^* 轴. 因此，对于中心二次曲线来说，它的简化方程总可以认为是(3).

例如教材§ 3.2 的例5，即化简二次曲线方程

$$x^2-xy+y^2+2x-4y=0,$$

现在利用不变量来求它的简化方程，因为

$$I_1=1+1=2,$$

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{4},\quad I_3=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-3.$$

所以特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}=0,$$

即
$$4\lambda^2-8\lambda+3=0,$$

或
$$(2\lambda-1)(2\lambda-3)=0.$$

因此特征根为

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\quad \lambda_2=\frac{3}{2}.$$

而
$$\frac{I_3}{I_2}=\frac{-3}{\frac{3}{4}}=-4,$$

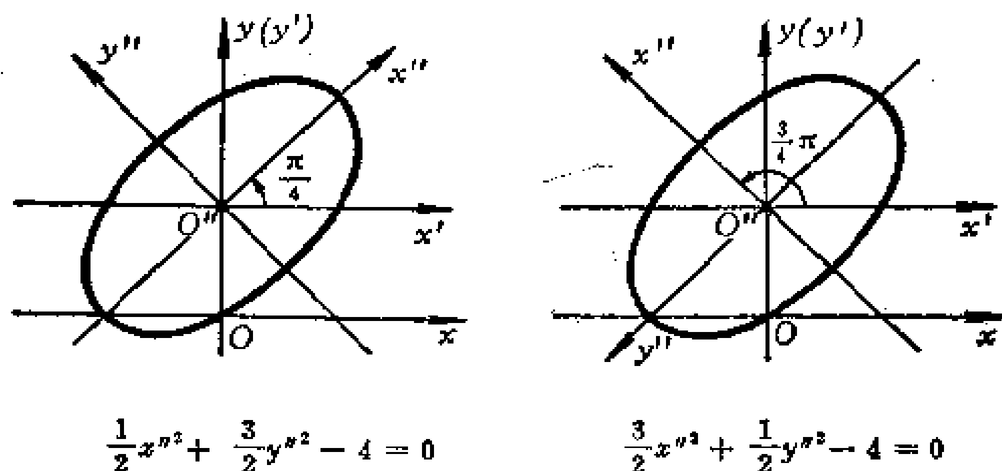
于是这个中心二次曲线的简化方程为

$$\frac{1}{2}x''^2+\frac{3}{2}y''^2-4=0, \tag{6}$$

或
$$\frac{3}{2}x''^2+\frac{1}{2}y''^2-4=0, \tag{7}$$

其中(6)式与§ 3.2 例 5 解法的结果完全一致，如果把它再作旋转角为$\frac{\pi}{2}$的转轴，也就是将横轴与纵轴交换位置，那么它就变成形式为(7)的简化方程. 另一方面，如果在§ 3.2 的例5 的解法中，旋

转角不取$\frac{\pi}{4}$，而取$\frac{3}{4}\pi$，那么转轴后的简化方程就是(7)，因此当中心二次曲线的简化方程x''^2项与y''^2项前的系数交换，把两种情况的图形画出来仅仅是两坐标轴的名称交换而已(图 3-1)。



$\frac{1}{2}x''^2+\frac{3}{2}y''^2-4=0$　　　$\frac{3}{2}x''^2+\frac{1}{2}y''^2-4=0$

图 3-1

四、补 充 例 题

例 1 试证任意两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)经过坐标变换后，距离公式$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$不变。

证 设坐标变换公式为

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+x_0,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+y_0,\end{cases}$$

点(x_1,y_1)与(x_2,y_2)的新坐标为(x_1',y_1')，(x_2',y_2')，那么

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\ &=[(x_2'\cos\alpha-y_2'\sin\alpha+x_0-x_1'\cos\alpha+y_1'\sin\alpha-x_0)^2+\\ &\quad+(x_2'\sin\alpha+y_2'\cos\alpha+y_0-x_1'\sin\alpha-y_1'\cos\alpha-y_0)^2]^{\frac{1}{2}}\\ &=\sqrt{[(x_2'-x_1')\cos\alpha-(y_2'-y_1')\sin\alpha]^2+[(x_2'-x_1')\sin\alpha+(y_2'-y_1')\cos\alpha]^2}\\ &=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}.\end{aligned}$$

注 本题也可分别证明在移轴与转轴下不变，从而得出在一般坐标变换之下也不变的结论。

例 2 利用坐标变换化简下列二次曲线的方程，写出坐标变

换公式，并作出它们的图形.

(1) $x^2+2xy+y^2-5x-3y-2=0$;

(2) $5x^2+6xy+5y^2+22x-6y+21=0$.

解 (1) 因为 $I_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$,所以曲线为非中心二次曲线,先转轴,设旋转角为 α ,那么

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1-1}{2}=0,$$

所以可取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,从而 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此转轴公式为

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \end{cases} \tag{1}$$

代入原方程化简整理得

$$2x'^2-4\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'-2=0,$$

利用配方把上式改写为

$$2(x'-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}(y'-3\sqrt{2})=0.$$

再作移轴

$$\begin{cases} x'=x''+\sqrt{2}, \\ y'=y''+3\sqrt{2}, \end{cases} \tag{2}$$

曲线方程化为

$$2x''^2+\sqrt{2}y''=0, \tag{3}$$

或

$$x''^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y''. \tag{4}$$

这是一条抛物线.

将(2)代入(1)得把原方程化为方程(3)的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y''-2\sqrt{2}), \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y''+4\sqrt{2}). \end{cases}$$

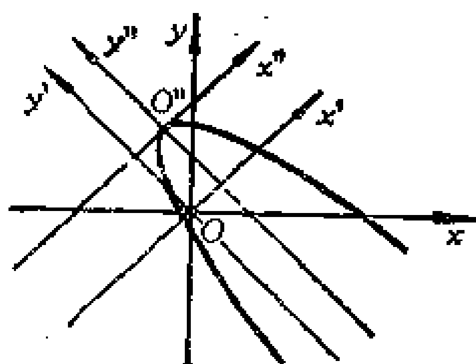


图 3-2

为了画出原方程的图形，在 xOy 坐标平面上画出 x'' 轴，y'' 轴，然后在 O''-$x''y''$ 坐标系下根据方程 $x''^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}y''$ 画出它的图形，即为原方程的图形(图 3-2)。

最后要检验一下所画图形是否正确，为此来求曲线上的几个特殊点，在原方程中令 $y=0$，解得 $x=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$，令 $x=0$，解得 $y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$，因此曲线与原坐标轴交于四点，它们的坐标是 $\left(\frac{5\pm\sqrt{33}}{2},0\right)$，$\left(0,\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right)$，或取坐标的近似值(5.4,0)、(−0.4,0)，(0,3.6)，(0,−0.6)，观察所画曲线通过这四点，从而可以断定所画图形大体上是正确的。

(2) $I_2=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=16\neq0$，曲线为中心二次曲线，为了方便，可以先移轴. 为此求曲线的中心. 解中心方程组，

$$\begin{cases} 5x+3y+11=0, \\ 3x+5y-3=0, \end{cases}$$

得 $$x=-4,$$

作移轴
$$\begin{cases}x=x'-4,\\ y=y'+3,\end{cases}$$

曲线的方程化为：

$$5x'^2+6x'y'+5y'^2-32=0 \tag{5}$$

再作转轴，使旋转角 α 满足

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{5-5}{6}=0,$$

所以可取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，从而转轴公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y''),\\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y''),\end{cases}$$

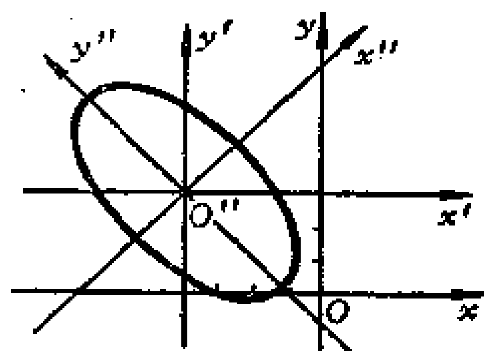


图 3-3

代入方程(5)得

$$8x''^2+2y''^2-32=0,$$

即
$$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''^2}{16}=1.$$

这是椭圆，它的图形如图 3-3 所示.

检验 在原方程中令 $x=0$，得 $5y^2-6y+21=0$，此方程无实数解，所以曲线与 y 轴不相交，再令 $y=0$，得 $5x^2+22x+21=0$，解得 $x=-1.4$ 或 -3，所以曲线与 x 轴交于点 $(-1.4,0)$ 与 $(-3,0)$，所画图形大体上正确.

例 3 证明：方程 $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$ 表示抛物线，并求出它的焦点参数 p.

证

$$\because\quad I_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\quad I_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -10\\ 2 & 4 & 5\\ -10 & 5 & -50\end{vmatrix}=-625\neq 0,$$

$\therefore$ 方程表示抛物线.

又 $\because$ $I_1 = 1 + 4 = 5$,

$\therefore$ $p = \sqrt{-\dfrac{I_3}{I_1^3}} = \sqrt{\dfrac{625}{125}} = \sqrt{5}$.

注 因为二次曲线的不变量完全可以刻划曲线的形状与大小，所以对于一般二次曲线的某些几何量，利用它的不变量来计算是最方便的. 对于下面的一类习题，我们都可以用这种方法来解.

1° 证明中心二次曲线 $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ 的两轴长分别为

$$\sqrt{\left|\frac{d}{a+h}\right|} \quad 与 \quad \sqrt{\left|\frac{d}{a-h}\right|}.$$

2° 设二次方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

表示两条平行直线，证明这两条直线间的距离是

$$d = \sqrt{-\frac{4K_1}{I_1^2}}$$

3° 证明方程 $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ 表示双曲线，并求出它的实半轴与虚半轴的长.（答：$a = 3$，$b = 6$）.

五、自我测验题

1. 填空题

(1) 平移坐标轴，使新原点为 $O'(-1,3)$，那么旧坐标为 $(-3, 1)$ 与 $(0,0)$ 的点的新坐标分别为________与________，曲线 $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 5 = 0$ 在新坐标系中的方程为________

(2) 在旋转角为 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 的转轴下，新坐标为 $(-2, 1)$ 与 $\left(3\sqrt{2}, -\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)$ 的点的旧坐标分别为________与________，曲线

$xy=6$ 在新坐标系中的方程为________.

(3) 已知二次曲线的方程为

$$F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$
$$+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$

i) 在移轴 $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$ 下二次曲线方程系数的变换规律为________

ii) 当旋转角 α 满足公式________时的转轴，二次曲线的新方程将不含交叉项.

(4) 二次曲线 $x^2-2xy+y^2-8x+16=0$ 的三个不变量为 $I_1=$________, $I_2=$________, $I_3=$________，一个半不变量 $K_1=$________, 二次曲线的特征方程为________, 特征根为________.

(5) 中心二次曲线 $3x^2-4xy+6y^2-8x-4y+3=0$ 的中心为________，线心二次曲线 $4x^2-4xy+y^2+6x-3y+2=0$ 的中心直线的方程为________.

(6) 二次曲线 $2x^2+axy+4y^2-7x+y+3=0$ 当 a 的值取________时为椭圆型曲线，a 取________时为双曲型曲线，a 取________时为抛物型曲线.

(7) 方程 $x^2+4xy+my^2-3x+ny=0$, 当 $m=$________, $n=$________时表示两条平行直线.

2．求抛物线 $2y^2+5x+12y+13=0$ 的焦点坐标与准线方程.

3．证明二次曲线

$$4x^2-12xy+9y^2+20x-30y-11=0$$

表示两平行的直线，并求它们之间的距离.

4．已知方程 $x^2-2xy\cos 2\theta+y^2=2a^2(a\neq 0)$，当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，它表示什么曲线；当 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时，它又表示什么曲线？

5．已知方程 $x^2-4\lambda x+4y+8\lambda-12=0$,

(1) 证明：无论 λ 取何实数，方程表示的曲线都是过一定点的抛物线，并求出这个定点；

(2) 求这族抛物线的顶点的轨迹方程

6．作坐标变换，化简二次曲线方程

$$x^2+2xy+y^2-12x+4y+4=0,$$

并画出它的图形。

第四章　向量代数

一、内容概述

向量代数是学习空间解析几何的重要工具．本章介绍了向量代数的基本知识，在引进向量的定义及其表示法的基础上，重点介绍了向量的线性运算（向量的加法与数乘）和向量的乘法运算（向量的数量积、向量积、混合积与双重向量积），但本章暂不引入坐标，以便使读者能较好地掌握向量代数的基本内容，特别是有利于掌握向量的各种运算的规律．

本章内容分以下三个单元．

第一单元：向量的概念，即教材的§4.1．这一单元给出了向量的定义及其表示法，并介绍了反向量、向量的模、零向量、相等向量、自由向量、共线向量与共面向量等基本概念．

第二单元：向量的线性运算，即教材的§4.2，§4.3与§4.4．这一单元给出了向量的加（减）法与数乘的定义，并讨论了它们的运算规律．最后介绍了共线向量与共面向量，向量的分解的性质，并给出了利用向量的线性运算的性质去解几何问题的例子．

第三单元：向量的乘法运算，即教材的§4.5，§4.6，§4.7以及*§4.8．本单元首先给出了两向量的数量积与向量积的定义，指出了它们的物理背景与几何性质，并讨论了它们的运算规律，在此基础上介绍了三个向量的乘法，即混合积与双重向量积．这一单元还给出了向量的乘法运算在中学数学中应用的例子．

二、学习要求

1．理解向量的有关概念，掌握向量线性运算的法则及其运算

性质.

2．理解向量乘法运算的意义，熟悉它们的几何性质并掌握其运算规律.

3．能熟练地进行向量的各种运算，并能利用向量来解决一些几何问题.

三、学习辅导

1．向量的概念

向量不同于数量，它是既有大小，又有方向的另一种量，在几何中用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小(即向量的模)，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的始点与终点，分别叫做向量的始点与终点．所以在几何中所说的向量，就是指的有向线段.

向量的模是可以比较大小的，但方向却不能比较大小，因此对向量来说，“大于”或“小于”的概念是没有意义的，例如记号 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 就没有意义，而 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 是有意义的.

两个向量只有当他们的模相等，同时方向又相同，才能称它们相等．例如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，就意味着 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同．两个向量的相等只由它们的模与方向决定，而与它们的始点无关，这种向量叫做自由向量，在本课程中所谈的向量，都是指的自由向量．因此，在今后处理某些几何问题时，可以将向量任意平行移动.

如果我们对向量的模或方向给以某些特定的条件，就得出一些在特定条件下的向量，这些向量的概念，是向量代数中十分重要的基本概念，应很好掌握．例如：

1° 单位向量：就是模等于1的向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记做 $\boldsymbol{a}^0$.

2° 反向量：模相等，方向相反的两向量，叫做互为反向量，

$\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

3° 相等向量：前面已指出，模相等且方向相同的两向量叫做相等向量.

4° 零向量：模等于零的向量叫做零向量，记做 $\mathbf{0}$，零向量没有确定的方向.

5° 共线向量与共面向量：平行于同一直线的向量叫做共线向量，平行于同一平面的向量叫做共面向量.

2. 向量的线性运算

向量的加(减)法与数乘统称为向量的线性运算，对这部分的教材，有几点说明如下：

1) 关于向量加法的定义

几何中的向量加法是用几何作图来定义的，一般有两种方法，即三角形法则与平行四边形法则，我们这里采用的是三角形法则. 这种定义，对两向量共线时同样适用，而当两向量共线时，平行四边形法则却不适用. 但考虑到在处理某些问题时，平行四边形法则有它一定的优点，因此在教材中证明了当两向量不共线时，三角形法则与平行四边形法则是一致的.

2) 关于向量加法的运算规律的证明

因为向量的加法是用几何作图来定义的. 因此在证明加法的交换律与结合律时，自然要用几何作图法. 对于两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，加法的交换律仍然成立，证明如下：

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，由向量加法的定义通过作图可知

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|$.

从而

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，不妨设 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，同样由作图可知

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$,

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，

从而也有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

至于当 $|\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{b}|$ 时，显然加法的交换律仍然成立，

于是当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 仍成立.

3) 对于任意两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，不等式

$$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \qquad (1)$$

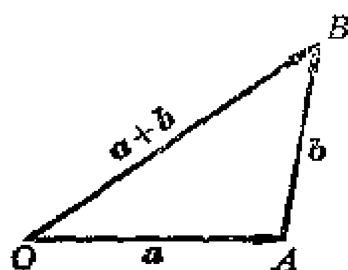


图 4-1

成立，我们证明如下：

当 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$ 时，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，那么由向量加法的定义 4.2.1 知，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 4-1），因为三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，所以

$$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，由作图易知

$$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

当 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 而 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，又有

$$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

于是(1)式成立.

4) 关于数乘运算规律的证明

对于数乘的四条运算规律的证明，前三条的证明，都是证明等式两边的向量的模相等，方向也相同，而第四条数乘的第二分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

由于它含有两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，因此根据两向量加法的定义，必然涉及到几何作图法. 它的证明是通过作图，利用相似三角形的性质来实现的.

5) 定理 4.4.1 与定理 4.4.2 十分重要，它们不仅是建立平面笛卡尔坐标系的基础，也是证明三点共线与四点共面的有力工具，

而定理 4.4.3是空间向量分解的唯一性定理，是建立空间笛卡尔坐标系的基础.

3．向量的乘法运算

1）两个向量的相乘

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相乘，有数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

1° 根据 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积与向量积的定义，分别有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

因此当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，也不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，这是与数的乘法不一样的．读者必须牢记这一点.

2° 两向量相乘消去律也不成立，即当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\nRightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},\tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\nRightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.\tag{3}$$

这是因为当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 时，由于

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\text{射影}_{a}\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\text{射影}_{a}\boldsymbol{c}$$

所以

$$\text{射影}_{a}\boldsymbol{b}=\text{射影}_{a}\boldsymbol{c},$$

而从图 4-2 容易看出，虽然有

$$|\boldsymbol{a}|\text{射影}_{a}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\text{射影}_{a}\boldsymbol{c},$$

即 $\qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$

但 $\qquad \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c},$

所以 $\qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\nRightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},$

对于(3)式，读者不难从图 4-3 可以看出，虽然由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 构成的平行四边形的面积等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 构成的平行四边形的面积，且$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$与$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\}$同为右旋向量组，因此

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},$$

但显然

$$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}.$$

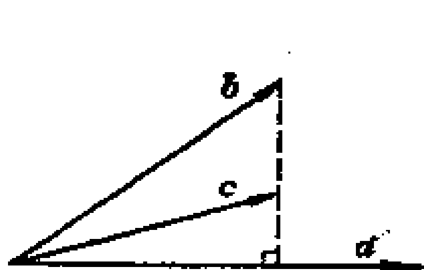


图 4-2

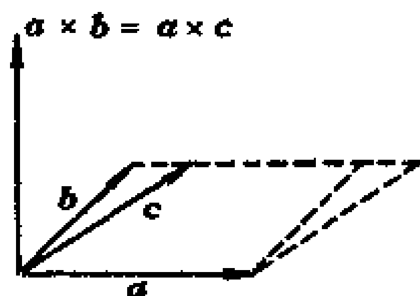


图 4-3

3° 由于向量是由大小与方向两个要素构成，所以任意两个向量相除是没有意义的.

4° 利用数量积可以解决几何中的长度与角度的问题，这是因为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}},$$

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

特别地，我们有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$

利用向量积可以解决几何中的有关面积问题，因为

$$\triangle ABC\text{ 的面积}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

此外，我们又有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}.$

5° 两向量的数量积，向量积与数的乘法比较如下表：

数的乘法	向量的数量积	向量的向量积
$ab=ba$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$
$a\cdot a=a^2$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|^2$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
$(a+b)c=ac+bc$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$
$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ $=\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2$	$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ $=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
$(ab)^2=a^2b^2$	$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$ $=\|\boldsymbol{a}\|^2\cdot\|\boldsymbol{b}\|^2\cdot\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$	$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2$ $=\|\boldsymbol{a}\|^2\cdot\|\boldsymbol{b}\|^2\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$
$ab=0\Rightarrow a=0$ 或 $b=0$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\nRightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

2) 三个向量的相乘

三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相乘，有混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与双重向量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

1° 混合积具有性质$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，因此书写混合积常略去乘法记号，而把混合积记做$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$或$(\boldsymbol{abc})$.

2° 混合积有一个十分重要的几何意义，这就是当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面时，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 的绝对值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 因此利用混合积可以解决几何中的体积问题. 例如以 P_1, P_2,P_3,P_4 为顶点的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3},\ \overrightarrow{P_1P_4})\right|.$$

对于三个非零向量，我们有

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0\Longleftrightarrow\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}\text{是右旋向量组},$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<0\Longleftrightarrow\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}\text{是左旋向量组},$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}.$$

因此，利用混合积可以判别四点是否共面，这是因为

$$P_1,P_2,P_3,P_4\text{共面}\Longleftrightarrow(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3},\ \overrightarrow{P_1P_4})=0.$$

3° 双重向量积的计算公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

可以把三个以上的向量相乘的问题归结为三个向量相乘，因此三个以上的向量相乘可不必讨论了.

四、补 充 例 题

例 1 如图 4-4 所示，在三角形 ABC 中，点 M, N是 AB 边上的三等分点，设 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，试求向量$\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CN}$对 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$

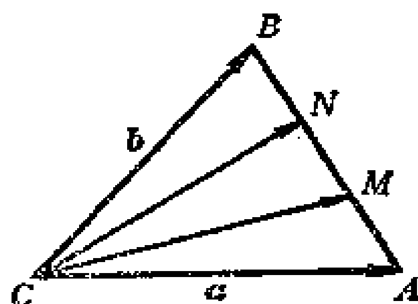


图 4-4

的分解式.

解法一 因为

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM},$$

但

$$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

所以

$$\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{3}.$$

同理

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}{3}.$$

解法二 因为

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB},\quad \overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NB},$$

应用教材的(4.3-9)式,可求得

$$\overrightarrow{CM}=\frac{\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{3},$$

$$\overrightarrow{CN}=\frac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{1+2}=\frac{\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}{3}.$$

例 2 试证明三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是：存在不全为零的实数 λ,μ,γ 使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，由定理 4.4.1，存在唯一的 x，使 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}$. 这时取 $\lambda=x$, $\mu=-1$, $\gamma=0$, 便有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$;

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，但 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，可取 $\lambda=1$, $\mu=\gamma=0$, 这时显然有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$;

如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，那么由定理 4.4.2，存在 x,y 使 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，这时可取 $\lambda=x,\mu=y,\gamma=-1$，便同样有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

充分性 设 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 λ,μ,γ 不全为零，这时不妨设 $\gamma\neq0$，从而得

$$\boldsymbol{c}=-\frac{\lambda}{\gamma}\boldsymbol{a}-\frac{\mu}{\gamma}\boldsymbol{b}.$$

于是，由定理 4.4.2 可知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

例 3 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3$，其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为三个不共面的向量，试证明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

证 设 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，于是有

$$\lambda(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+\mu(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3)+\gamma(-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{0},$$

即
$$(\lambda+3\mu-3\gamma)\boldsymbol{e}_1+(2\lambda-2\mu+10\gamma)\boldsymbol{e}_2+(-\lambda+2\mu-7\gamma)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为三个不共面的向量，于是由例 2 知，

$$\begin{cases}\lambda+3\mu-3\gamma=0,\\ 2\lambda-2\mu+10\gamma=0,\\ -\lambda+2\mu-7\gamma=0,\end{cases}$$

解得
$$\lambda:\mu:\gamma=3:(-2):(-1),$$

所以有
$$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

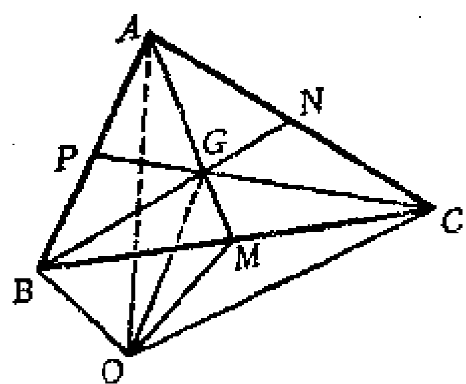


图 4-5

因此由例 2 知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面.

例 4 用向量法证明三角形的三中线交于一点.

证法一 设 M、N、P 分别为三角形 ABC 的三边 BC、CA、AB 上的中点(图 4-5),在中线 AM 上取点 G_1,使得 $AG_1=2G_1M$,并在三角形 ABC 所在的平面外任取一点 O,那么由教材的(4.3-9),得

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}}{1+2},$$

而 M 为 BC 之中点,所以又有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

因此

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

在中线 BN 与 CP 上分别取点 G_2 与 G_3,使得 $\overrightarrow{BG_2}=2\overrightarrow{G_2N}$ 与 $\overrightarrow{CG_3}=2\overrightarrow{G_3P}$;那么,同理可得

$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

所以

$$\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OG_3}.$$

从而三点 G_1, G_2, G_3 重合于点 G,因此三角形的三中线交于一点 G.

证法二 设 G_1 为中线 AM 上的任意一点,且 $\overrightarrow{AG_1}=\lambda\overrightarrow{G_1M}$;那么有

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OM}}{1+\lambda}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})}{1+\lambda},$$

即
$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}\overrightarrow{OC}. \quad (1)$$

再设 G_2 为中线 BN 上的任意点，且 $\overrightarrow{BG_2}=\mu\overrightarrow{G_2N}$，那么有

$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{G_2N}}{1+\mu}=\frac{\overrightarrow{OB}+\frac{\mu}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})}{1+\mu},$$

即
$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{\mu}{2(1+\mu)}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{OB}+\frac{\mu}{2(1+\mu)}\overrightarrow{OC}. \quad (2)$$

令 $\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}$，那么由于 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 不共面，所以由定理 4.4.3 得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+\lambda}=\dfrac{\mu}{2(1+\mu)},\\[2mm] \dfrac{\lambda}{2(1+\lambda)}=\dfrac{1}{1+\mu},\\[2mm] \dfrac{\lambda}{2(1+\lambda)}=\dfrac{\mu}{2(1+\mu)},\end{cases}$$

解得
$$\lambda=\mu=2.$$

因此两中线 AM 与 BN 交于一点 $G=G_1=G_2$，这点分中线以顶点为起点成 2:1，且向径为

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

同理可证得第三条中线 CP 也通过点 G，且点 G 分 CP 以 C 为起点成 2:1，因此三中线交于一点，且该点分三中线自顶点为起点成 2:1.

注 1 证法一利用了初等几何中三角形的中线性质，比较容易地证明了本题，而证法二的优点是不仅证明了三角形的三中线

交于一点，而且还证明了这一点分中线以顶点为起点成 2:1.

注 2 在空间任意取定一点 O 后，空间的任意一点 P 就与它的向径(即位置向量) $\overrightarrow{OP}$ 相对应，这样就把空间关于点的几何问题归结为向量的问题，从而我们可以通过向量的运算来证明几何问题.

例 5 设点 O，G，H 分别为三角形 ABC 的外心，重心，垂心．试证明 O，G，H 三点共线.

图 4-6

证 取三角形 ABC 的外心 O 为计算向径的始点，于是由例 4 知重心 G 的向径为

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \tag{3}$$

下面我们借助图形的几何性质求垂心 H 的向径 $\overrightarrow{OH}$. 如图 4-6，延长 BO 交三角形 ABC 的外接圆于 D，由于 $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$，可知 $\overrightarrow{DA}\,/\!/\,\overrightarrow{CH}$，由 $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CB}$，可得 $\overrightarrow{DC}\,/\!/\,\overrightarrow{AH}$，因此 $AHCD$ 为平行四边形，从而

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC},$$

所以 $$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC},$$

而 $$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD},$$

因此 $$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD},$$

但 $$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB},$$

所以 $$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \tag{4}$$

由(3)，(4)得 $$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG},$$

于是 $$\overrightarrow{OH}\,/\!/\,\overrightarrow{OG},$$

所以 O，G，H 三点共线.

例 6 用向量法证明：三角形三中线的平方和等于它的各边平方和的 $\frac{3}{4}$.

原书缺页

原书缺页

$$\lambda=\mu=0,$$

所以　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

证法三　用反证法. 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，由

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{m}_1=0,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{m}_2=0,$$

得　$\boldsymbol{m}_1\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\boldsymbol{m}_2\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

而 $\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为四个共面的向量，所以 $\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面，因此得

$$\boldsymbol{m}_1\,/\!/\,\boldsymbol{m}_2,$$

这与题设矛盾，所以 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

***例 9**　已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个不共面向量，

(1) 试证明：$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 不共面；

(2) 试求满足条件 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=l,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=m,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=n$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

解　(1) 因为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=[(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2\neq0,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 不共面，

(2) 因为 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 不共面，所以可设

$$\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

为求 λ，在等式两边同时与 $\boldsymbol{a}$ 作数量积，于是我们得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})+\mu(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+\gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}),$$

因此有

$$l=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

或

$$\lambda=\frac{l}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},$$

类似地可求得

$$\mu=\frac{m}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\qquad\gamma=\frac{n}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},$$

所以　$$\boldsymbol{x}=\frac{l}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\frac{m}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\frac{n}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

五、自我测验题

1．设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是两两不共线向量，试问下列等式是否成立？成立的用"√"表示，不成立的用"×"表示。

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$，（　）

(2) $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$，（　）

(3) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$，（　）

(4) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$，（　）

(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$。（　）

2．设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，试问下列推断是否正确？正确的用"√"表示，不正确的用"×"表示。

(1) 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，（　）

(2) 如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，（　）

(3) 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，那么 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，（　）

(4) 如果 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，（　）

(5) 如果 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。（　）

3．填空题

(1) 向量的______与______统称为向量的线性运算。

(2) 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$G$是三角形 ABC 的重心，那么 $\overrightarrow{OG}=$______。

(3) 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是______，三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是______

(4) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，那么 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立的充要条件是______；$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立的充要条件是______。

(5) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共面的三个向量，如果 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}=0$，那么 $\boldsymbol{r}=$______。

(6) 设 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是右旋向量组，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直，又知道 $|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3$，那么 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=$______。

(7) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为不共线的二个向量，如果$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$与$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$共线，那么 $k=$ ______

4. 设 E、F 分别为四边形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 的中点，O 为 EF 的中点，试证明：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$.

5. 设 OE 是以 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 为棱的平行六面体的对角线，OE 交平面 ABC 于点 M(图 4-8)，试用向量法证明 M 是三角形 ABC 的重心。

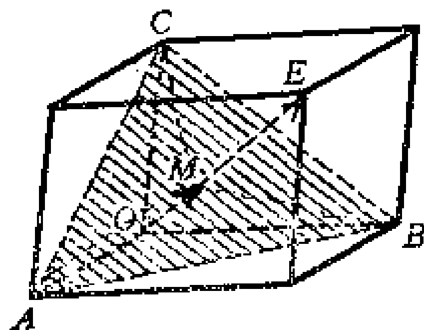


图 4-8

6. 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，试指出下列向量组中，哪些是右旋向量组？哪些是左旋向量组？哪些是共面向量组？并说明理由：

(1) $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\}$，　　(2) $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$，

(3) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$，　　(4) $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$，

7. 设 $\boldsymbol{r}_i\neq\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$，且 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$，试证明 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ 是两两垂直的单位向量，且$\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3\}$构成右旋向量组。

8. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个两两垂直的非零向量，试证明任意向量 $\boldsymbol{d}$ 可表示成

$$\boldsymbol{d}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{b}^2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}^2}\boldsymbol{c}。$$

第五章　空间直角坐标

一、内 容 概 述

本章首先介绍了空间直角坐标系，给出了向量的坐标(分量)与空间点的坐标的概念，从而使得向量的运算转化为其坐标间的数量的运算，空间的轨迹(曲面与空间曲线)也有了它的代数表示，即用方程(组)来表示空间点的轨迹(曲面与空间曲线).

本章内容可分两个单元.

第一单元：空间直角坐标系与向量运算的坐标表示，即教材的§5.1与§5.2．这一单元，从向量引进直角坐标系，建立了向量的坐标(分量)与空间点的坐标，给出了向量运算的坐标表示，从而使向量的运算转化为数的运算，把几何问题的讨论推进到可以计算的数量层面.

第二单元：曲面与空间曲线的方程，即教材的§5.3．这一单元在空间的点与有序三数组(x,y,z)之间的对应的基础上，把曲面与方程联系起来，空间曲线与方程组联系起来，给出了曲面与空间曲线方程的定义，并通过举例，初步介绍了如何来建立曲面与空间曲线的方程.

二、学 习 要 求

1．掌握空间直角坐标系的构成，以及向量与点的坐标的定义，并能熟练地用坐标进行向量的各种运算，牢固地掌握空间解析几何的几个基本公式（线段的定比分点的坐标，两点间的距离，三角形的面积，四面体的体积等计算公式），以及利用坐标判别三点共线、四点共面的条件与两向量交角的计算公式等.

2. 理解曲面与空间曲线方程的意义，并初步熟悉根据已知条件建立曲面或空间曲线的方程.

三、学 习 辅 导

1. 空间直角坐标系与向量运算的坐标表示

1) 空间直角坐标系

利用向量建立空间直角坐标系，教材中的定理 4.4.3 起了十分重要的作用. 对于空间任意点 P，它的向径 $\overrightarrow{OP}$（位置向量）对坐标向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的分解式为

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

这里 x, y, z 是被 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 唯一确定的，于是关于空间的点 P，向径 $\overrightarrow{OP}$ 与有序三数组 (x,y,z) 有着下面的关系.

$$P\longleftrightarrow\overrightarrow{OP}\longleftrightarrow(x,y,z).$$

这就是说，空间全体点的集合，与全体有序三数组的集合具有一一对应的关系. 这样，空间直角坐标系就可以建立起来了.

表 一

$\boldsymbol{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{x_2,\ y_2\ z_2\}$, $\boldsymbol{c}=\{x_3,\ y_3,\ z_3\}$ λ 为实数		
加(减)法	$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2\}$	
数　乘	$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1\}$	
数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
向量积	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$
混合积	$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$	$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 共面 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=0$

2) 向量运算的坐标表示

1° 引进了向量的坐标后，向量就可以用它的坐标(即有序三数组)来表示，这是向量的代数表示，前面用有向线段来表示向量，是向量的几何表示.

2° 向量运算的坐标表示如表一；

3° 空间解析几何的几个基本公式如表二：

表 二

四点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1,2,3,4)$	
$\overrightarrow{P_1P_2}$的定比分点的坐标	$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$
P_1与P_2间的距离 d	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
三角形 $P_1P_2P_3$ 的面积 Δ	$\Delta=\dfrac{1}{2}\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\rvert$ $=\dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}$
四面体 $P_1P_2P_3P_4$ 的体积 V	$V=\dfrac{1}{6}\lvert(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4})\rvert$ $=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}$ 的绝对值
三点 P_1, P_2, P_3 的共线条件	$\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$
四点 P_1, P_2, P_3, P_4 的共面条件	$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=0$
$\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 的夹角	$\cos\angle(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})=\dfrac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}}{\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{P_1P_3}\rvert}$ $=\dfrac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}}$

2. 曲面与空间曲线的方程

对于曲面与空间曲线的方程，有两点要说明：

1) 空间曲面方程的定义与平面曲线方程的定义相类似. 我们把曲面看成具有某种特征性质的空间点的轨迹，用方程 $F(x,y,z)=0$ 来表示. 从集合的观点来看，曲面就是满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的点 (x,y,z) 的集合.

2) 空间曲线一般方程的定义，要充分理解它的意义，这里强调用通过空间曲线 L 的任意两个曲面的方程来表示，即用通过空间曲线 L 的两个曲面方程联立起来表示，如

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

这两个曲面，除去曲线 L 上的点是它们的公共点之外，再也没有别的公共点；反过来，联立任意给定的两个曲面方程，它们可能不表示任何空间曲线，例如给定两个球面方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2+z^2=2$，方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}$$

不表示任何空间曲线. 从代数上来看，这是一个矛盾方程组，同时满足这两方程的解 (x,y,z) 是不存在的；从几何上来看，这是两个同心球，它们没有任何的公共点.

四、补充例题

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\{3,2,2\}$，$\boldsymbol{b}=\{18,-22,-5\}$，求与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直，且满足下列条件的向量 $\boldsymbol{c}$：(1) $\boldsymbol{c}$ 的模为 14，且与 Oy 轴交成钝角；(2) $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=49$，其中 $\boldsymbol{d}=\{2,1,-7\}$.

解 因为 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{c}\parallel(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，而

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 2 \\ 18 & -22 & -5 \end{vmatrix}=17\{2,3,-6\},$$

所以可设 $\quad c=\lambda\{2,3,-6\}=\{2\lambda,3\lambda,-6\lambda\}$,

(1) 由 $|c|=14$ 得

$$\sqrt{4\lambda^2+9\lambda^2+36\lambda^2}=14,$$

所以 $\quad |\lambda|=2$

又因为 c 与 Oy 轴交成钝角，所以

$$\cos\angle(c,j)=\frac{c\cdot j}{|c|}<0,$$

从而得 $\quad 3\lambda<0$,

即 $\quad \lambda<0$,

因此 $\quad \lambda=-2$,

于是 $\quad c=\{-4,-6,12\}$.

(2) 由 $c\cdot d=49$, 得

$$4\lambda+3\lambda+42\lambda=49,$$

所以 $\quad \lambda=1$,

于是 $\quad c=\{2,3,-6\}$.

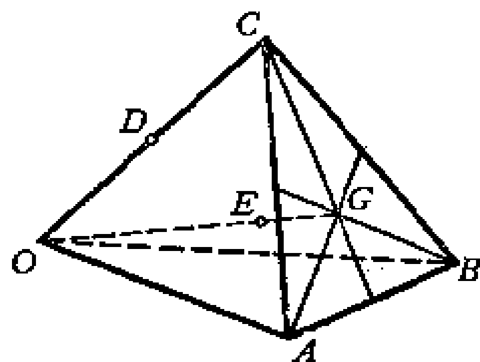


图 5-1

例 2 在四面体 $OABC$ 中，设 D 为棱 OC 的中点，G 是三角形 ABC 的重心，E 是 OG 上的点且 $\overrightarrow{OE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$，试用坐标法证明 A、B、D、E 四点共面(图 5-1).

证 以 O 为原点建立空间直角坐标系，并设顶点 A、B、C 的坐标分别为

$$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),$$

于是 OC 的中点 D 与三角形 ABC 的重心 G 的坐标分别为

$$D\left(\frac{x_3}{2},\ \frac{y_3}{2},\ \frac{z_3}{2}\right),\quad G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right),$$

而

$$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OG}=\left\{\frac{x_1+x_2+x_3}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{4},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{4}\right\},$$

所以E的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{4},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{4},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{4}\right),$$

从而

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\left\{\frac{x_3-2x_1}{2},\ \frac{y_3-2y_1}{2},\ \frac{z_3-2z_1}{2}\right\},$$

$$\overrightarrow{AE}=\left\{\frac{x_2+x_3-3x_1}{4},\ \frac{y_2+y_3-3y_1}{4},\ \frac{z_2+z_3-3z_1}{4}\right\},$$

因为

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-2x_1 & y_3-2y_1 & z_3-2z_1 \\ x_2+x_3-3x_1 & y_2+y_3-3y_1 & z_2+z_3-3z_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-2x_1 & y_3-2y_1 & z_3-2z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

(上面第二个行列式是由第一个行列式的第三行减去 第 二行得来的) 所以三 向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}$共面,即A,B,D,E四点共面.

例 3 试用向量法证明:如 果 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$, 那 么 有$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

分析 如果令$\boldsymbol{m}=\{x,y,z\}$,$\boldsymbol{n}=\{a,b,c\}$, 那么本例就转化为向量的形式:如果 $\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{n}^2=(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})^2$, 那么有 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$. 为此只要证明$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$即可.

证 令 $\boldsymbol{m}=\{x,y,z\}$,$\boldsymbol{n}=\{a,b,c\}$,由已知条件得

$$\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{n}^2=(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^2,$$

即 $$\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{n}^2-(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^2=0,$$

于是 $$(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})^2=\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{n}^2-(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})^2=0,$$

从而 $$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0},$$

所以 $$\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n},$$

因此 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

注 例3是一道代数题，但直接推证比较困难，我们通过构造向量$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$，把它转化为向量的形式，先用向量解决，再用坐标表示，从而比较简捷地证明了原命题. 这是向量在初等代数上的应用.

例 4 已知：$x^2+y^2+z^2=1, a^2+b^2+c^2=1$，求证

$$ax+by+cz\leqslant 1.$$

证 令$\boldsymbol{m}=\{a,b,c\}, \boldsymbol{n}=\{x,y,z\}$，那么由已知条件得

$$|\boldsymbol{m}|^2=\boldsymbol{m}^2=1, |\boldsymbol{n}|^2=\boldsymbol{n}^2=1,$$

于是有

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cdot\cos\angle(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}),$$

$$=\cos\angle(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\leqslant 1,$$

把$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$的坐标代入上式得

$$ax+by+cz\leqslant 1.$$

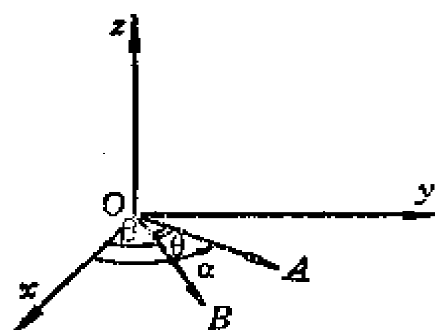


图 5-2

例 5 用向量法证明三角公式：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

证 如图5-2所示，在xOy平面内，设α角的终边是单位向量$\overrightarrow{OA}$，β角的终边是单位向量$\overrightarrow{OB}$，且$\theta=\angle(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

当$\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA},\boldsymbol{k}\}$是右手系时，如果把$\beta$角的终边按逆时针方向(从向量$\boldsymbol{k}$的终点观察)旋转$\theta$角，便得到一个终边和$\alpha$角的终边相同的角，因此

$$\alpha=\beta+\theta+2n\pi,$$

即 $$\alpha-\beta=2n\pi+\theta;\ (n\text{是某一个整数})$$

当$\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA},k\}$是左手系时，通过类似的分析可知，这时

$$\alpha=\beta-\theta+2n\pi,$$

即 $$\alpha-\beta=2n\pi-\theta,(n\text{是某一个整数})$$

所以在两种情况下都有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta.$$

另一方面，设$\overrightarrow{OA}=\{x,y,0\}$，由三角函数的定义可知

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OA}|}=x,\quad \sin\alpha=\frac{y}{|\overrightarrow{OA}|}=y,$$

从而 $$\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha,\sin\alpha,0\},$$

同理可得

$$\overrightarrow{OB}=\{\cos\beta,\sin\beta,0\},$$

所以 $$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

因此有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

例 6 在空间，两点A与B之间的距离为8，选取适当的坐标系，求到两点A与B的距离之和等于10的动点的轨迹方程.

解 以线段AB的中点O为坐标原点，直线AB为z轴建立空间直角坐标系，于是两定点的坐标分别为$A(0,0,-4)$，$B(0,0,4)$.设动点为$P(x,y,z)$，由动点P满足的几何条件可得

$$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=10.$$

把$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{x^2+y^2+(z+4)^2}$，$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}$代入上式，得

$$\sqrt{x^2+y^2+(z+4)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}=10,$$

即 $$\sqrt{x^2+y^2+(z+4)^2}=10-\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}.$$

两边平方得

$$5\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}=25-4z,$$

两边再平方，化简整理得所求方程为

$$25x^2+25y^2+9z^2=225,$$

即

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1,$$

五、自我测验题

1．填空题

(1) 点$P(x,y,z)$关于坐标面 yOz 的对称点的坐标为_______，关于Ox轴的对称点的坐标为_______，向量 $\overrightarrow{OP}$在 Oz 轴上的射影为_______.

(2) 如果向量$\overrightarrow{P_1P_2}=\{X,Y,Z\}$ 的始点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，那么终点 P_2的坐标为_______.

(3) 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3,5,-4\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,1,8\}$，设 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 Oz 轴垂直，那么 $\lambda=$_______.

(4) 设向量 $\boldsymbol{a}=\{16,-15,12\}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，反向且模为75，那么 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为_______.

(5) 设向量$\boldsymbol{a}=\{3,-6,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,4,-5\}$，$\boldsymbol{c}=\{3,-4,12\}$，那么向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$在 $\boldsymbol{c}$上的射影为_______.

(6) 设$\boldsymbol{a}=\{2,-1,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,2,-1\}$，单位向量 $\boldsymbol{e}$ 同时垂直于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{e}=$_______.

(7) 在平行四边形 $ABCD$ 中，三顶点 A,B,C 的坐标分别为$A(0,-2,0)$，$B(2,0,1)$，$C(0,4,2)$，那么B的对顶点 D 的坐标为_______，对角线交点M的坐标为_______.

(8) 球面的中心在点$(1,3,-2)$，而且球面通过原点，那么该球面的方程为_______.

(9) 已知曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\pi \leqslant \varphi < \pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix},$$

那么它的普通方程为________，它表示的图形叫做________.

(10) 已知曲线

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ y + z = 0, \end{cases}$$

与四点$P_1(3,4,-4)$，$P_2(-3,2,4)$，$P_3(-1,-4,4)$，$P_4(2,3,-3)$，其中的点________在已知曲线上.

2. 设四边形的顶点顺次为$A(3,-1,2)$，$B(1,2,-1)$，$C(-1,1,-3)$，$D(3,-5,3)$，试证明四边形$ABCD$是一个梯形.

3. 已知线段AB被点$C(2,0,2)$与$D(5,-2,0)$三等分，试求这个线段两端点A与B的坐标.

4. 已知四面体的体积$V=5$，它的三个顶点为$A(2,1,-1)$，$B(3,0,1)$，$C(2,-1,3)$，又知道它的第四个顶点D在y轴上，试求点D的坐标和从顶点D所引出的高的长h.

5. 试用向量法证明三阶行列式的阿达玛(Hadmard)定理：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2).$$

6. 设动点到z轴的距离是3，到xOy坐标面距离是2，并且在z轴正向一侧，求这动点的轨迹方程.

第六章　平面与空间直线

一、内 容 概 述

平面与空间直线是空间中最简单的曲面与曲线，本章以向量代数为主要工具，建立了它们的方程，从而我们就可以用代数的方法研究有关平面与空间直线的几何问题．这一章是空间解析几何的主要内容之一．

本章内容分为平面与直线两个单元．

第一单元：平面，即教材的§6.1，§6.2，§6.3与§6.8．本单元首先介绍了各种不同形式的平面方程，这就是平面的点法式、三点式、截距式、点位式，参数式和一般式方程．这样就在几何对象的平面与代数的三元一次方程之间建立了联系．我们也就可以用代数的方法来讨论点与平面，平面与平面的位置关系和有关的度量性质．最后在§6.8中介绍了平面族的概念和它的方程．

第二单元：空间直线，即教材的§6.4，§6.5，§6.6与§6.7．介绍了空间直线的参数式，对称式，一般式与射影式方程，并用代数的方法讨论了有关直线的一些几何问题，这就是直线与平面，直线与直线，直线与点的位置关系和有关的度量性质．

二、学 习 要 求

1．深刻理解在空间直角坐标系下平面的方程是一个关于 x，y，z 的一次方程；反过来，任何一个关于变数 x，y，z的一次方程都表示一个平面．直线可以看成是两平面的交线，它可以用两个相交平面的方程构成的方程组来表示．

2．掌握平面与空间直线的各种形式的方程，明确方程中常数

(参数)的几何意义，能根据决定平面或决定直线的各种几何条件导出它们的方程．并熟悉平面方程的各种形式的互化与直线方程的各种形式的互化．

3．能熟练地根据平面和直线的方程以及点的坐标判别有关点、平面、直线之间的位置关系与计算它们之间的距离与交角．

三、学 习 辅 导

1．平面

1）平面的方程

空间的平面可以由各种不同的几何条件来确定，例如，不共线的三点，两相交直线，两平行直线都可以唯一确定空间的一个平面．已知平面上一点和垂直于这个平面的直线，这样的平面也可以被唯一确定，这就是建立点法式方程的根据，教材中首先推导出平面的点法式方程，然后再导出平面的其它形式的方程，这是因为点位式，三点式，截距式，一般式都可以归结为点法式来解决，另外在空间直角坐标系里，讨论有关平面问题时，平面的法向量常常起着关键性的作用．平面方程的各种形式如表一：

平面方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中的某些系数或常数项为零，与平面关于坐标系的位置有密切的联系，如表二：

2）不同形式的平面方程的互化

不同形式的平面方程在一定条件下都可以相互转化．例如点法式

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

可以直接改写为一般式

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$；点位式

表　一

名　称	方　程	常数(参数)的几何意义	附　注
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	$\{A,B,C\}$是平面的一个法向量，(x_0,y_0,z_0)是平面上的点。	A,B,C不全为零
三点式	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$为平面上的三个点	三点不共线
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	a,b,c分别为平面在x轴,y轴,z轴上的截距	平面不通过原点且不平行于坐标轴
点位式	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0$	(x_0,y_0,z_0)是平面上的点，$\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\{X_2,Y_2,Z_2\}$是平面的方位向量	$X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$
参数式	$\begin{cases} x=x_0+uX_1+vX_2 \\ y=y_0+uY_1+vY_2 \\ z=z_0+uZ_1+vZ_2 \end{cases}$	(x_0,y_0,z_0)是平面上的点，向量$\{X_1,Y_1,Z_1\}$与$\{X_2,Y_2,Z_2\}$平行于平面，u,v为参数	$X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	$\{A,B,C\}$是平面的一个法向量，$\frac{\|D\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$是原点到平面的距离	A, B, C不全为零

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0,$$

也可直接改写为一般式，按行列式的第一行展开即得

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中

$$A=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D=-\left(x_0\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}+y_0\begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right);$$

再如参数式

表 二

平面 $Ax+By+Cz+D=0$

条件			方程	位置特征	
$D\neq 0$	A,B,C 中有一为零	$C=0$	$Ax+By+D=0$	平行于 z 轴	平行于坐标轴
		$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	平行于 y 轴	
		$A=0$	$By+Cz+D=0$	平行于 x 轴	
	A,B,C 中有二为零	$B=C=0$	$Ax+D=0$	平行于 yOz 坐标面	平行于坐标面
		$C=A=0$	$By+D=0$	平行于 zOx 坐标面	
		$A=B=0$	$Cz+D=0$	平行于 xOy 坐标面	
$D=0$	$A\cdot B\cdot C\neq 0$		$Ax+By+Cz=0$	过原点	
	A,B,C 中有一为零	$C=0$	$Ax+By=0$	过 z 轴	通过坐标轴
		$B=0$	$Ax+Cz=0$	过 y 轴	
		$A=0$	$By+Cz=0$	过 x 轴	
	A,B,C 中有二为零	$B=C=0$	$x=0$	yOz 坐标面	坐标平面
		$C=A=0$	$y=0$	zOx 坐标面	
		$A=B=0$	$z=0$	xOy 坐标面	

$$\begin{cases} x=x_0+uX_1+vX_2, \\ y=y_0+uY_1+vY_2, \\ z=z_0+uZ_1+vZ_2, \end{cases}$$

由于其中的(x_0,y_0,z_0)，$\{X_1,Y_1,Z_1\}$与$\{X_2,Y_2,Z_2\}$和点位式中的常数(参数)具有相同的几何意义，因此可以把参数式直接写成点位式，然后再改成一般式；至于截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

它已是特殊的一般式.

反过来，我们也可以把一般式改写为其他形式的平面方程，例如把一般式

$$Ax+By+Cz+D=0$$

改写为点法式，只要在此平面上任取一点(x_0,y_0,z_0)，那么此平面的点法式就是

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

当 A,B,C,D 都不等于零时，一般式就可改写为截距式

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

如果要把一般式改写为参数式，我们只要在此平面上任取不共线的三点 M_1,M_2,M_3，那么 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 就是这平面的两个方位向量，因此也就可以写出该平面的点位式或参数方程，更简单地可令 $u=y,v=z$，于是平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 就可写成参数式为

$$\begin{cases} x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}u-\frac{C}{A}v, \\ y=u, \\ z=v, \end{cases}$$

这平面过点 $\left(-\frac{D}{A},0,0\right)$，且有方位向量 $\left\{-\frac{B}{A},1,0\right\}$，$\left\{-\frac{C}{A},0,1\right\}$.

从而它的点位式方程为

$$\begin{vmatrix} x-\frac{D}{A} & y & z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\begin{vmatrix} x-\frac{D}{A} & y & z \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix}=0.$$

3) 求平面方程的一般方法

熟悉平面方程的各种形式，并明确其中常数(参数)的几何意

义后，就可以根据所求平面的几何条件来写出平面的方程．建立平面的方程，通常有两种方法，一是根据已知条件直接写出平面的点法式或其他形式的方程，另一方法是待定系数法．

1° 如果要直接写出平面的点法式或点位式方程，那么必须知道平面上一个点以及这平面的一个法向量或两个不共线的方位向量，因此这时关键是找平面的法向量与方位向量．

例如，yOz，zOx，xOy坐标面分别有法向量$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$；与已知平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 平行的平面有法向量$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$；线段 AB 的垂直平分面有法向量 $\overrightarrow{AB}$；如果原点到平面所引垂线的垂足为点 M_0，那么$\overrightarrow{OM_0}$就是这个平面的一个法向量．

又如，如果所求平面与两已知的相交平面 π_1 和 π_2 都垂直，那么平面 π_1 和 π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 就是所求平面的方位向量；如果一平面通过 z 轴及 z 轴外一点 M_0，由于 z 轴通过原点 O，所以向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$就是这个平面的方位向量；如果所求平面通过两平行直线，那么由这两直线上的定点 M_1 与 M_2 所成的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与直线的方向向量是 $\boldsymbol{v}$，就是所求平面的方位向量．

2° 用待定系数法求平面的方程时，先假定所求平面的某种形式的方程；例如，可设所求平面的方程为：$Ax+By+Cz+D=0$，然后根据已知条件确定系数 A,B,C,D 的值，实际上只要确定$A:B:C:D$，所求平面也就确定了．比如在教材§6.1 例 5 中，先假定平行于 z 轴的平面方程为 $Ax+By+D=0$，再根据它通过点$M_1(2,-1,1)$，$M_2(3,-2,1)$的条件得

$$2A-B+D=0,$$
$$3A-2B+D=0.$$

从上面两式分别消去 B,A，得 $A=-D$，$B=-D$，因而 $A:B:D=1:1:(-1)$．于是所求平面为

$$x+y-1=0.$$

教材中是由上面两式直接计算得

$$A:B:D=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1:1:(-1),$$

这是根据以下代数中的定理得到的，

关于三个未知数 x_1, x_2, x_3 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0,\end{cases}$$

如果它的系数所组成三个二阶行列式不全为零，那么

$$x_1:x_2:x_3=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}:-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}.$$

3° 当所求平面通过已知直线时，那么利用平面束方程容易得到所求平面的方程.

4）两平面的位置关系

关于两平面的三种不同位置关系的判别条件，交角公式，主要利用平面的法向量来讨论的. 两平面平行或重合，就是它们的法向量共线，两平面的交角转化为求它们法向量之间的夹角，两平面垂直就是它们的法向量垂直. 这些关系成立的条件如表三：

2．空间直线

1）空间直线的方程

确定空间一条直线也有许多方法，在解析几何里把它归结为由直线上一点与平行于直线的一个非零向量(即直线的方向向量)来确定；或者把它看成两个平面的交线，即由两相交平面来确定. 空间直线方程的各种形式如表四：

2）不同形式的直线方程的互化

1° 直线的对称式方程 $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$ 和参数式方

表 三

平面 π_1: $A_1x+B_1y+C_1z-D_1=0$, $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$
平面 π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$

位置关系	成立条件	
相交	$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$ ($\boldsymbol{n}_1\not\parallel\boldsymbol{n}_2$)	①交角公式 $\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\cos\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=\pm\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{\lvert\boldsymbol{n}_1\rvert\lvert\boldsymbol{n}_2\rvert}=\pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ ②垂直条件: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, ($\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$)
平行	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$, ($\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$)	
重合	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$, ($\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$)	

表 四

名称	方程	常数(参数)的几何意义	附注
参数式	$\begin{cases}x=x_0+Xt\\y=y_0+Yt\\z=z_0+Zt\end{cases}$	(x_0,y_0,z_0) 是直线上的点,$\{X,Y,Z\}$是直线的方向向量	X,Y,Z不全为零 $(-\infty<t<+\infty)$
对称式	$\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$		
两点式	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)为直线上的两点	x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1不全为零
射影式	$\begin{cases}x=az+c\\y=bz+d\end{cases}$	$(c,d,0)$为直线上的点,$\{a,b,1\}$为直线的方向向量	把直线看成两射影平面的交线
一般式	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$	$\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$为直线的方向向量。	把直线看成两平面的交线

程$\begin{cases}x=x_0+Xt\\y=y_0+Yt\\z=z_0+Zt\end{cases}$中的常数具有相同几何意义,很容易把其中一种形式改写成另一种形式的方程。

2° 直线的射影式方程是一般式方程的特殊形式．要把一般式方程化为射影式方程，只要根据射影式方程的特点，从一般式方程中分别消去两个变数，就可得到射影式方程。

如果一般式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

中$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$，我们总可以从一般式方程分别消去 x 和 y 得到射影式方程，但如果$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$，也就是$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}(=k)$，那么消去 x 时一定也同时消去 y 而得到只有一个变数 z 的方程，

$$z=k,$$

它既是直线在 xOz 坐标面上的射影平面，又是直线在 yOz 坐标面上的射影平面，这时还必须从原方程消去 z，得到直线在 xOy 平面上的射影平面

$$x=py+q.$$

于是直线的射影式方程为

$$\begin{cases} x=py+q, \\ z=k. \end{cases}$$

3° 直线的对称式方程和一般式方程也可以互化．把直线的对称式方程改写一下就可以得到射影式方程，它已是一般式方程的特殊情况．更多的情形是需要把一般式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

化为对称式方程，通常有两种方法，一是先写出直线的方向向量，它可取

$$v=\left\{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}A_2 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\},$$

再取一般式方程中的一个特解(x_0, y_0, z_0)，于是就可以得到直线的对称式方程

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}};$$

另一方法是先从直线一般式方程中分别消去两个变数化为射影式方程，如果这射影式方程为

$$\begin{cases} x=az+c,\\ y=bz+d. \end{cases}$$

那么再改写一下就可以得到直线的对称式方程

$$\frac{x-c}{a}=\frac{y-d}{b}=\frac{z}{1}.$$

3）求直线方程的一般方法

求直线方程的常用方法之一是根据所求直线的几何条件直接写出它的方程，通常用对称式方程或一般式方程表示；另一方法是待定系数法.

1° 用对称式方程表示直线时，必须找出直线上一个已知点与直线的方向向量. 用一般式方程表示直线时，必须找出通过这直线的两个平面，这样就把问题归结为求平面的方程.

例如，平行于 x 轴，y 轴，z 轴的直线分别有方向向量$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$；如果所求直线和两条已知的异面直线都垂直，那么这两已知异面直线的方向向量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 的向量积 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$ 就是所求直线的一个方向向量；如果一直线与两相交平面都平行，那么这两相交平面的法向量的向量积 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 就是这直线的一个方向向量；和 x 轴、y 轴、z 轴夹角分别为 α,β,γ 的直线的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

又如，当一直线通过已知点M_0且与两已知异面直线l_1, l_2都相交，那么这直线就可以看成是由点M_0与l_1决定的平面和由M_0与l_2决定的平面的交线，这时的直线方程可用一般式表示；如果一直线通过已知点M_0，与已知平面π平行，又和已知直线l相交($M_0 \notin l, l \not\parallel \pi$)，那么这直线就可以看作是过点$M_0$且与平面$\pi$平行的平面$\pi_1$和通过直线$l$与点$M_0$的平面$\pi_2$的交线．这时的直线方程也可以用一般式表示．

2° 用待定系数法求直线方程时，一般先假定所求直线方程为

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

然后根据已知条件确定其中未知常数的值．

4）直线与平面的相关位置

直线与平面的相关位置的讨论，一般有两种方法，即代数方法与几何方法．

例如，设直线和平面的一般式方程分别为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad 与 \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

那么它们的相关位置的讨论，就归结为求直线方程和平面方程的公共解．为方便起见，把直线的一般式方程改写为参数式方程

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt, \end{cases}$$

把它代入平面方程，于是问题就简化为讨论一个一元一次方程的问题了．几何方法，就是利用平面的法向量$\boldsymbol{n}$，直线的方向向量$\boldsymbol{v}$和直线上一已知点M_0来讨论．利用代数方法讨论具有一般性，利用几何方法讨论具有直观明显性，因而也便于记忆．直线与平面的位置关系如表五：

表 五

直线l: $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$, $\boldsymbol{v}=\{X,Y,Z\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$
平面π: $Ax+By+Cz+D=0$, $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$

位置关系	成立条件	
相交	$AX+BY+CZ\neq 0$ ($\boldsymbol{n}\not\perp\boldsymbol{v}$)	①求交点：把直线方程改成参数式，代入平面方程解出t，即可求得交点坐标 ②交角公式 $\sin\varphi=\frac{\lvert\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{v}\rvert}=\frac{\lvert AX+BY+CZ\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ ③垂直条件 $\frac{A}{X}=\frac{B}{Y}=\frac{C}{Z}$, ($\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{v}$)
平行	$AX+BY+CZ=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, ($\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}, M_0\notin\pi$)	
直线在平面上	$AX+BY+CZ=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, ($\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{v}, M_0\in\pi$)	

5）空间两直线的相关位置

空间两直线的相关位置决定于三向量$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$之间的关系，这里$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$分别为两直线的方向向量，$M_1,M_2$分别为两直线上的已知点，这里要注意的是两直线相交必需具备两个条件，即$\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$共面与$\boldsymbol{v}_1\not\parallel\boldsymbol{v}_2$(见教材§6.6例1的解法一)．两直线重合的条件$\boldsymbol{v}_1\parallel\boldsymbol{v}_2\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$和平行条件$\boldsymbol{v}_1\parallel\boldsymbol{v}_2\not\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$的区别实质上是一直线上的已知点是否在另一直线上.

空间两直线的位置关系如表六：

6）点、平面、空间直线间的距离如表七：

四、补充例题

例 1 过原点O引平面π的垂线，设垂足为P_0(图6-1)，已知$\lvert\overrightarrow{OP_0}\rvert=p\neq 0$，$\overrightarrow{OP_0}$的方向角为$\alpha,\beta,\gamma$，求平面$\pi$的方程.

解 由题意，平面π有法向量$\overrightarrow{OP_0}=\{p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma\}$,

表　六

直线l_1：$\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}$，$\boldsymbol{v}_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$

直线l_2：$\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$，$\boldsymbol{v}_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，$M_2(x_2,y_2,\ z_2)$

<table>
<tr><th colspan="2">位置关系</th><th colspan="2">成　立　条　件</th></tr>
<tr><td rowspan="3">共
面</td><td>相交</td><td>$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=0$
$X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$
$[(\overrightarrow{M_1M_2},\ \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=0$
$\boldsymbol{v}_1\nparallel\boldsymbol{v}_2]$</td><td>①两相交直线的交点：把两直线方程改成参数式，求出t_1或t_2的值，即可求出交点的坐标．
②交角公式：
$\cos\angle(l_1,l_2)=\pm\cos\angle(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\pm\dfrac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{\vert\boldsymbol{v}_1\vert\vert\boldsymbol{v}_2\vert}$
$=\pm\dfrac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2-Z_2^2}}$</td></tr>
<tr><td>平行</td><td colspan="2">$\dfrac{X_1}{X_2}=\dfrac{Y_1}{Y_2}=\dfrac{Z_1}{Z_2}$，$(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)\neq X_1:Y_1:Z_1$
$(\boldsymbol{v}_1\parallel\boldsymbol{v}_2\nparallel\overrightarrow{M_1M_2})$</td></tr>
<tr><td>重合</td><td colspan="2">$\dfrac{X_1}{X_2}=\dfrac{Y_1}{Y_2}=\dfrac{Z_1}{Z_2}$，$(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)=X_1:Y_1:Z_1$
$(\boldsymbol{v}_1\parallel\boldsymbol{v}_2\parallel\overrightarrow{M_1M_2})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">垂直</td><td colspan="2">$X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2=0$，$(\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$ 或 $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">异
面</td><td>$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\neq0$
$[(\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\neq0]$</td><td>公垂线方程
$\begin{cases}\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=0\end{cases}$
其中$X=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}$，$Y=\begin{vmatrix}Z_1 & X_1\\ Z_2 & X_2\end{vmatrix}$，$Z=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}$</td></tr>
</table>

且过点$P_0(p\cos\alpha,p\cos\beta,p\cos\gamma)$，所以平面的点法式方程为

$$p\cos\alpha(x-p\cos\alpha)+p\cos\beta(y-p\cos\beta)$$
$$+p\cos\gamma(z-p\cos\gamma)=0.$$

由于$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以上式可化简整理成

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

注　方程$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$叫做平面的法式方

表　七

名　　　称	距离计算公式	附　注
点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	
点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到直线 $\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}$ 的距离	$d=\frac{\lvert\overrightarrow{M_0M_1}\times v\rvert}{\lvert v\rvert}$	$M_1(x_1,y_1,z_1)$ $v=\{X,Y,Z\}$
两异面直线 $\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}$ $\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$ 间的距离	$d=\frac{\lvert(\overrightarrow{M_1M_2},v_1,v_2)\rvert}{\lvert v_1\times v_2\rvert}$	$M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $v_1=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ $v_2=\{X_2,Y_2,Z_2\}$

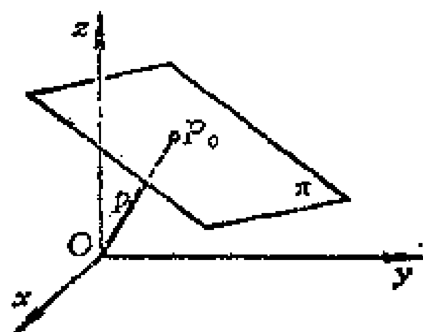


图 6-1

程．它有两个特征：① 一次项系数的平方和为1（因为$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$），② 常数项小于零（因为$p>0$）．反过来，如果一个平面的方程具有这两个特征，那么它就是平面的法式方程．（当平面通过原点，平面方程中的常数项为零，这时如果平面的方程具有第一个特征，那么我们也称它为平面的法式方程．）根据平面法式方程的两个特征，我们容易把平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

改写为法式方程如下

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0,$$

其中正负号的选取使得与D异号，当$D=0$时，符号任意选取.

从上容易看出，点(x_0,y_0,z_0)到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离实际上是把(x_0,y_0,z_0)代入平面的法式方程的左端所得的绝对值，即

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

例 2 平面$\lambda_1(x+y+2z+2)+\lambda_2(3x+y-2z)=0$，如果适合下列条件，试决定参数$\lambda_1$与$\lambda_2$的比值，

(1) 在z轴上的截距为1；(2) 平行于x轴；(3) 离原点的距离为$\frac{1}{2}$.

解 把平面方程改写成

$$(\lambda_1+3\lambda_2)x+(\lambda_1+\lambda_2)y+(2\lambda_1-2\lambda_2)z+2\lambda_1=0.$$

(1) 平面在z轴上截距为1，即它通过点(0,0,1)，由此得$\lambda_1:\lambda_2=1:2$；

(2) 平面平行于x轴，那么方程中x的系数为零，所以得$\lambda_1:\lambda_2=-3:1$；

(3) 平面离原点的距离为$\frac{1}{2}$，由点到平面的距离公式得

$$\frac{|2\lambda_1|}{\sqrt{(\lambda_1+3\lambda_2)^2+(\lambda_1+\lambda_2)^2+(2\lambda_1-2\lambda_2)^2}}=\frac{1}{2},$$

即
$$5\lambda_1^2-7\lambda_2^2=0,$$

所以$\lambda_1:\lambda_2=\sqrt{7}:\sqrt{5}$或$\lambda_1:\lambda_2=-\sqrt{7}:\sqrt{5}$.

例 3 试求通过点$M(-1,0,4)$垂直于平面π：$3x-4y+z-10=0$，且与直线l：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$平行的平面方程.

解法一 由题意知,所求平面平行于已知平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{3,-4,1\}$与直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}=\{3,1,2\}$,显然 $\boldsymbol{n}$ 从 $\boldsymbol{v}$,因此 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{v}$是所求平面的两个方位向量,于是所求平面的点位式方程为

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-4 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$3x+y-5z+23=0.$$

解法二 所求平面过点$(-1,0,4)$,可设它的方程为

$$A(x+1)+By+C(z-4)=0,$$

因为它垂直于平面 π 与平行于直线 l,所以有

$$\begin{cases} 3A-4B+C=0, \\ 3A+B+2C=0. \end{cases}$$

解得

$$A:B:C=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-9:(-3):15=3:1:(-5).$$

于是所求平面方程为

$$3(x+1)+y-5(z-4)=0.$$

即
$$3x+y-5z+23=0.$$

例 4 求过点 $M_0(1,1,1)$且与直线 l: $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 垂直相交的直线的方程.

解法一 已知直线 l 有方向 向量 $\boldsymbol{v}=\left\{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right\}=2\{1,2,3\}$,且过原点$O$,$l$ 的对称式方程为$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

由题意可知，所求直线可以看作以下两平面 π_1 和 π_2 的交线，其中 π_1 是通过已知点 M_0，且垂直于已知直线 l 的平面。显然 π_1 有法向量 $\boldsymbol{n}_0=\{1,2,3\}$，所以 π_1 的方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即
$$x+2y+3z-6=0;$$

π_2 是通过已知点 M_0 和已知直线 l 的平面，因此 π_2 有方位向量 $\overrightarrow{OM_0}=\{1,1,1\}$ 与 $\boldsymbol{v}=\{1,2,3\}$，从而 π_2 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

即
$$x-2y+z=0.$$

于是所求直线方程为

$$\begin{cases} x+2y+3z-6=0, \\ x-2y+z=0. \end{cases}$$

解法二 因为所求直线通过点 $M_0(1,1,1)$，所以可设它的方程为

$$\frac{x-1}{X}=\frac{y-1}{Y}=\frac{z-1}{Z}.$$

这直线垂直于已知直线 l，所以有

$$X+2Y+3Z=0, \tag{1}$$

又因所求直线与已知直线 l 相交，它们一定共面，所以这两直线的方向向量与向量 $\overrightarrow{OM_0}$ 共面，因此有

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即
$$X-2Y+Z=0, \tag{2}$$

由(1),(2)两式得 $X:Y:Z=4:1:(-2)$，
所以所求直线为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

注意，在解法二中只用了所求直线与已知直线垂直和共面的条件，显然同一平面上垂直的两直线必定相交。

解法三 先求出通过已知点 M_0 且垂直于已知直线的平面 π_1（见解法一）与已知直线的交点. 由于已知直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=t, \\ y=2t, \\ z=3t, \end{cases}$$

代入 π_1 的方程，解得 $t=\frac{3}{7}$，因此平面 π_1 和已知直线交点为 $M_1\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$. 所求直线就是通过两点 M_0, M_1 的直线，其方程为

$$\frac{x-1}{\frac{3}{7}-1}=\frac{y-1}{\frac{6}{7}-1}=\frac{z-1}{\frac{9}{7}-1},$$

也就是

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

读者可以验证解法一和解法二中所得直线方程确是表示同一条直线.

注 在求空间直线与平面方程时，如果读者对于立体几何里一些基本命题能熟练运用的话，往往可以根据这些命题直接导出所求直线或平面的方程，例 3 和例 4 的解法一就是这样，如果直接导出方程有困难，常可以像例 3 和例 4 的解法二那样用待定系数法.

例 5 求点 $M(3,-2,6)$ 在直线 l：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{2}$ 上的射影。

解法一 因为过点 $M(3,-2,6)$ 且与已知直线 l 垂直的平面 π 和已知直线 l 的交点，即为所求的射影，而平面 π 的方程为

$$(x-3)+3(y+2)+2(z-6)=0,$$

即
$$x+3y+2z-9=0. \tag{3}$$

把直线 l 的方程改写成参数式得

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=-2+3t, \\ z=3+2t, \end{cases} \tag{4}$$

由(3)，(4)解得

$$t=\frac{4}{7}.$$

代入(4)得点 $M(3,-2,6)$ 在已知直线 l 上的射影为点$\left(\frac{11}{7},-\frac{2}{7},\frac{29}{7}\right)$.

解法二 设所求的射影为点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，将已知直线 l 的方程改写成参数式得

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=-2+3t, \\ z=3+2t, \end{cases}$$

那么有
$$x_0=1+t, y_0=-2+3t, z_0=3+2t, \tag{5}$$

从而
$$\overrightarrow{MM_0}=\{t-2,3t,2t-3\},$$

由题意知
$$\overrightarrow{MM_0}\perp v\{1,3,2\},$$

所以
$$(t-2)+3\times 3t+2(2t-3)=0,$$

于是
$$t=\frac{4}{7},$$

代入(5)得所求的射影为点 $M_0\left(\frac{11}{7},-\frac{2}{7},\frac{29}{7}\right)$.

例 6 设三平面的方程为

$$\pi_1:\ 2x-3y+z-1=0,$$
$$\pi_2:\ x-5y+2z-3=0,$$
$$\pi_3:\ 3x-y+\lambda z+\mu=0,$$

试求满足下列条件的 λ,μ 的值：(1) 三平面交于一点；(2) 三平面通过同一直线；(3) 三平面无公共点.

解法一 显然无论 λ,μ 取怎样的实数，三平面的法向量都不共线，因而它们总是两两相交的.

设 l 为平面 π_1 和 π_2 的交线，可求得 l 的对称式方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4}{7},$$

这直线过点 $M_0(0,1,4)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{1,3,7\}$，而平面 π_3 的法向量为 $\boldsymbol{n}_3=\{3,-1,\lambda\}$.

(1) 三平面交于一点，就是 l 与 π_3 相交，其充要条件为 $\boldsymbol{v}\not\perp\boldsymbol{n}_3$，或 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_3\neq0$，即 $\lambda\neq0$.

(2) 三平面通过同一直线，就是 l 在 π_3 上，其充要条件是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}_3$，且 $M_0\in\pi_3$，由此得 $\lambda=0,\mu=1$.

(3) 三平面无公共点(两两相交成三条平行直线)，就是 l 和 π_3 平行，其充要条件是 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}_3$，且 $M_0\notin\pi_3$. 由此得 $\lambda=0,\mu\neq1$.

解法二 (1) 三平面交于一点，就是由它们的方程组成的三元一次方程组有唯一解，从代数上知道，其充要条件是

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-5&2\\3&-1&\lambda\end{vmatrix}\neq0,$$

即 $\lambda\neq0$.

(2) 三平面通过同一直线，由(1)知必有 $\lambda=0$，且 π_3 属于以 π_1,π_2 的交线 l 为轴的平面束，因此有

$$3x-y+\mu\equiv\alpha(2x-3y+z-1)+\beta(x-5y+2z-3),$$

由此得 $\alpha=2,\ \beta=-1,\ \mu=1$，即三平面通过同一直线的充要条件

为 $\lambda=0,\mu=1$；

(3) 由(1)与(2)知，三平面无公共点的充要条件 $\lambda=0,\mu\neq1$.

五、自我测验题

1．填空题

(1) 通过点(a,b,c)且与 yOz 坐标面平行的平面方程为_________；

(2) 通过点(a,b,c)和 x 轴的平面方程为________；

(3) 通过点 $(4,-7,5)$ 且在三坐标轴上截距相等的平面方程为________；

(4) 通过两平行直线$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$，$\frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y}=\frac{z-c}{Z}$的平面方程为________；

(5) 通过原点 O 与点 $M_0(3,0,5)$的直线的对称式方程为_________，参数方程为________，射影式方程为________；

(6) 通过点(a,b,c)，垂直于直线 l：$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$，平行于平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ $(l\not\perp\pi)$的直线方程为________.

(7) 直线$\frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y}=\frac{z-c}{Z}$垂直于 x 轴的充要条件是________，和 x 轴重合的充要条件是________；

(8) 直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{0}$ 与平面 $3x-y+2z+4=0$ 的夹角为________，交点为________.

2．试写出直线$\begin{cases}x=lz+a\\y=mz+b\end{cases}$和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 相交、平行与重合的充要条件.

3．试证两直线

$$\begin{cases} x=a_1+a_2t \\ y=b_1+b_2t \\ z=c_1+c_2t \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x=a_2+a_1t \\ y=b_2+b_1t \\ z=c_2+c_1t \end{cases}$$

相交，并求交点坐标．其中 $a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$．

4．设一直线通过点 $M_0(1, 3, 5)$ 且与 z 轴相交，又与平面 $3x+2y+z+1=0$ 平行，求这直线方程．

5．求原点 O 关于已知直线 l：$\frac{x-5}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-2}$ 的对称点．

6．求两相交直线 l_1：$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 与 l_2：$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ 的交角平分线的方程．

7．求通过两异面直线 $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{-1}$，$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-7}{1}$ 的公垂线且和平面 $x-4y-8z+12=0$ 组成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程．

第七章 特殊曲面

一、内容概述

这一章介绍了四种特殊曲面，即球面、柱面、锥面与旋转曲面，根据这些曲面的几何特征，导出了它们的方程，并讨论了这些曲面方程的一些特征性质．本章内容可分为下列三个单元．

第一单元：球面，即教材的§7.1．这一单元指出了球面方程的特征，并介绍了空间中圆的方程．

第二单元：柱面与锥面，即教材的§7.2与§7.3．这一单元从柱面、锥面的几何定义出发，导出了这两种曲面的方程，并讨论了母线平行于坐标轴的柱面方程的特征．

第三单元：旋转曲面，即教材的§7.4，本单元介绍了求旋转曲面方程的一般方法，并讨论了母线为坐标面上的曲线，以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程的特征．

二、学习要求

1．能根据确定球面或空间中圆的几何条件写出它们的方程．

2．掌握求柱面、锥面、旋转曲面方程的一般方法与步骤．

3．能识别母线平行于坐标轴的柱面方程和以坐标轴为旋转轴的旋转曲面的方程，并能从方程认识曲面的大致形状．

三、学习辅导

1. 球面

1) 球面方程

球面的定义类似于平面上圆的定义，球面方程的形式与特征和平面上圆的方程相类似，在研究球面方程时应经常与平面上圆的方程进行对照和比较.

2) 空间中圆的方程

空间中的圆作为空间曲线，要用通过它的两个曲面的方程联立表示. 为方便起见，通常把它看作是一个球面与平面的交线，因而空间中圆的方程常表示为

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

的形式. 其中第二式是圆所在的平面方程，它是唯一确定的，而第一式是通过这圆的球面方程，它不是唯一的.

例如，将直线 l：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{3}$ 外的一点 $M(2,4,1)$绕直线旋转一周所得的圆，可以看成是以直线 l 上的点 $M_0(1,-2,0)$为中心，$|\overrightarrow{M_0M}|=\sqrt{38}$ 为半径的球面

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=38,$$

与过点 $M(2,4,1)$且垂直于直线 l 的平面

$$2(x-2)+(y-4)+3(z-1)=0,$$

即
$$2x+y+3z-11=0$$

的交线，所以这个圆的方程为

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=38,\\ 2x+y+3z-11=0.\end{cases}$$

因为通过这个圆的球面有无数多，直线 l 上的任意定点都可

以作为球心，例如取 l 上的点 $N(5,0,6)$ 作为球心，$|\overrightarrow{NM}|=\sqrt{50}$ 为半径的球面

$$(x-5)^2+y^2+(z-6)^2=50$$

也通过这个圆，因此这圆的方程又可写为

$$\begin{cases}(x-5)^2+y^2+(z-6)^2=50,\\ 2x+y+3z-11=0.\end{cases}$$

2. 柱面与锥面

1) 推导柱面与锥面方程的一般方法

柱面与锥面都是定义为空间一族直线的轨迹，柱面定义为与空间定曲线(准线)相交，且具有定方向的一族平行直线的轨迹，而锥面定义为过定点(顶点)且与空间定曲线(准线)相交的一族直线的轨迹。因而求柱面与锥面方程的方法也是一致的。推导柱面方程的步骤如下：

1° 写出过柱面准线 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 上任意一点 (x_1,y_1,z_1) 的母线方程

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}, \qquad (1)$$

其中 $X:Y:Z$ 是已知的定方向，即母线的方向。

2° 写出参数 x_1,y_1,z_1 的约束条件

$$\begin{cases}F_1(x_1,y_1,z_1)=0,\\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0.\end{cases} \qquad (2)$$

3° 由(1)与(2)消去参数 x_1,y_1,z_1 就得所求的柱面方程.

对于锥面来说，推导它的方程步骤如下：

1° 写出过准线 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 上的任意点 (x_1,y_1,z_1) 的母线方程

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \qquad (1')$$

其中(x_0, y_0, z_0)为已知的定点，即锥面的顶点。

2° 写出参数 x_1, y_1, z_1 的约束条件

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1)=0, \\ F_2(x_1, y_1, z_1)=0. \end{cases} \tag{2'}$$

3° 由(1′)与(2′)消去参数 x_1, y_1, z_1 就得所求的锥面方程.

比较上面推导柱面与锥面方程的一般方法，读者不难发现，它们是完全一致的。

这里还要说明几点：

i) 由于(x_1, y_1, z_1)是准线上任意一点，因此方程(1)或(1′)中的 x_1, y_1, z_1 不是定值，它是满足约束条件 (2) 或 (2′) 的任意常数(即参数). 当参数 x_1, y_1, z_1 的值取定后，(1)或(1′)表示柱面或锥面的一条确定的直母线，当 x_1, y_1, z_1 取遍满足(2)或(2′)所有可能的值时，(1)或 (1′) 就表示全体直母线. 因而在约束条件 (2) 或 (2′)之下的方程(1)或(1′)是柱面或锥面的直母线族方程.

ii) 消参数的方法，根据具体情况而定，通常可以先令 t 表示(1)或(1′) 中的公共比值，然后解出 x_1, y_1, z_1. 比如由(1)可以解得

$$x_1=x-Xt, \quad y_1=y-Yt, \quad z_1=z-Zt. \tag{3}$$

再把(3)代入约束条件(2)，得

$$\begin{cases} F_1(x-Xt,\ y-Yt,\ z-Zt)=0, \\ F_2(x-Xt,\ y-Yt,\ z-Zt)=0. \end{cases} \tag{4}$$

(4)中只有一个参数 t，从(4)中的两个方程消去这个参数 t 得到的关于 x, y, z 的方程，就是所求的柱面方程. 在求锥面方程的过程中，一般也可以用上面同样的方法来消参数.

iii) 对于一些特殊情况下的柱面与锥面，推导它们的方程不一定用这种一般的方法，可以用特殊的方法，因为在这时，特殊的方法往往比较简便. 例如补充题中的例 3 与例 5 的解法二.

2) 母线平行于坐标轴的柱面方程的特征

因为柱面的准线不是唯一的，凡是在柱面上且与每一条母线都相交的曲线都可以作为柱面的准线，所以母线平行于 z 轴的柱面，总可以用它与 xOy 坐标面的交线作为准线，这是一条在 xOy 坐标面上的曲线，因此总可以表示为

$$\begin{cases}F(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$$

定理 7.2.1 指出，这时的柱面方程为 $F(x,y)=0$，它的特征是不含变数 z. 对于母线平行于其他坐标轴的柱面，也有类似的结论。

反过来，一个方程如果缺少某一变数，那么它表示一个柱面，这柱面的母线平行于所缺变数同名的坐标轴.

必须注意，有某个变数不出现的曲面方程，例如 $F(x,y)=0$ 在空间是表示母线平行于 z 轴的柱面，但它在 xOy 坐标面上却表示一条曲线，而且由定理 7.2.1 知道，这曲线就是柱面在 xOy 坐标面上的准线. 因此，对方程 $F(x,y)=0$ 所代表的平面图形如果能认识的话，那么这方程所代表的空间图形也就可以知道了. 例如，方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$y^2=2px$ 的平面图形分别是 xOy 坐标面上的椭圆、双曲线和抛物线，从而知道它们的空间图形就是以这些椭圆，双曲线、抛物线为准线，母线平行于 z 轴的柱面. 总之，对于这种有某个变数不出现的方程，必须首先区分它所代表的是空间图形还是平面图形，同时还必须认识同一方程所表示的两种图形之间的关系，从而可以从平面图形去认识空间图形. 例如，方程 $y=\sin x$ 的平面图形是 xOy 坐标面上的正弦曲线，从而知道它的空间图形就是以这条正弦曲线为准线，母线平行于 z 轴的柱面，叫做**正弦曲面**.

3）空间曲线对坐标面的射影柱面

正是由于母线平行于坐标轴的柱面方程的图形容易认识，因

而如果把空间曲线用它在两个坐标面上的射影柱面方程来表示，那么这曲线的形状也就比较容易认识了.例如,从空间曲线的方程

$$\begin{cases}x^2+y^2-z=1,\\2x^2+2y^2+z=5.\end{cases}$$

中分别消去 z 与 x,就得到这条曲线对 xOy 坐标面与 yOz 坐标面的射影柱面方程 $x^2+y^2=2$ 与 $z=1$,用它们来表示这条曲线就是

$$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\z=1.\end{cases}$$

因此这条曲线可以看成母线平行于 z 轴的圆柱面与垂直于这圆柱面母线的平面的交线,显然它是一个圆。

4) 齐次方程与锥面

一个关于 x,y,z 的齐次方程，它的图形是以原点为顶点的一个锥面；一个关于 $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ 的齐次方程的图形是以 (x_0,y_0,z_0) 为顶点的锥面. 例如方程

$$xy+yz+zx=0$$

与

$$x^2-z(y+a)+(y+a)^2=0$$

的图形分别是以原点(0,0,0)与以点$(0,-a,0)$为顶点的锥面.

3. 旋转曲面

旋转曲面由它的母线与旋转轴唯一确定，但是母线并不是唯一的,特别是通过旋转轴,并以这轴为界的任一个半平面与旋转曲面的交线(即经线)都可以作为生成旋转曲面的母线. 例如以 y 轴为旋转轴的旋转曲面,总可以用它与 yOz 坐标面的交线

$$\begin{cases}F(y,z)=0,\\x=0.\end{cases}$$

作为生成它的母线.

教材中的定理 7.4.1 指出了以坐标面上的曲线为母线，坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程的特征. 例如,将曲线

$$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases}$$

绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面方程为

$$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0,$$

绕 z 轴旋轴所生成的旋转曲面方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

对于其他坐标面上的曲线绕它所在的坐标面上的坐标轴旋转所生成的旋转曲面，也有类似的结论.

对于一般情况下的旋转曲面，可以把它看成是所有纬圆的集合，在建立一般旋转曲面方程时，关键就是写出纬圆族的方程.

设旋转曲面的母线为 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$ 旋转轴为 $\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，建立旋转曲面方程的步骤和建立柱面、锥面方程的步骤是类似的，它的步骤是

1° 写出过母线上任意一点 (x_1, y_1, z_1) 的纬圆方程：

$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 \\ \qquad +(z_1-z_0)^2. \end{cases} \tag{5}$$

2° 写出参数 x_1, y_1, z_1 的约束条件

$$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1)=0, \\ F_2(x_1, y_1, z_1)=0, \end{cases} \tag{6}$$

3° 由(5),(6)消去参数 x_1, y_1, z_1 就得所求旋转曲面的方程.

(5)中的 x_1, y_1, z_1 是满足约束条件(6)的任意常数(即参数). 因而在约束条件(6)之下的方程(5)就是旋转曲面的纬圆族方程.

我们看到，建立柱面、锥面、旋转曲面方程的方法步骤是统一的，即先写出含有参数 x_1, y_1, z_1 的母线族或纬圆族的方程

$$\begin{cases}\Phi_1(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0,\\ \Phi_2(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0,\end{cases} \tag{7}$$

写出参数约束条件

$$\begin{cases}F_1(x_1,y_1,z_1)=0,\\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0,\end{cases} \tag{8}$$

然后由(7),(8)消去参数 x_1,y_1,z_1就得所求曲面方程.

消参数的方法都要根据具体问题而定. 基本方法是先从(7),(8)中某两式中解出某两个参数,然后代入其余两式,再从这两式消去最后一个参数;也可以先从(7),(8)中某三式解出 x_1,y_1,z_1,再代入另外一个式子,即得所求曲面方程.

例如,空间曲线$\begin{cases}z=x^2,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的纬圆族方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2, & (9)\\ z=z_1, & (10)\end{cases}$$

这里(x_1,y_1,z_1)是母线上的任意点,因此有

$$\begin{cases}z_1=x_1^2, & (11)\\ x_1^2+y_1^2=1. & (12)\end{cases}$$

从(10),(12)解出参数 z_1,x_1,得

$$z_1=z, \qquad x_1=\pm\sqrt{1-y_1^2} \tag{13}$$

(13)代入(9),得

$$x^2+y^2=1, \tag{14}$$

(14)中已经不再含有参数,因此方程 $x^2+y^2=1$ 就是所求的方程,但另一方面将(13)代入(11)得

$$z=1-y_1^2,$$

而由(12)知

$$1-y_1^2=x_1^2,$$

所以 z 的取值范围是 $0\leqslant z\leqslant 1$,因此旋转曲面的方程是

$$x^2+y^2=1,\ (0\leqslant z\leqslant 1).$$

它表示圆柱的一部分.

四、补 充 例 题

例 1 试求空间圆

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9\\ 2x+y-2z+3=0,\end{cases}$$

的圆心与半径.

解 这里所求的圆心,就是从球心$(-1,2,3)$到平面$2x+y-2z+3=0$所引垂线的垂足,由于这垂线的参数方程为

$$\begin{cases}x=-1+2t,\\ y=2+t,\\ z=3-2t,\end{cases} \tag{1}$$

把它代入平面方程

$$2x+y-2z+3=0,$$

解得
$$t=\frac{1}{3},$$

代入(1)得圆心的坐标为

$$x=-\frac{1}{3},\quad y=\frac{7}{3},\quad z=\frac{7}{3},$$

所以所求空间圆的圆心为$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{7}{3}\right)$,

根据勾股定理,所求圆半径的平方等于球面半径平方与球心到圆所在平面的距离平方之差,而球心$(-1,\ 2,\ 3)$到圆所在平面$2x+y-2z+3=0$的距离为

$$d=\frac{|2\times(-1)+2-2\times 3+3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=1,$$

球面的半径$R=3$,所以所求圆的半径为

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}.$$

例 2 求准线为

$$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=2,\\ z=3,\end{cases}$$

且母线平行于 z 轴的柱面方程.

解法一 设 (x_1,y_1,z_1) 为准线上任意一点，过这点的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1},\tag{2}$$

其中 x_1,y_1,z_1 应满足条件

$$\begin{cases}x_1^2-\dfrac{y_1^2}{4}+\dfrac{z_1^2}{9}=2,\\ z_1=3,\end{cases}\tag{3}$$

由(2)和(3)的第二式得 $x_1=x,y_1=y,z_1=3$ 代入(3)的第一式得

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1,$$

这就是所求柱面方程,它是一个双曲柱面.

解法二 准线方程经过同解变形可以写成

$$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}=1,\\ z=3,\end{cases}$$

上式表明已知准线可以看作是母线平行于 z 轴的双曲柱面 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 和平面 $z=3$ 的交线,因此所求柱面就是双曲柱面

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1.$$

例 3 已知圆柱面的准线是过三点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$的圆,母线垂直于过这三点所在的平面，求这圆柱面的方程.

解法一 先写出准线方程与母线方向。由题意知，这准线圆可以看作是过三点 A,B,C 的平面和过这三点的球面的交线。为确定这样的球面方程，可以取与已知三点等距离的原点为球心。于是这球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

过已知三点的平面为

$$x+y+z=1,$$

因此准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=1. \end{cases}$$

所求圆柱面的母线垂直于圆所在的平面，所以母线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{1,1,1\}$.

因此过准线上任意一点 (x_1,y_1,z_1) 的母线为

$$x-x_1=y-y_1=z-z_1(=t), \tag{4}$$

且

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=1, \\ x_1+y_1+z_1=1, \end{cases} \tag{5}$$

由(4)解出 x_1,y_1,z_1，再代入(5)，得

$$\begin{cases} (x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=1, \\ (x-t)+(y-t)+(z-t)=1, \end{cases} \tag{6}$$

从(6)的第二式解出 t，代入(6)的第一式，得

$$\left(x-\frac{x+y+z-1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{x+y+z-1}{3}\right)^2$$

$$+\left(z-\frac{x+y+z-1}{3}\right)^2=1,$$

化简整理得

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-1=0,$$

这就是所求圆柱面的方程。

解法二 圆柱面是一种特殊的柱面，它可以看作是到圆柱轴线的距离相等的点的轨迹．这距离是圆柱面的半径．因此如果知道圆柱面的轴和圆柱面的半径，就可以求出圆柱面的方程．

在本题中，根据解法一中所求准线圆方程可以知道，圆柱的轴线就是球 $x^2+y^2+z^2=1$ 的球心 $O(0,0,0)$ 到平面 $x+y+z=1$ 的垂线．这条垂线通过原点 O，且具有方向向量 $\boldsymbol{v}=\{1,1,1\}$，圆柱面的半径 r 就是点 $A(1,0,0)$ 到轴的距离，由点到直线的距离公式得

$$r=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{|\{1,0,0\}\times\{1,1,1\}|}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

点 $M(x, y, z)$ 在圆柱面上的充要条件是点 M 到轴线的距离等于 $\sqrt{\frac{2}{3}}$，即

$$\frac{|\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

因为 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\},\quad \boldsymbol{v}=\{1,1,1\},$

所以

$$\frac{\sqrt{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

于是化简得所求圆柱面方程为

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=2,$$

即

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-1=0.$$

例 4 已知锥面的顶点是原点，准线方程是

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=k, \quad (k\neq0)\end{cases}$$

求锥面方程．

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是锥面上任一点，那么过点 M_1 的母线

为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}, \tag{7}$$

由于点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$在准线上，所以有

$$\begin{cases} f(x_1,y_1)=0, \\ z_1=k, \end{cases} \tag{8}$$

由(7)及(8)的第二式得

$$x_1=\frac{kx}{z}, \qquad y_1=\frac{ky}{z}, \tag{9}$$

(9)代入(8)的第一式得

$$f\left(\frac{kx}{z},\ \frac{ky}{z}\right)=0.$$

这就是所求的锥面方程，它是一个关于 x，y，z 的齐次方程.

注 同理，顶点是原点，准线是$\begin{cases} g(x,z)=0 \\ y=k \end{cases}$的锥面方程是 $g\left(\frac{kx}{y},\ \frac{kz}{y}\right)=0$，顶点是原点，准线是$\begin{cases} k(y,z)=0 \\ x=k \end{cases}$的锥面方程是 $k\left(\frac{ky}{x},\ \frac{kz}{x}\right)=0$.

根据例 4 的结论，容易直接写出顶点在原点，准线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=k, \end{cases}$$

的锥面方程为

$$\frac{\left(\frac{kx}{z}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{ky}{z}\right)^2}{b^2}=1.$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{k^2}=0. \tag{10}$$

又如顶点为原点，准线为双曲线

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=k,\end{cases}$$

的锥面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{k^2}=0. \tag{11}$$

(10)与(11)的图形都是二次锥面.

例 5 已知两相交直线 $l_1: x=y=z$ 与 $l_2: \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$, 试求以直线 l_1为轴,且通过直线 l_2的圆锥面的方程.

解法一 本题中没有直接给出锥面的顶点和准线方程,不难知道,锥面顶点就是直线 l_1与 l_2的交点,即坐标原点 O,在母线 l^2 上任取一点,例如取点 $A(2,-1,2)$,过点 A 且垂直于轴的平面和圆锥面的交线是一个圆,这圆就是一条准线,因为这个圆又可以看成以原点 O 为中心,$|\overrightarrow{OA}|=3$ 为半径的球面与过点 A 且垂直于圆锥面的轴线的平面的交线,所以它的方程可以表示成

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x+y+z-3=0,\end{cases}$$

于是过这准线上任意一点(x_1,y_1,z_1)的母线方程为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}, \tag{12}$$

且 x_1,y_1,z_1满足条件

$$\begin{cases}x_1^2+y_1^2+z_1^2=9,\\ x_1+y_1+z_1-3=0\end{cases} \tag{13}$$

从(12),(13)消去参数 x_1,y_1,z_1,就得到所求圆锥面的方程为

$$xy+yz+zx=0.$$

解法二 因为圆锥面的母线和轴相交成等角,由此得第二种解法.

设 $M(x,y,z)$为圆锥面上不与顶点重合的任意一点,那么母

线 OM 和轴的交角等于已知母线和轴的交角. 本题中已知轴的方向向量 $\boldsymbol{v}_0=\{1,1,1\}$,已知母线的方向向量 $\boldsymbol{v}_1=\{2,-1,2\}$, 而 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$,根据空间两直线的交角公式得

$$\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{v}_0}{|\overrightarrow{OM}||\boldsymbol{v}_0|}=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_0}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_0|},$$

即
$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{3}}=\frac{3}{3\sqrt{3}},$$

化简得
$$xy+yz+zx=0.$$

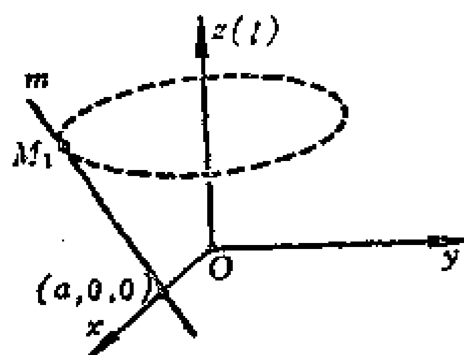


图 7-1

注 圆柱面与圆锥面都可以看作是它的一条母线绕轴旋转所生成的旋轴曲面. 因此如果已知它们的轴与一条母线, 就可以写出它们的方程. 读者可以作为练习, 按照建立旋转曲面方程的一般方法,求出例 3 和例 5 中的圆柱面和圆锥面的方程.

例 6 设 l 与 m 是两条不垂直的异面直线, 试求直线 m 绕直线 l 旋转所成旋转曲面的方程.

解 以 l 为 z 轴, l 与 m 的公垂线为 x 轴, 建立直角坐标系(图 7-1),设直线 m 和 x 轴的交点为 $(a,0,0)$,又因直线 m 垂直于 x 轴, 但不垂直于 z 轴, 所以可设直线 m 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{0,b,1\}$, 于是直线 m 的方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{b}=\frac{z}{1},$$

这就是旋转曲面的一条母线,

过母线 m 上任一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 的纬圆总可看成以原点 O 为中心, $|\overrightarrow{OM_1}|$ 为半径的球面与过点 M_1 且垂直于轴线 l 的平面的交线,所以此纬圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2, \\ z=z_1, \end{cases} \tag{14}$$

其中(x_1, y_1, z_1)应满足母线方程，即有

$$\frac{x_1-a}{0}=\frac{y_1}{b}=\frac{z_1}{1}, \tag{15}$$

由(15)及(14)的第二式解出 x_1, y_1, z_1得

$$\begin{cases} x_1=a, \\ y_1=bz, \\ z_1=z, \end{cases} \tag{16}$$

将(16)代入(14)得所求的旋转曲面的方程

$$x^2+y^2=a^2+b^2z^2,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中$c^2=\frac{a^2}{b^2}$，它的图形是一个单叶旋转双曲面．

五、自我测验题

1．填空题

(1) 在空间直角坐标系下，方程$\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$的图形是________，

$z=x^2+1$ 的图形是________，

$xy=1$ 的图形是________，

$x^2-y^2+2z^2=0$ 的图形是________，

$(y-2)(z-2)=0$ 的图形是________，

$\begin{cases} y-2=0 \\ z-2=0 \end{cases}$的图形是________

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 的图形是________

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=5\end{cases}$ 的图形是________

(2) 一直径的两端点为(1,2,-3)，(3，0，1)的球面方程为________；

(3) 圆$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25 \\ z=3\end{cases}$的圆心为________，半径等于________；

(4) 点(a,b,c)绕z轴，y轴和直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$旋转所生成的圆的方程分别为________，________，________；

(5) 直线$\begin{cases}y-z=0 \\ x=0\end{cases}$绕$y$轴和$z$轴旋转所生成的旋转曲面方程分别为________和________.

2．求通过两点(0,2,2)，(0,4,0)且球心在y轴上的球面方程.

3．求曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2, \\ z=2y,\end{cases}$在三坐标面上的射影柱面方程，并说出这些柱面的名称和母线方向.

4．求证以直线$\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$为轴，半径为$r$的圆柱面方程为
$(ny-mz)^2+(lz-nx)^2+(mx-ly)^2=r^2(l^2+m^2+n^2)$.

5．已知锥面顶点在原点，准线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=3 \\ x^2+y^2+z^2=25\end{cases}$$

求锥面方程.

第八章　二次曲面

一、内容概述

本章在直角坐标系下，通过对椭球面，双曲面与抛物面的标准方程的讨论，并利用平面截割的方法，了解曲面的性质，由此推想出曲面的大致形状．最后讨论了单叶双曲面与双曲抛物面的直纹性．

本章内容可分为下面两个单元：

第一单元：椭球面、双曲面与抛物面的标准方程、性质与形状．这一单元是本章的主要内容，它包括教材的§8.1，§8.2与§8.3，在这三节中，介绍了讨论二次曲面方程的基本方法，通过对椭球面、双曲面与抛物面方程的讨论，不仅了解了这些曲面的一些性质，而且由此能推想出这些曲面的大致形状，从而也就可以画出它们的草图．

第二单元：二次曲面的直纹性，即教材的§8.4．在二次曲面中，除了二次柱面与二次锥面显然是直纹面外，本单元还讨论了单叶双曲面与双曲抛物面的直纹性，指出它们都可以由直线族生成．

二、学习要求

1．掌握讨论二次曲面方程的方法，能熟练地利用平面截割的方法来认识空间曲面的形状．

2．掌握椭球面、双曲面与抛物面的标准方程与主要性质，并能根据这些曲面的标准方程画出它们的图形．

3．了解单叶双曲面与双曲抛物面的直纹性、并掌握求直母线的方法．

三、学习辅导

1．椭球面、双曲面与抛物面的标准方程，性质与形状

1）椭球面、双曲面与抛物面都是用方程来定义的，这种定义叫做解析法定义。用解析法定义的曲面，它的几何特征是很不明显的，为此我们必须对方程进行讨论，然后才能了解曲面的性质，和推想出方程所表示的曲面的大致形状．

2）椭球面与双曲面都是中心二次曲面，它们的方程可写成统一的形式

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1,(ABC\neq 0). \tag{1}$$

当三平方项系数 A,B,C 均为正时，(1)表示椭球面；当三平方项系数 A,B,C 中有两项为正，另一项为负，(1)表示单叶双曲面；当三平方项系数 A,B,C 中只有一项为正，另两项为负．(1)表示双叶双曲面；而当 A,B,C 均为负时，方程(1)不表示任何实图形，或者称它为虚曲面．例如当 $A>0,B<0,C>0$ 时，方程(1) 可改写为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

其中$\frac{1}{a^2}=A,\frac{1}{b^2}=-B,\frac{1}{c^2}=C$，这是单叶双曲面的标准方程．

抛物面的方程可统一写为

$$Ax^2+By^2=2z,(AB\neq 0). \tag{2}$$

当两平方项系数同号，即 $AB>0$ 时，(2)为椭圆抛物面；当两平方项系数异号，即$AB<0$ 时，(2)为双曲抛物面．例如当$A>0$，$B<0$时，(2)式可改写为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

其中$\frac{1}{a^2}=A$，$\frac{1}{b^2}=-B$，这是双曲抛物面的标准方程.

3）讨论曲面的对称性与范围 和平面解析几何中讨论曲线的对称性与范围是完全类似的，并且在空间也有类似的性质：(i) 如果曲面Σ关于三坐标平面对称，那么曲面Σ关于坐标原点也对称；(ii) 如果曲面Σ关于两坐标轴对称，那么曲面Σ关于第三条坐标轴也对称(这两性质的证明，见补充例题). 例如椭球面与双曲面，由于它们关于三坐标面都对称，因此关于坐标原点也必然对称，但是抛物面却没有这个性质.

4）由曲面的方程来认识曲面的形状，并画出它的图形，这是本章的主要内容之一. 我们介绍了“平行平面截割法”，也就是用一族平行平面(一般平行于坐标面)来截割曲面，研究所截得的一族曲线是怎样变化的，从这一族截线的变化情况，就能推想出方程所表示的曲面的整体形状，从而也就可以画出曲面的图形. 这是一个根据曲面的方程来认识它的形状的重要方法. 它的基本思想是把复杂的空间图形归结为比较容易认识的平面曲线. 例如我们要识别方程

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1 \tag{3}$$

所表示的图形，并画出它的草图，可利用平行平面截割法讨论如下：

1° 曲面(3)被三坐标面截得的曲线分别为：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\\ z=0;\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1,\\ y=0;\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1, \\ x=0;\end{cases} \tag{6}$$

(4)为 xOy 面上的双曲线，(5) 为 xOz 坐标面上的椭圆，(6) 为 yOz 面上的双曲线。

2° 曲面(3)被平行于 xOz 面的一族平行平面截得的一族曲线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=1+\dfrac{t^2}{9}, \\ y=t,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4\left(1+\dfrac{t^2}{9}\right)}+\dfrac{z^2}{16\left(1+\dfrac{t^2}{9}\right)}=1, \\ y=t,\end{cases} \tag{7}$$

这是一族椭圆，其中的任一椭圆的两双顶点 $\left(\pm 2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{9}},\ t,\ 0\right)$ 与 $\left(0, t, \pm 4\sqrt{1+\dfrac{t^2}{9}}\right)$ 分别在双曲线(4)与(6)上。

这样我们就可推想出曲面(3)的大致形状，并且当截线(4)，(5)，(6)，(7)画出后，曲面(3)的草图也就可以描出了。如图 8-1 所示。

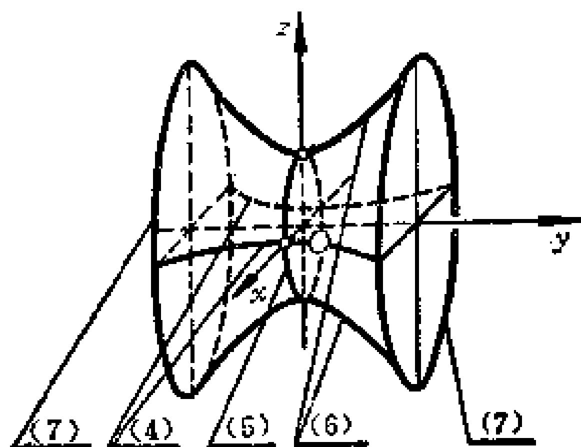


图 8-1

2. 二次曲面的直纹性

1) 柱面与锥面显然都是直纹面，单叶双曲面与双曲抛物面也都是直纹面. 如果将单叶双曲面的方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

改写为一次因式乘积的形式

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

那么就容易写出它的直母线族的方程为

$$\begin{cases}\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}\quad(\lambda,\mu\text{ 不全为零}),$$

或

$$\begin{cases}\lambda'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu'\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\ \mu'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda'\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}\quad(\lambda',\mu'\text{不全为零}).$$

同样地，把双曲抛物面的方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,$$

改写为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z.$$

那么直母线族的方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z,\end{cases}\quad(\lambda\text{ 为任意实数}),$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\lambda', \\ \lambda'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z,\end{cases}\quad (\lambda'\text{为任意实数}).$$

上面这种确定直母线族的方法叫做析因式法. 利用这个方法，我们也能求出二次柱面与二次锥面的直母线族. 例如椭圆柱面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

把它改写为：

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)=\frac{y}{b}\cdot\frac{y}{b}$$

那么椭圆柱面的直母线族的方程为

$$\begin{cases}\lambda\left(1+\dfrac{x}{a}\right)=\mu\cdot\dfrac{y}{b}, \\ \mu\left(1-\dfrac{x}{a}\right)=\lambda\cdot\dfrac{y}{b},\end{cases}\quad (\lambda,\mu\text{ 不全为零}),$$

它只有一族直母线.

2）对于双曲抛物面的直母线族方程不用双参数，这是因为如果将它的一族直母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}\tag{8}$$

改写为双参数形式

$$\begin{cases}\mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2\lambda \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=\mu z\end{cases}\tag{9}$$

那么当 $\mu=0$ 时，必有 $\lambda=0$，所以如果要写成双参数的形式(9)，必须附加条件 $\mu\neq0$，但是这样(9)式实质上就是(8)，因为当(9)式的

两方程的两边同时除以 μ，就立刻变成(8)的形式了.

四、补充例题

例 1 试证明：(1) 如果曲面Σ关于三坐标平面对称，那么曲面Σ关于坐标原点也对称；(2) 如果曲面Σ关于两坐标轴对称，那么曲面Σ关于第三条坐标轴也对称.

证 (1) 设 $P(x,y,z)$ 为曲面Σ上的任意点，因为Σ关于三坐标平面对称，所以点 $P(x,y,z)$ 关于 xOy 坐标面的对称点 $P'(x,y,-z)$也在曲面Σ上，点 $P'(x,y,-z)$关于xOz 坐标面的对称点 $P''(x,-y,-z)$ 也在曲面Σ上，点 $P''(x,-y,-z)$关于 yOz 坐标面的对称点$P'''(-x,-y,-z)$ 也在曲面Σ上，于是当点 $P(x,y,z)$在曲面Σ上时，点 $P'''(-x,-y,-z)$ 也一定在曲面Σ上，所以曲面关于坐标原点对称.

(2) 设Σ关于 x 轴与 y 轴都对称，现在来证明Σ关于 z 轴也对称.

设 $P(x,y,z)$为曲面Σ上的任意点，因为曲面关于 x 轴对称，所以点 $P(x,y,z)$ 关于 x 轴的对称点 $P'(x,-y,-z)$ 也在曲面Σ上，又因为曲面关于 y 轴也对称，所以点 $P'(x,-y,-z)$关于 y 轴的对称点 $P''(-x,-y,z)$也在曲面Σ上，于是当点 $P(x,y,z)$在曲面Σ上时，点 $P''(-x,-y,z)$也一定在曲面Σ上，所以曲面关于 z 轴也对称.

例 2 设A，B，C与P为直线 l 上的四个定点，P与A，B，C的距离分别为 a，b，c，当直线 l 在空间变动，但始终保持三定点A，B，C分别在 yOz，zOx，xOy 坐标面上移动（图 8-2)，试求点P的轨迹方程.

解 设直线 l 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，P 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，那么直线 l 的方程为

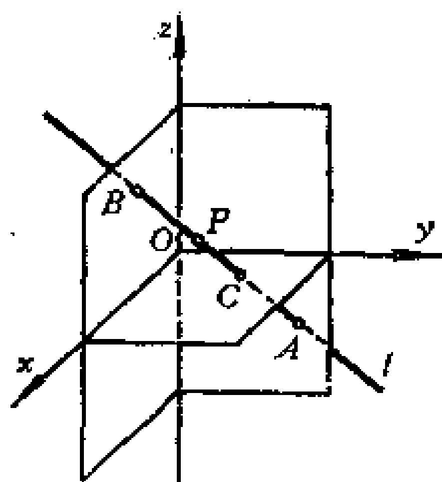


图 8-2

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\cos\beta,\\ z=z_0+t\cos\gamma,\end{cases}$$

因为点 A 在 yOz 坐标面上，所以它的横坐标 $x=0$，从而点 A 对应的参数 t 满足

$$x_0+t\cos\alpha=0,$$

根据 t 的几何意义 $|t|=|\overrightarrow{PA}|=a$，得

$$x_0\pm a\cos\alpha=0, \tag{1}$$

或

$$x_0=\pm a\cos\alpha.$$

再从 B，C 分别在 xOz 坐标面与 xOy 坐标面上，类似地可得

$$y_0=\pm b\cos\beta, \tag{2}$$

与

$$z_0=\pm c\cos\gamma, \tag{3}$$

由(1)，(2)，(3)三式得

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

所以点 P 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

它是一个椭球面.

注 平面解析几何中有这样的习题：设 A，B 与 P 为直线 l 上的三个定点，且 $|\overrightarrow{PA}|=a$，$|\overrightarrow{PB}|=b$，当直线 l 在平面上变动，但始终保持 A 在 y 轴上与 B 在 x 轴上滑动，求直线 l 上的第三个定点 P 的轨迹. 这道习题推广到空间就是这里的例 2，而且它们的解法也是十分类似的.

例 3 试作下列曲线的图形.

(1) $\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{25}=1,\\ x=-4;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2=6z,\\ y=0;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,\\ z=3.\end{cases}$

解 (1) 这是一个在平面 $x=-4$ 上的椭圆，它的中心在$(-4,0,0)$，长轴平行于 z 轴，短轴平行于 y 轴，且椭圆的长半轴为5，短半轴为2，因此我们先作平面 $x=-4$，然后根据给出的方程在此平面上先画出椭圆的四个顶点$(-4,\pm 2,0)$与$(-4,0,\pm 5)$，和椭圆的外切矩形，然后画椭圆，如图 8-3.

(2) 这是一条在 xOz 坐标面上的抛物线，顶点在原点，对称轴为 z 轴，抛物线的凹向与 z 轴的正向一致，它的图形如图 8-4.

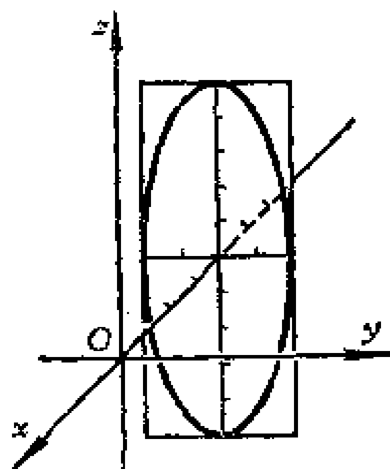


图 8-3

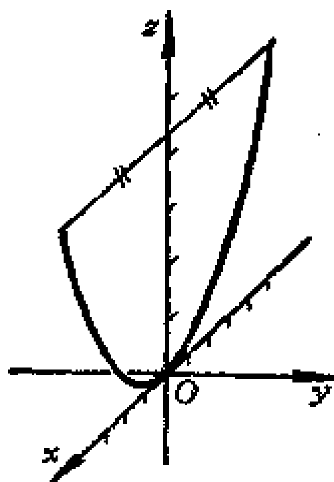


图 8-4

(3) 这是一条在平面 $z=3$ 上的双曲线. 双曲线的实轴平行于 y 轴，虚轴平行于 x 轴，中心在$(0,0,3)$，且实半轴长为4，虚半轴长为2. 先作平面 $z=3$，然后在此平面上画双曲线的渐近线，再作双曲线，如图 8-5.

注 画好坐标面上或平行于坐标面的平面上的二次曲线，对画好二次曲面的图形是十分重要的，读者应多练习，掌握它的画法. 一般地说，画这样的二次曲线的步骤为：

1° 画出二次曲线所在的平面；

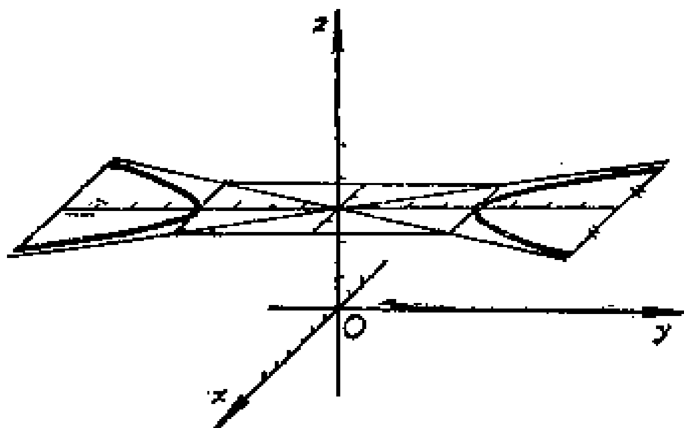


图 8-5

2° 确定二次曲线的中心或顶点，画出对称轴；

3° 画出作图辅助线．如椭圆的外切矩形，双曲线的基本矩形与渐近线等．

4° 画出二次曲线的近似图形．

例 4 试作椭圆抛物面$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=y$的图形．

解 先画出曲面在三坐标面上的截线．曲面被 xOy 坐标面所截得的截线为抛物线

$$\begin{cases}x^2=4y,\\z=0;\end{cases}$$

被 xOz 坐标面截得的曲线退化为一点

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0,\\y=0,\end{cases}$$

被 yOz 坐标面截得的曲线为抛物线

$$\begin{cases}z^2=9y,\\x=0.\end{cases}$$

其次画出被平行于 xOz 坐标面的平面 $y=h(h>0)$所截得的椭圆．

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4h}+\dfrac{z^2}{9h}=1,\\ y=h.\end{cases}$$

从这些所画的截线，就能得出所求作的椭圆抛物面的大致图形(图 8-6).

例 5 画出由曲面 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 与 $3(x^2+y^2)=16z$ 所围成的立体图形.

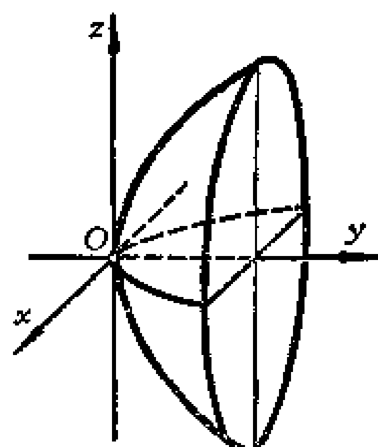


图 8-6

解 把已知曲面方程改写为

$$x^2+y^2+z^2=25,\ (z\geqslant 0) \tag{4}$$

与

$$\frac{x^2}{\frac{8}{3}}+\frac{y^2}{\frac{8}{3}}=2z, \tag{5}$$

从而易知(4)为中心在原点，半径为 5 的上半球面，而(5)为旋转抛物面，它的顶点在原点，旋转轴为 z 轴，开口方向与 y 轴正向一致. 这个旋转抛物面可以看成是由抛物线

$$\begin{cases}y^2=\dfrac{16}{3}z,\\ x=0\end{cases}$$

绕 z 轴旋转而成. 为了要画出它们所围成的立体图，必须求出这两曲面的交线，而交线方程为

$$\begin{cases}3(x^2+y^2)=16z,\\ z=\sqrt{25-x^2-y^2},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}3(x^2+y^2)=16z,\\ x^2+y^2+z^2=25,\end{cases}\quad (z\geqslant 0)$$

或者变形为

$$\begin{cases}(3z+25)(z-3)=0,\\ x^2+y^2+z^2=25,\end{cases}\quad (z\geqslant 0)$$

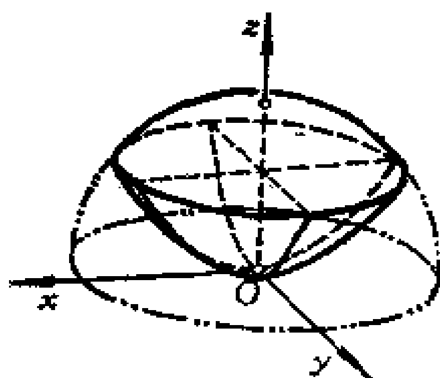


图 8-7

因为 $z\geqslant 0$，所以交线方程为

$$\begin{cases} z-3=0, \\ x^2+y^2+z^2=25, \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} z=3, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$$

这是平面 $z=3$ 上的一个圆，圆心为 $(0,0,3)$，半径为 4. 于是所求立体图如图 8-7 所示.

例 6 试求单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ 上平行于平面 $6x+4y+3z-17=0$ 的直母线.

解 单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ 的一族直母线为

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{3}\right), \\ \mu\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{4}\right)=\lambda\left(1-\frac{y}{3}\right), \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 6\lambda x-4\mu y+3\lambda z-12\mu=0, \\ 6\mu x+4\lambda y-3\mu z-12\lambda=0. \end{cases}$$

直母线的方向向量为

$$\boldsymbol{v}=\left\{\begin{vmatrix} -4\mu & 3\lambda \\ 4\lambda & -3\mu \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3\lambda & 6\lambda \\ -3\mu & 6\mu \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6\lambda & -4\mu \\ 6\mu & 4\lambda \end{vmatrix}\right\}$$
$$=\{12(\mu^2-\lambda^2),\ 36\lambda\mu,\ 24(\lambda^2+\mu^2)\},$$

直母线平行于已知平面的条件为 $\boldsymbol{v}$ 垂直于已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{6,4,3\}$，从而有

$$6\times 12(\mu^2-\lambda^2)+4\times 36\lambda\mu+3\times 24(\lambda^2+\mu^2)=0,$$

化简整理得

$$\mu(\lambda+\mu)=0,$$

所以
$$\mu=0,\ \lambda=-\mu,$$

于是得两条平行于已知平面的直母线为

$$\begin{cases}2x+z=0,\\ y-3=0\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}6x+4y+3z+12=0,\\ 6x-4y-3z+12=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2x+z=0,\\ y-3=0\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}x+2=0,\\ 4y+3z=0.\end{cases}$$

单叶双曲面的另一族直母线为

$$\begin{cases}\lambda'\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{4}\right)=\mu'\left(1-\dfrac{y}{3}\right),\\ \mu'\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{4}\right)=\lambda'\left(1+\dfrac{y}{3}\right).\end{cases}$$

类似地可求得平行于已知平面的另外两条直母线为

$$\begin{cases}2x+z=0,\\ y+3=0\end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases}x-2=0,\\ 4y+3z=0.\end{cases}$$

五、自我测验题

1．填空题

(1) 方程 $x^2-2y^2+3z^2+6=0$ 所表示的曲面叫做________，方程 $x^2+2y^2+3z^2-6=0$ 表示的曲面叫做________；方程 $x^2-y^2-z^2+2=0$ 表示的曲面叫做________；方程 $x^2+4y^2+8z=0$ 表示的曲面叫做________；方程 $z^2-6x^2-24y=0$ 表示的曲面叫做________。

(2) 二次曲面 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 被 xOy 坐标面截得的曲线方程为________，曲线叫做________；被 xOz 坐标面截得的曲线方程为________，曲线叫做________；被 yOz 坐标面截得的曲线方程为________，曲线叫做________；被平面 $y=3$ 截得的曲线方程为________，曲线叫做________；被平面 $z=3$ 截得的曲线方程为________，曲线叫做________。

(3) 曲面$y^2-\frac{z^2}{4}=2x$关于________对称.

(4) 二次锥面$x^2+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$的直母线方程为________.

2. 如果从椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的中心按单位向量$e=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$所确定的方向到球面上的点$P$的距离为$p$，试证明

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

3. 已知抛物面的顶点在原点，对称面为xOy坐标面与xOz坐标面，并且通过点$P(2,1,0)$与点$Q\left(1,\frac{1}{3},-1\right)$，求这抛物面的方程.

4. 用一族平行于xOz坐标面的平面$y=t$（t为参数）来截割椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，试证明截线为一族抛物线，并求这族抛物线顶点的轨迹.

5. 求通过直纹面$z=xy$上的点(x_0,y_0,z_0)的直母线方程.

6. 作出方程$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$的图形.

*第九章　一般二次曲面方程的研究

一、内 容 概 述

本章首先介绍空间的直角坐标变换，然后介绍径面，主径面，最后以主径面为新坐标系的坐标平面，利用空间直角坐标变换，对二次曲面方程进行化简和分类。

本章内容分为三个单元.

第一单元：空间直角坐标变换，这就是教材的§9.1．在这一单元中，介绍了空间的移轴，转轴和一般直角坐标变换的公式．还介绍了以三个两两相互垂直的已知平面为新坐标面的空间直角坐标变换的公式。

第二单元：二次曲面的径面与主径面，即教材的§9.2．在这一单元里，介绍了二次曲面的径面的几何定义和它的方程，以及二次曲面主径面的几何定义与求主径面的方法．这一单元的内容主要为化简二次曲面方程作准备.

第三单元：二次曲面方程的化简与分类，即教材的§9.3，这是本章的中心内容．这一单元里先讨论了坐标平面为主径面时的二次曲面方程的特点，为化简二次曲面方程提供了主要的思想方法．在此基础上，介绍了如何通过适当的坐标变换把二次曲面方程化为标准方程，並由此得出二次曲面的十七种类型.

二、学 习 要 求

1．掌握空间直角坐标变换的公式、特点及其应用.

2．熟练掌握求二次曲面径面和主径面的方法、步骤.

3．能熟练地化简二次曲面方程，並识别它的图形.

三、学 习 辅 导

1. 空间直角坐标变换

1）空间直角坐标变换公式中系数的几何意义

空间直角坐标变换和平面直角坐标变换一样，也有移轴，转轴与一般直角坐标变换.

设 P 为空间任意一点，它在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$和$\{O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$中的坐标分别为$(x,y,z)$和$(x',y',z')$，那么坐标变换公式为

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3+x_0,\\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3+y_0,\\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3+z_0,\end{cases}\qquad(1)$$

或

$$\begin{cases}x'=(x-x_0)\cos\alpha_1+(y-y_0)\cos\beta_1+(z-z_0)\cos\gamma_1\\ y'=(x-x_0)\cos\alpha_2+(y-y_0)\cos\beta_2+(z-z_0)\cos\gamma_2,\\ z'=(x-x_0)\cos\alpha_3+(y-y_0)\cos\beta_3+(z-z_0)\cos\gamma_3.\end{cases}\qquad(1')$$

(1) 中系数和常数项的几何意义是：

(x_0, y_0, z_0)是新坐标系原点 O' 在旧坐标系中的坐标，因此当$x_0=y_0=z_0=0$时，O' 与 O 重合，(1)与$(1')$就是转轴公式.

如果把坐标变换公式(1)或$(1')$的系数按它们原来在(1)或$(1')$中的位置排成表格如下：

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}$$

并分别称它们为(1)或$(1')$的系数矩阵，横写的叫做行，直写的叫做列，那么(1)的系数矩阵中第一、第二、第三行的元素依次是新坐标系的坐标向量$\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$在旧坐标系中的坐标，即

$\boldsymbol{i}'=\{\cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \cos\alpha_3\}$, $\boldsymbol{j}'=\{\cos\beta_1,\ \cos\beta_2,\ \cos\beta_3\}$, $\boldsymbol{k}'=\{\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \cos\gamma_3\}$，而(1)的系数矩阵中第一、第二、第三列的元素依次是旧坐标系的坐标向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$在新坐标系中的坐标，即

$\boldsymbol{i}=\{\cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1\}$, $\boldsymbol{j}=\{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\}$, $\boldsymbol{k}=\{\cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3\}$,

注意(1) 和(1′) 的系数矩阵的关系是：它们的行与列互相对调.

2) 空间直角坐标变换公式的特点

由于$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$与$\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$是两两垂直的单位向量，因此(1) 与(1′) 的系数必满足条件

$$\begin{cases}\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,\\ \cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=1,\\ \cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3=1,\\ \cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3=0,\\ \cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3=0,\\ \cos\gamma_1\cos\alpha_1+\cos\gamma_2\cos\alpha_2+\cos\gamma_3\cos\alpha_3=0;\end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases}\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,\\ \cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1,\\ \cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1,\\ \cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,\\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0,\\ \cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0.\end{cases} \tag{2'}$$

(2)与(2′) 都叫做正交条件. 这正交条件也可以这样来叙述：在(1) 与(1′)的系数矩阵中，同行(列)的元素的平方和等于1，不同行(列)的对应元素乘积之和等于0.

又因为我们一般都采用右手直角坐标系，所以

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=1,(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')=1,$$

即(1) 和(1′) 的系数行列式都等于1.

由此可知，右手系到右手系的空间直角坐标变换公式必须满足如下条件：

1° 变换式右端是 x',y',z' 或 x,y,z 的一次式；

2° 变换式的系数满足正交条件；

3° 系数行列式等于1.

反过来，适合上述条件的变换式总可以看作是右手系到右手系的空间直角坐标变换.

顺便指出，平面上的直角坐标变换公式

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0, \end{cases} \tag{3}$$

或

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases} \tag{3'}$$

显然也具有类似的特点：右端是关于 x',y' 或 x,y 的一次式；满足正交条件，即系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

的同行(列)的元素平方和为1，不同行(列)的对应元素乘积之和为0；系数行列式等于1. 我们还看到，上面两个系数矩阵之间的关系也是行列对调. 记住上述特点，有利于我们对直角坐标变换公式的记忆和判别.

2. 二次曲面的径面与主径面

1) 二次曲面的径面

1° 二次曲面的径面定义为平行弦中点的轨迹. 根据教材的定理9.2.1知道，二次曲面的径面都是平面，如果二次曲面方程为

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

平行弦的方向为 $X:Y:Z$，那么对应的径面方程为

$$(a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z)x+(a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z)y$$
$$+(a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z)z+(a_{14}X+a_{24}Y+a_{34}Z)=0 \quad (5)$$

称这径面为共轭于这组平行弦(或平行弦方向)的径面，而这组平行弦(或弦的方向)叫做这个径面的共轭弦(或共轭方向).

2° 在讨论二次曲面的径面时，我们实际上引进了空间的虚点(见教材§9.2的脚注). 在这里引进虚点的目的是为了讨论问题的方便，使一些结论具有一般性，例如，引进虚点后可以得出这样的结论：具有方向 $X:Y:Z$ 的直线和二次曲面(4)有两个交点(两不同实点，两重合实点或两共轭虚点)的条件是直线的方向 $X:Y:Z$ 满足条件

$$(a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z)X+(a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z)Y$$
$$+(a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z)Z\neq 0,$$

即 $\quad a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{12}XY+2a_{13}XZ+2a_{23}YZ\neq 0,$

如果不引进虚点，那么除上述条件外，还要附加其它的条件. 又如引进虚点后，才有定理9.2.1平行弦中点轨迹是一个平面，如果不引进虚点，那么定理9.2.1中的平行弦只是端点为实点的弦，平行弦的中点轨迹可能只是平面的一部分. 以椭球面为例，以实点为端点的弦都在椭球面内部，于是平行弦中点也在椭球面内部，平行弦中点轨迹就不再是整个平面了.

2) 二次曲面的主径面

1° 二次曲面的主径面定义为垂直于它的共轭弦的径面. 因此二次曲面的主径面不但平分它的共轭弦而且还垂直于它的共轭弦，因此二次曲面的主径面一定是二次曲面的对称平面.

在教材的第八章里，我们看到，当椭球面、双曲面、抛物面的方程为标准方程时，总有几个坐标平面是曲面的对称面，因此很自然想到如果用二次曲面的对称面作为新坐标系的坐标平面，那么将有利于二次曲面方程的化简. 这就是在化简二次曲面方程之前，

所以要介绍径面与主径面的主要原因。

2° 根据教材§9.2中的讨论，可得出求二次曲面的主径面的方法步骤如下：

i）写出二次曲面(4)的特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

即
$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=0.$$

并求出非零特征根①。

ii）把非零特征根 λ 代入方程组

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)X+a_{12}Y+a_{13}Z=0,\\ a_{12}X+(a_{22}-\lambda)Y+a_{23}Z=0,\\ a_{13}X+a_{23}Y+(a_{33}-\lambda)Z=0\end{cases}$$

求出对应于 λ 的非奇主方向 $X:Y:Z$。

iii）求出共轭于非奇主方向的共轭径面，就是二次曲面的主径面。

3．二次曲面方程的化简

教材中所介绍的化简二次曲面方程的方法，是以坐标面为主径面时的二次曲面方程的特点作为主要依据的．例如，如果 yOz 坐标面为二次曲面(3)的主径面，那么在方程(3)中，对于变数 x 只有它的平方项，而这变数与其它两变数的乘积项以及这变数的一次

① 这里的 $I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$,

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

I_1，I_3 的表达式是容易记忆的，而 I_2 是在行列式 I_3 中依次划去 a_{33}，a_{22}，a_{11} 所在的行与列以后所得到的三个二阶行列式之和。

项都不出现，即 $a_{11}\neq 0$，而 $a_{12}=a_{13}=a_{14}=0$.

教材中的定理 9.3.1 的证明过程，实际上指出了化简二次曲面方程的方法，但这个方法在实际应用中，一般地说并不方便，为此在 §9.3 的举例中，把这个方法作了改进，从而得出化简二次曲面方程的步骤如下：

1° 写出二次曲面的特征方程，求出非零特征根.

2° 求出非零特征根对应的主方向，即非奇主方向. 对应于单根，有唯一主方向，对应于二重根，有无穷多主方向，在其中任意取定两个相互垂直的主方向.

3° 求出主方向所对应的主径面.

4° 取三个两两垂直的平面作为新坐标系的坐标平面，作直角坐标变换. 取法如下：如果有三个两两垂直的主径面，就以它们作为新坐标平面；如果只有两个相互垂直(或一个)主径面，再另取一个(或两个)平面，使所取平面与主径面两两垂直. 设这样的三个平面方程为

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad (i=1,2,3).$$

写出坐标变换公式

$$\begin{cases} x'=\pm\dfrac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \\ y'=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \\ z'=\pm\dfrac{A_3x+B_3y+C_3z+D_3}{\sqrt{A_3^2+B_3^2+C_3^2}}, \end{cases}$$

解出 x,y,z 代入原方程，就得到在新坐标系下曲面的方程.

5° 如果这方程还不是最简形式，可以再作一次直角坐标变换(移轴或教材 §9.3 例 2 中那种形式的变换)就可以得到二次曲面的简化方程，然后再化成标准方程.

注意

i) 如果二次曲面方程中有三个或二个平方项，但没有交叉项，那么通过移轴就可以化简.

ii) 化简过程中，写出的坐标变换公式必须满足正交条件以及系数行列式等于 1.

iii) 记住坐标面为主径面时二次曲面方程的特点，可以减少对新方程系数的计算，因为我们可以肯定其中某些项的系数必为零；因此，只要计算不为零的系数就可以了.

四、补充例题

例 1 证明，球面的特征根是一个非零三重根，空间的任何方向都是球面的非奇主方向，球面的主径面就是过球心的一切平面.

证 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2+2gx+2hy+2kz+l=0$，特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

即
$$(1-\lambda)^3=0,$$
所以特征根为 $\lambda=1$，它是非零三重根.

主方向由方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)X=0, \\ (1-\lambda)Y=0, \\ (1-\lambda)Z=0,\end{cases}$$

确定，当 $\lambda=1$时，方程组中每一个方程都成为恒等式，所以空间的任何方向 $X:Y:Z$ 都是对应于特征根 $\lambda=1$ 的非奇主方向.

共轭于任何主方向$X:Y:Z$的径面都是主径面，它们的方程为

$$Xx+Yy+Zz+(gX+hY+kZ)=0,$$

即 $$X(x+g)+Y(y+h)+Z(z+k)=0,$$

显然，这就是过球心$(-g,-h,-k)$的所有平面。

例 2 化简二次曲面

$$(2x+y+z)^2-(x-y-z)^2=y-z$$

的方程，写出坐标变换公式，并判定它的图形。

解 容易验证三平面 $2x+y+z=0$，$x-y-z=0$ 和 $y-z=0$两两垂直，把它们依次作为 yOz，zOx，xOy 坐标面，那么坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2}{\sqrt{6}}x+\dfrac{1}{\sqrt{6}}y+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z, \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y-\dfrac{1}{\sqrt{3}}z, \\ z'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z, \end{cases}$$

所以
$$2x+y+z=\sqrt{6}x',$$
$$x-y-z=\sqrt{3}y',$$
$$y-z=\sqrt{2}z',$$

代入原方程，得到简化方程

$$6x'^2-3y'^2=\sqrt{2}z',$$

它的图形是双曲抛物面.

例 3 化简二次曲面

$$x^2+4y+2z-3=0$$

的方程，并写出坐标变换公式。

解 考虑方程

$$4y+2z-3=0,$$

在 yOz 坐标面上，这方程表示一条直线，以这条直线作为z'轴，在yOz坐标面上再取与该直线垂直的任意直线，比如 $y-2z=0$ 为y'轴，在 yOz 坐标面上作平面直角坐标变换

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4y+2z-3}{2\sqrt{5}}, \\ z' = \dfrac{y-2z}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

于是方程$4y+2z-3=0$可以化为$2\sqrt{5}y'=0$,或$y'=0$.

相应地,二次曲面 $x^2+4y+2z-3=0$ 的方程经过空间直角坐标变换

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{4y+2z-3}{2\sqrt{5}}, \\ z' = \dfrac{y-2z}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

就可以简化成

$$x'^2+2\sqrt{5}y'=0.$$

注 对于这类方程的化简，一般可以直接写出空间直角坐标变换公式和二次曲面的简化方程. 平面上的坐标变换完全可以略去不写.

例 4 化简二次曲面

$$x^2+2yz-2y+2z-1=0$$

的方程

解法一 特征方程

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

特征根为 $\lambda=-1,1,1$.

对应于 $\lambda=-1$的主方向由方程组

$$\begin{cases} 2X=0, \\ Y+Z=0, \\ Y+Z=0, \end{cases}$$

确定，由此得$X:Y:Z=0:1:(-1)$，

对应于二重根 $\lambda=1$的主方向由方程组

$$\begin{cases}0=0,\\ -Y+Z=0,\\ Y-Z=0,\end{cases}$$

确定．满足$Y-Z=0$的一切方向，也就是和方向$0:1:(-1)$垂直的一切方向都是对应于 $\lambda=1$的主方向，在其中任取一个方向$0:1:1$，又因为$\{0,1,-1\}\times\{0,1,1\}=2\{1,0,0\}$，于是$0:1:(-1)$，$0:1:1$，$1:0:0$就是三个两两垂直的非奇主方向，分别代入径面方程

$$Xx+Zy+Yz+(-Y+Z)=0,$$

得到三个两两垂直的主径面 $y-z+2=0$，$y+z=0$，$x=0$，依次作新坐标系的 $y'O'z'$，$z'O'x'$，$x'O'y'$坐标面，那么坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=\dfrac{y-z+2}{\sqrt{2}},\\ y'=\dfrac{y+z}{\sqrt{2}},\\ z'=x,\end{cases}$$

解出x，y，z得

$$\begin{cases}x=z',\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'-1,\\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+1,\end{cases}$$

代入原方程，得曲面的简化方程为

$$x'^2-y'^2-z'^2=1. \tag{1}$$

这是旋转双叶双曲面．

解法二 这方程中的变数乘积项只有一项即yz项，我们知道对于平面上二次曲线$2yz-2y+2z-1=0$通过平面上的转轴

就可以消去乘积项，设旋转角为θ，

那么
$$\operatorname{ctg} 2\theta=\frac{0-0}{2}=0,$$

所以
$$\theta=\frac{\pi}{4},$$

转轴公式为
$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z', \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z', \end{cases}$$

代入二次曲线方程
$$2yz-2y+2z-1=0,$$

得
$$y'^2-z'^2+2\sqrt{2}z'-1=0,$$

相应地，二次曲面
$$x^2+2yz-2y+2z-1=0$$

通过空间直角坐标变换
$$\begin{cases} x=x', \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}z', \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}z', \end{cases}$$

就可使方程简化成
$$x'^2+y'^2-z'^2+2\sqrt{2}z'-1=0,$$

即
$$x'^2+y'^2-(z'-\sqrt{2})^2+1=0.$$

再作空间的移轴
$$\begin{cases} x'=x'', \\ y'=y'', \\ z'=z''+\sqrt{2}, \end{cases}$$

就得到二次曲面的简化方程
$$x''^2+y''^2-z''^2=-1. \qquad (2)$$

(2)和(1)的形式并不完全相同，但是只要再作一次空间直角坐标变换

$$\begin{cases} x''=z^*, \\ y''=y^*, \\ z''=-x^*, \end{cases}$$

那么(2)就化成

$$x^{*2}-y^{*2}-z^{*2}=1,$$

这就是方程(1)的形式了.

五、自我测验题

1. 填空题

(1) 以三个两两相互垂直的平面 $2x-y+2z+3=0$, $2x+2y-z+3=0$ 与 $x-2y-2z=0$ 分别作为新坐标系的 $y'O'z'$, $z'O'x'$ 与 $x'O'y'$ 坐标面，那么空间直角坐标变换公式为________.

(2) 二次曲面

$$2y^2-2xy+2xz-2yz+2x+y-3z-5=0$$

的特征方程是________，特征根是______，非奇主方向是______，奇向是________，主径面方程是________.

(3) 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z(a\neq b)$ 的特征方程是________，特征根是________，非奇主方向是________，主径面是________，奇向是________.

(4) 二次曲面 $x^2-y^2+2z^2+2x+4y+4z-5=0$ 的标准方程是________，坐标变换公式是________；$x^2+3y^2+x+3y-2z=0$ 的标准方程是________，坐标变化公式是________，$xy-z=0$ 的标准方程是________，坐标变换公式是________.

2．证明平行于直线$\begin{cases}x-y-1=0\\x-z+4=0\end{cases}$的所有直线和二次曲面$3x^2+z^2-2xy-yz-x-1=0$都有两个交点，并求与已知直线平行的弦的中点轨迹.

3．证明：如果二次曲面只有两个非零特征根，那么总可以适当选取坐标系，使方程简化为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{34}z+a_{44}=0,\ a_{11}a_{22}\neq 0,$$

的形式.

4．化简二次曲面

$$8x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-8yz+9x+18y=0$$

的方程.

5．化简二次曲面

$$2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y=0$$

的方程.

自我测验题解答

第 一 章

1．填空题

(1) 关于 x 轴的对称点为$(-1,-2)$，关于 y 轴的对称点为$(1,2)$，关于原点的对称点的坐标为$(1,-2)$，关于直线 $x-y=0$ 的对称为$(2,-1)$。

(2) 关于极轴的对称点是$\left(3,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$或$\left[-3,-\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi\right]$，关于极点的对称点是$\left[3,\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi\right]$或$\left(-3,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$，关于过极点且垂直于极轴的直线的对称点是$\left[3,-\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi\right]$或$\left(-3,-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$。

(3) 顶点 C 的坐标为$(3,2)$，AB 边上的中线长为$\frac{3}{2}\sqrt{5}$。

(4) 双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$。

(5) 当 $\lambda<b^2$ 时表示椭圆，当 $b^2<\lambda<a^2$时表示双曲线，椭圆与双曲线公共焦点为$(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$。

(6) 相交条件是 $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_1}$，平行条件是 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$，重合条件是 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$。

(7) l_1与 l_2 的夹角是$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3}{4}\pi$，过 l_1 与 l_2 的交点且与 l_3 垂直的直线是 $5x-5y+1=0$，原点到l_1的距离是$\frac{4}{\sqrt{5}}$，到 l_2 的距离是$\frac{7}{\sqrt{10}}$。

(8) 曲线 $\rho^2\sin 2\varphi=6$ 的直角坐标方程为 $xy=3$，而$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=x^2$ 的极坐标方程为 $\rho=\cos^2\varphi$。

2．证 取矩形 $ABCD$ 的一对邻边 AB 与 AD 所在的直线分别为 x

轴与 y 轴，并置矩形于第Ⅰ象限(图1)。

设 P 的坐标为(x,y)，$|AB|=a$，$|AD|=b$，那么矩形四顶点的坐标依次为 $A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,b,)$，$D(0,b)$，从而有

$$PA^2+PC^2=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2,$$

$$PB^2+PD^2=(x-a)^2+y^2+x^2+(y-b)^2,$$

所以 $$PA^2+PC^2=PB^2+PD^2.$$

3．**解** 设两定点 P_1 与 P_2 间的距离为 $2a$，取线段 P_1P_2 之中点为坐标原点，P_1，P_2 所在的直线为 x 轴，建立直角坐标系(图2)，那么 P_1 与 P_1 的坐标分别为$(-a,0)$与$(a,0)$，再设动点为 $M(x,y)$，按题意有

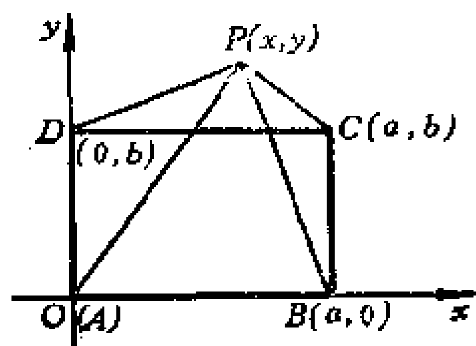


图 1

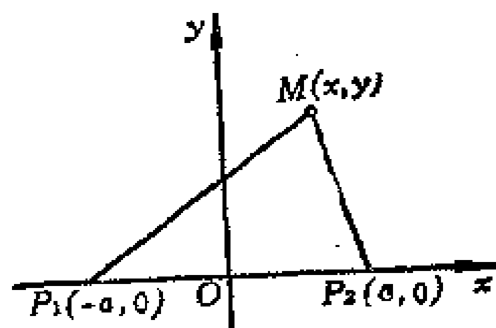


图 2

$$\frac{|P_1M|}{|P_2M|}=k,\quad (k>0)$$

而 $$|P_1M|=\sqrt{(x+a)^2+y^2},$$

$$|P_2M|=\sqrt{(x-a)^2+y^2},$$

所以有

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=k,$$

化简整理得

$$(1-k^2)x^2+2a(1+k^2)x+(1-k^2)y^2+(1-k^2)a^2=0,$$

当 $k=1$ 时，方程化为 $x=0$，轨迹为一条直线。

当 $k\neq1$ 时，方程化为 $x^2+\frac{2a(1+k^2)}{(1-k^2)}x+y^2+a^2=0$ 或

$$\left(x+\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{4k^2a^2}{(1-k^2)^2},$$

轨迹是一个中心在$\left(-\frac{(1+k^2)a}{1-k^2},0\right)$半径是$\frac{2ak}{1-k^2}$的圆。

4. **解** 三角形 ABC 的重心为 $G(x,y)$，顶点 A 的坐标为(x_0,y_0)，那么有

$$x=\frac{1}{3}(x_0-3+3)=\frac{1}{3}x_0,$$

$$y=\frac{1}{3}y_0,$$

从而有

$$x_0=3x,\quad y_0=3y \tag{1}$$

因为点 $A(x_0,y_0)$在直线 $7x-5y-35=0$ 上，所以有

$$7x_0-5y_0-35=0, \tag{2}$$

将(1)代入(2)得重心的轨迹方程为

$$21x-15y-35=0.$$

这是一条平行于已知直线 $7x-5y-35=0$ 的直线。

5. **证** 将方程$(2k-1)x-(k+3)y-(k-11)=0$ 改写为

$$k(2x-y-1)-(x+3y-11)=0.$$

这是一个以两直线

$$l_1:\ 2x-y-1=0 \quad 与 \quad l_2:\ x+3y-11=0$$

的交点为中心的直线束方程，所以不论 k 为何值，由方程所确定的直线总通过两直线 l_1 与 l_2的交点(2,3)。

6. 如图 3 所示，建立极坐标系，那么两已知圆的方程可写为

$$\rho=2a\cos\varphi, \tag{3}$$

与

$$\rho=2a\sin\varphi. \tag{4}$$

设 AB 的中点 M 的坐标为(ρ,φ)，A 与 B 的坐标分别为(ρ_1,φ)与(ρ_2,φ)，那么因为 A 与 B 分别在圆(3)与(4)上，所以有

$$\rho_1=2a\cos\varphi, \tag{5}$$

与

$$\rho_2=2a\sin\varphi. \tag{6}$$

又因为 M 为 AB 的中点，所以又有

$$\rho=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}, \tag{7}$$

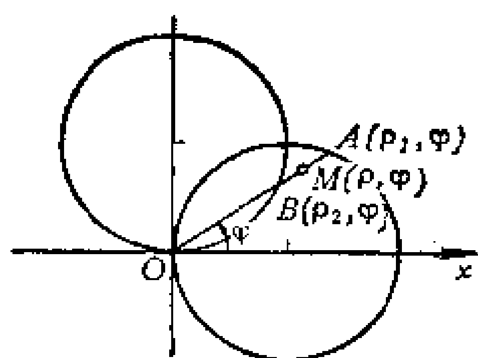


图 3

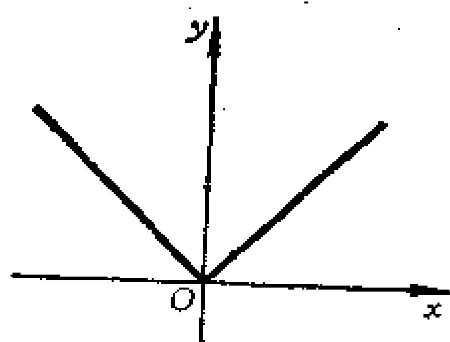


图 4

由(5)、(6)、(7)三式得

$$\rho=a(\sin\varphi+\cos\varphi),$$

即
$$\rho=\sqrt{2}\,a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right).$$

这就是 AB 中点 M 的轨迹的极坐标方程，把它化为直角坐标方程为：

$$x^2+y^2-a(x+y)=0$$

即
$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2},$$

所以 M 的轨迹是一圆，圆心是$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$，半径等于$\frac{\sqrt{2}}{2}a$．

7．**解**　(1) 当 $x\geqslant0$ 时方程可写为

$$y=x$$

当 $x<0$ 时，方程可写为

$$y=-x$$

所以方程的图形是第 I 象限角平分线与第 II 象限角平分线． 如图 4 所示．

(2) 当 $\varphi=\pi$ 时，$1-\cos\varphi=2$，$\rho=1$，曲线与极轴的反向延长线交于点 $(1,\pi)$．

当 $\varphi\to0$ 或 2π，$\cos\varphi\to1$，$1-\cos\varphi\to0$，从而 $\rho\to+\infty$，所以曲线可向右无限伸展，

方程中当 φ 用 $\varphi+2\pi$ 代替得

$$\rho=\frac{2}{1-\cos(\varphi+2\pi)}$$

即

$$\rho=\frac{2}{1-\cos\varphi}$$

方程不变，而(ρ,φ)与$(\rho,\varphi+2\pi)$代表同一点，所以φ只要在$(0,2\pi]$内取值。

当(ρ,φ)满足方程时，$(\rho,-\varphi)$也满足方程，所以曲线关于极轴对称。这样φ只要在$(0,\pi]$内取值，再由对称性画出整个曲线(图 5)。

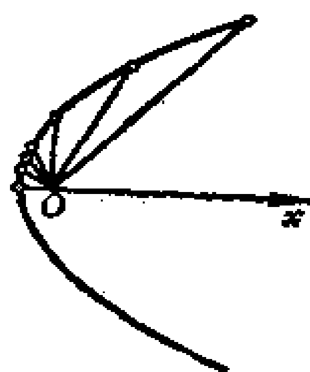


图 5

列表作图

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5}{6}\pi$	π
ρ	$+\infty$	14.3	6.78	4	2	1.33	1.06	1.05	1

这是一条抛物线。

第 二 章

1. 填空题

(1) $\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$

(2) 1° $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$

2° $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$

3° $\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\operatorname{tg}\theta\end{cases}$ $\left(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \theta\neq\pm\frac{\pi}{2}\right)$

4° $\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$

(3) 1° $y^2-x-y-1=0$，　2° $2x^2-y+1=0$，

3° $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$，　4° $x^2y+4a^2y-8a^3=0$.

(4) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=t^2$，中心在(x_0, y_0)，半径为$|t|$的圆；$\frac{x-x_0}{\cos\theta}=\frac{y-y_0}{\sin\theta}$，通过点$(x_0, y_0)$斜率为 $\operatorname{tg}\theta$ 的直线，

(5) 1° $\begin{cases} x=\frac{a-t^2}{b} \\ y=\frac{at-t^3}{b} \end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$

2° $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$

$\begin{cases} x=-\frac{6t}{1+t^2} \\ y=\frac{3(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$ $(-\infty<t<+\infty)$

2．解　设B的坐标为(x, y)，自B向x轴作垂线BM，交x轴于点M，于是

$$x=OM=OC+CM$$
$$y=MB.$$

设θ是以射线CA为始边，射线Cx的反向延长线为终边所成的角（图 2-5），取θ为参数，那么

$$OC=a\cos\theta,$$

$$CM=a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=a\sin\theta,$$

$$MB=a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=a\cos\theta.$$

所以B点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta+a\sin\theta, \\ y=a\cos\theta, \end{cases} \quad (0\leqslant\theta<2\pi),$$

即

$$\begin{cases} x=a(\sin\theta+\cos\theta), \\ y=a\cos\theta, \end{cases} \quad (0\leqslant\theta<2\pi).$$

消去参数θ，得轨迹的普通方程为

$$x^2-2xy+2y^2-a^2=0.$$

3．证　取抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x=2pt^2, \\ y=2pt. \end{cases}$$

设 $P_i(2pt_i^2, 2pt_i)(i=1,2,3,4)$为抛物线上的任意四个不同的点，从而有 $t_i \neq t_j(i,j=1,2,3,4,i\neq j)$，因为四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 四边的斜率分别为

$$k_{P_1P_2}=\frac{1}{t_2+t_1}, \qquad k_{P_3P_4}=\frac{1}{t_4+t_3},$$

$$k_{P_2P_3}=\frac{1}{t_3+t_2}, \qquad k_{P_4P_1}=\frac{1}{t_1+t_4}.$$

如果四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 为平行四边形，那么有

$$k_{P_1P_2}=k_{P_3P_4}, k_{P_2P_3}=k_{P_4P_1},$$

即
$$\frac{1}{t_2+t_1}=\frac{1}{t_4+t_3}, \quad \frac{1}{t_3+t_2}=\frac{1}{t_1+t_4}.$$

由此解得
$$t_1=t_3, \quad t_2=t_4.$$

这与题设矛盾，所以四边形 $P_1P_2P_3P_4$不可能是平行四边形。

4．设椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases}$$

那么点C、D的坐标分别为

$$(a\cos\theta, b\sin\theta), \quad (a\cos\theta, -b\sin\theta).$$

而 A'，A 的坐标分别为$(-a,0)$，$(a,0)$（图 6）。所以两直线 $A'C$ 与 AD 的方程分别为

$$\frac{x+a}{a(\cos\theta+1)}=\frac{y}{b\sin\theta} \quad 与 \quad \frac{x-a}{a(\cos\theta-1)}=\frac{y}{-b\sin\theta},$$

即　$b(x+a)\sin\theta-ay\cos\theta=ay$　与　$b(x-a)\sin\theta+ay\cos\theta=ay$.

由这两式解得

$$\sin\theta=\frac{ay}{bx}, \quad \cos\theta=\frac{a}{x}.$$

利用公式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，消去参数 θ，得点P的轨迹方程为

$$\frac{a^2y^2}{b^2x^2}+\frac{a^2}{x^2}=1,$$

即
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

所以点P的轨迹为一条双曲线。

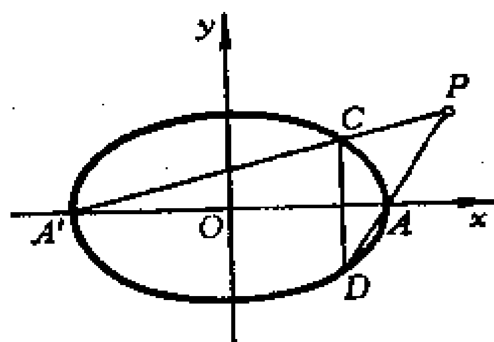


图 6

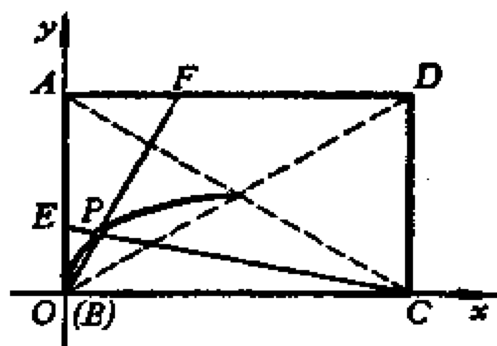


图 7

5．**解**　如图 7，取 BC 所在直线为 x 轴，BA 所在直线为 y 轴，建立直角坐标系．

设 $C(a,0)$，$A(0,b)$，令

$$\frac{BE}{BA}=\frac{AF}{AD}=\lambda,$$

于是得 $E(0,b\lambda)$，$F(a\lambda,b)$．所以两直线 CE 与 BF 的方程分别为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b\lambda}=1 \quad 与 \quad y=\frac{b}{a\lambda}x．$$

由上两式消去参数 λ 并化简得

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{4}}=1．$$

显然，当 E 与 O 重合时，F 与 A 重合，这时的 P 点即为原点 $(0,0)$，当 E 与 A 重合时，F 与 D 重合，这时 CE 与 BF 的交点 P 即为矩形的两对角线的交点 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$，因此轨迹上的点 P 的坐标 $(x,\ y)$ 必须满足 $0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}$，$0\leqslant y\leqslant\frac{b}{2}$，

于是所求的轨迹方程为

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{4}}=1,\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{b}{2}\right).$$

它的图形为椭圆的 $\frac{1}{4}$ 弧（图 7）。

第 三 章

1．填空题

(1) 点的新坐标为$(-2,-2)$，$(1,-3)$，曲线的新方程为$x'^2-y'^2+3=0$；

(2) 点的旧坐标为 $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$(5,1)$，曲线的新方程为 $x'^2-y'^2=12$；

(3) i) 在移轴下，二次曲线方程的系数的变换规律为：二次项系数不变，一次项系数分别变为 $2a'_{13}=2(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})$，$2a'_{23}=2(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})$，常数项变为 $a'_{33}=F(x_0,y_0)$，

ii) 旋转角 α 满足 $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$；

(4) 三个不变量为 $I_1=2, I_2=0, I_3=-16$，一个半不变量为 $K_1=16$，特征方程为 $\lambda^2-2\lambda=0$，特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$。

(5) 中心为$(2,1)$，中心直线为 $4x-2y+3=0$；

(6) 当 $-4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$ 为椭圆型曲线，当 $a<-4\sqrt{2}$ 或 $a>4\sqrt{2}$ 时为双曲型曲线，当 $a=\pm4\sqrt{2}$ 时为抛物型曲线。

(7) 当 $m=4$，$n=-6$ 时为两平行直线。

2．**解** 将原方程对 y 进行集项并配方变形为

$$2(y+3)^2+5(x-1)=0.$$

作移轴

$$\begin{cases} x=x'+1, \\ y=y'-3, \end{cases}$$

得新方程为

$$2y'^2+5x'=0,$$

或

$$y'^2=-\frac{5}{2}x'.$$

所以抛物线在新坐标系下的焦点坐标为 $\left(-\frac{5}{4},0\right)$，准线方程为 $x'=\frac{5}{4}$。利用移轴公式化为原坐标系下的焦点坐标为 $\left(-\frac{1}{4},-3\right)$，准线方程为 $x=\frac{9}{4}$。

3．证法一 $\because$ $I_1=4+9=13, I_2=\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}=0,$

$$I_3=\begin{vmatrix} 4 & -6 & 10 \\ -6 & 9 & -15 \\ 10 & -15 & -11 \end{vmatrix}=0,$$

$$K_1=\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 10 & -11 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 9 & -15 \\ -15 & -11 \end{vmatrix}=-468\neq 0.$$

$\therefore$ 曲线的简化方程为 $13y'^2+\frac{-468}{13}=0,$

即 $$y'^2-\frac{468}{169}=0.$$

因此曲线为两平行直线，它们之间的距离为

$$d=2\sqrt{\frac{468}{169}}=\frac{12}{13}\sqrt{13}.$$

证法二 将原方程改写为

$$(2x-3y)^2+10(2x-3y)-11=0,$$

$\therefore$ $$(2x-3y+11)(2x-3y-1)=0.$$

因此原方程表示两条平行直线．

$$2x-3y+11=0,$$

与 $$2x-3y-1=0.$$

因为两平行的直线间的距离等于在其中任一直线上任取一点到另一直线的距离，为此在直线 $2x-3y-1=0$ 上任取一点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，它到直线 $2x-3y+11=0$ 的距离为

$$d=\frac{\left|2\times\frac{1}{2}-3\times 0+11\right|}{\sqrt{4+9}}=\frac{12}{\sqrt{13}}=\frac{12}{13}\sqrt{13},$$

所以两平行直线间的距离为 $\frac{12}{13}\sqrt{13}$.

证法三 利用坐标变换把方程化为简化方程，然后判别它为两平行直线，再求它们之间的距离．此法留给读者

4．**解法一**　因为 $I_1=1+1=2$，

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & 1 \end{vmatrix}=1-\cos^2 2\theta=\sin^2 2\theta,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 1 & -\cos 2\theta & 0 \\ -\cos 2\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2 \end{vmatrix}=-2a^2\sin^2 2\theta,$$

$$K_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2a^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2a^2 \end{vmatrix}=-4a^2\neq 0,$$

所以 当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\sin 2\theta>0$，从而 $I_2>0$，$I_3<0$，又因为 $I_1I_3<0$，所以当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$时，方程表示椭圆。

当 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$时，$\sin 2\theta=0$，从而 $I_2=I_3=0$，但 $K_1=-4a^2<0$，所以当 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$时，方程表示一对平行直线。

解法二　当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\theta\neq\frac{\pi}{4}$时，$\cos 2\theta\neq 0$，作转轴，消去方程中的交叉项。设旋转角为 α，那么

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1-1}{2\cos 2\theta}=0,$$

所以可取 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，从而得转轴公式为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \\ y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

代入原方程整理得

$$x'^2(1-\cos 2\theta)+y'^2(1+\cos 2\theta)=2a^2.$$

∵　$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$

∴　上式化为

$$2x'^2\sin^2\theta+2y'^2\cos^2\theta=2a^2,$$

即　$$x'^2\sin^2\theta+y'^2\cos^2\theta=a^2,$$

或
$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{\sin^2\theta}}+\frac{y'^2}{\frac{a^2}{\cos^2\theta}}=1.$$

它表示椭圆。

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\cos 2\theta=0$，原方程化为

$$x^2+y^2=2a^2,(a\neq 0).$$

这时方程表示圆，它是椭圆的特例。

当 $\theta=0$ 时，原方程变为

$$x^2-2xy+y^2=2a^2,$$

或
$$(x-y+\sqrt{2}a)(x-y-\sqrt{2}a)=0,$$

即
$$x-y+\sqrt{2}a=0 \text{ 与 } x-y-\sqrt{2}a=0.$$

它表示两平行直线；当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，原方程变为

$$x^2+2xy+y^2=2a^2,$$

即
$$x+y+\sqrt{2}a=0 \text{ 与 } x+y-\sqrt{2}a=0,$$

也表示两条平行直线.

5. (1) 证

$$I_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,\quad I_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\lambda\\ 0 & 0 & 2\\ -2\lambda & 2 & 8\lambda-12\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

∴ 不论 λ 取何值方程总表示抛物线.

任取 $\lambda=0$ 与 1，得两对应的抛物线方程为

$$x^2+4y-12=0,$$
$$x^2-4x+4y-4=0,$$

联立解这两方程得这两抛物线的交点为 (2,2)，把这点的坐标代入原方程的左端得

$$4-8\lambda+8+8\lambda-12=0,$$

因此(2,2)满足原方程，所以不论 λ 取何实数，原方程所表示的抛物线都过定点(2,2)。

(2) **解** 将原方程改写为

$$(x-2\lambda)^2+4[y-(\lambda^2-2\lambda+3)]=0.$$

设抛物线的顶点坐标为(x_0, y_0)，那么

$$x_0 = 2\lambda,$$
$$y_0 = \lambda^2 - 2\lambda + 3.$$

由这两式消去参数 λ，得

$$x_0^2 - 4x_0 + 12 = 4y_0,$$

或

$$(x_0 - 2)^2 = 4(y_0 - 2),$$

所以这族抛物线顶点的轨迹方程为

$$(x-2)^2 = 4(y-2).$$

6. 解 $\because$ $I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，$\therefore$曲线为非中心曲线．因此先转轴消去交叉项．设旋转角为 α，那么

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1-1}{2} = 0.$$

所以可取 $\alpha = \frac{\pi}{4}$，得转轴公式为

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'). \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

代入原方程化简整理得

$$2x'^2 - 4\sqrt{2}x' + 8\sqrt{2}y' + 4 = 0,$$

即

$$x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' + 2 = 0,$$

$\therefore$

$$(x' - \sqrt{2})^2 = -4\sqrt{2}y'.$$

再作移轴

$$\begin{cases} x' = x'' + \sqrt{2}, \\ y' = y'', \end{cases}$$

得曲线的标准方程为

$$x''^2 = -4\sqrt{2}y'',$$

这个方程表示一条抛物线，它的图形如图 8 所示．

检验：在原方程中令 $x=0$，得$(y+2)^2=0$，从而 y 有二重根-2，抛物线与 y 轴切于点$(0,-2)$；如令 $y=0$，得 $x^2-12x+4=0$，从而 $x=6\pm4\sqrt{2}$，因

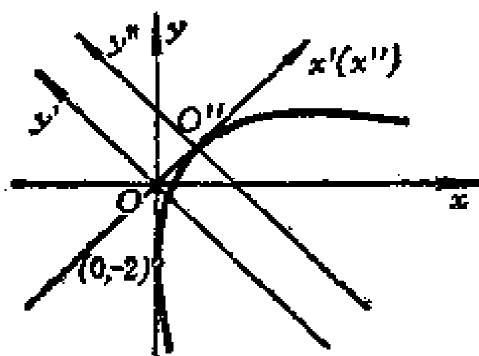


图 8

此抛物线与 x 轴交于点 $(6+4\sqrt{2},0)$ 与 $(6-4\sqrt{2},0)$。取坐标的近似值，即点(0.3,0)与(11.6,0)。

第 四 章

1. (1) ×; (2) √; (3) ×; (4) ×; (5) √;

2. (1) √; (2) √; (3) √; (4) ×; (5) ×。

3. (1) 加法，数乘；(2) $\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0, (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$；(4) $0<\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})<\pi$；(5) 0；(6) 24；(7) ±1。

4. 证　由于 E，F 分别为 AC 与 BD 的中点，所以

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}),$$

从而
$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),$$

但
$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{0}$$

所以
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{0}$$

5. 证　设 G 为三角形 ABC 的重心，那么

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

但
$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

从而
$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}.$$

所以$\overrightarrow{OG}$与$\overrightarrow{OE}$共线，即O，G，E三点共线，因此G是对角线OE与平面ABC的交点，故G与M重合，即M是三角形ABC的重心。

6．**解**　(1)由$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2>0$，可知$\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\}$是右旋向量组．

(2) 由$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2<0$，可知$\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$是左旋向量组．

(3) 由$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，可知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\}$是共面向量组。

(4) 由$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2<0$，可知$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$是左旋向量组．

7．由$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$以及向量积定义，可知$\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3\}$是右旋向量组，且$\boldsymbol{r}_1\perp\boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{r}_2\perp\boldsymbol{r}_3$，又因为$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3$，所以$\boldsymbol{r}_1\perp\boldsymbol{r}_2$，从而$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$两两垂直。

因为
$$|\boldsymbol{r}_1|=|\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3|=|\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{r}_3|\sin\frac{\pi}{2}=|\boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{r}_3| \quad (1)$$
$$|\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1|=|\boldsymbol{r}_3||\boldsymbol{r}_1|\sin\frac{\pi}{2}=|\boldsymbol{r}_3||\boldsymbol{r}_1| \quad (2)$$
$$|\boldsymbol{r}_3|=|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\sin\frac{\pi}{2}=|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2| \quad (3)$$

于是把(2) 代入 (1) 即得$|\boldsymbol{r}_3|=1$，(3)代入(1)得$|\boldsymbol{r}_2|=1$，(3)代入 (2)得$|\boldsymbol{r}_1|=1$，所以$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$是单位向量．

8．**证**　由于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是两两垂直的非零向量，根据混合积的几何意义可得

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\neq0,$$

从而$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面，于是可设

$$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},$$

等式两边与$\boldsymbol{a}$作数量积得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}=x(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+y(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+z(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$$

但　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\neq0$，

所以
$$x=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a}^2}.$$

同理，等式两边依次与$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$作数量积可得

$$y=\frac{b\cdot d}{b^2},\quad z=\frac{c\cdot d}{c^2},$$

所以

$$d=\frac{a\cdot d}{a^2}a+\frac{b\cdot d}{b^2}b+\frac{c\cdot d}{c^2}c.$$

第 五 章

1. (1) $(-x,y,z),(x,-y,-z),z$;(2) $(X+x_1,Y+y_1,Z+z_1)$;(3)2;(4) $\{-48,45,-36\}$; (5) -4; (6) $\pm\left\{-\frac{1}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{5}{\sqrt{35}}\right\}$;(7)$(-2,2,1),(0,1,1)$; (8) $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0$,(9) $x^2+y^2+z^2=r^2$,中心在原点,半径为 r 的球面;(10) P_1,P_2.

2. 证 由 $\overrightarrow{AB}=\{-2,3,-3\}$, $\overrightarrow{CD}=\{4,-6,6\}$.

可知 $$\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB},$$

从而 $$\overrightarrow{CD}\parallel\overrightarrow{AB},\quad |\overrightarrow{CD}|\neq|\overrightarrow{AB}|$$

所以四边形 $ABCD$ 是一个梯形.

3. 解 设线段 AB 端点的坐标分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,由

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB},\quad \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},$$

可得

$$2=\frac{x_1+\frac{1}{2}x_2}{1+\frac{1}{2}},\quad 0=\frac{y_1+\frac{1}{2}y_2}{1+\frac{1}{2}},\quad 2=\frac{z_1+\frac{1}{2}z_2}{1+\frac{1}{2}},$$

$$5=\frac{x_1+2x_2}{1+2},-2=\frac{y_1+2y_2}{1+2},\quad 0=\frac{z_1+2z_2}{1+2},$$

从而解得

$$\begin{cases}x_1=-1,\\x_2=8,\end{cases}\quad\begin{cases}y_1=2,\\y_2=-4,\end{cases}\quad\begin{cases}z_1=4,\\z_2=-2,\end{cases}$$

所以线段两端点的坐标分别为 $A(-1,2,4)$,$B(8,-4,-2)$.

4. 解 先求 h:由

$$\overrightarrow{AB}=\{1,-1,2\},\quad \overrightarrow{AC}=\{0,-2,4\},$$

可得三角形 ABC 的面积为

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|\{0,-4,-2\}|=\sqrt{5},$$

所以

$$h=\frac{3\times5}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

其次求点 D 的坐标．因为点 D 在 Oy 轴上，可设点 D 的坐标为 $(0,y,0)$，于是

$$\overrightarrow{AD}=\{-2,y-1,1\},$$

从而

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ -2 & y-1 & 1\end{vmatrix}=2(1-2y),$$

由 $V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})|$ 可得

$$|1-2y|=\frac{6\times5}{2},$$

解得 $y=8$ 或 $y=-7$，所以点 D 的坐标为 $(0,8,0)$ 或 $(0,-7,0)$．

5．**证** 令 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$，于是有

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]^2\leqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2,$$

把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标代入上式得

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2).$$

6．**解** 设动点为 $M(x,y,z)$，且 M 在 Oz 轴上的射影为 P，在 xOy 平面上的射影为 Q，于是点 P，Q 的坐标分别为 $P(O,O,z)$，$Q(x,y,O)$．由题设条件得

$$\begin{cases}|\overrightarrow{PM}|=3,\\ |\overrightarrow{QM}|=2,\\ \overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{k}>0.\end{cases}$$

把 $\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{QM}$，$\overrightarrow{OM}$ 的坐标代入以上各式，我们得到

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=3, \\ |z|=2, \\ z>0;\end{cases}$$

化简得所求轨迹方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=9, \\ z=2.\end{cases}$$

它表示一条空间曲线，是平面 $z=2$ 上的一个圆，这个圆的中心为$(0,0,2)$，半径等于 3 .

第　六　章

1. 填空题

(1) $x=a$;　　(2) $cy-bz=0$;　　(3) $x+y+z-2=0$;

(4) $\begin{vmatrix} b & c \\ Y & Z \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} c & a \\ Z & X \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} a & b \\ X & Y \end{vmatrix} z=0$;

(5) $\frac{x}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z}{5}$, $\begin{cases}3=3t, \\ y=0, \\ z=5t,\end{cases}$ $\begin{cases}5x-3z=0, \\ y=0;\end{cases}$

(6) $\dfrac{x-a}{\begin{vmatrix} B & C \\ Y & Z \end{vmatrix}}=\dfrac{y-b}{\begin{vmatrix} C & A \\ Z & X \end{vmatrix}}=\dfrac{z-c}{\begin{vmatrix} A & B \\ X & Y \end{vmatrix}}$; (7) $X=0, Y=Z=b=c=0$;

(8) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{14}}$, $(-2,-2,0)$;

2. 解　把 $\begin{cases}x=lz+a \\ y=mz+b\end{cases}$ 代入 $Ax+By+Cz+D=0$，得

$$(Al+Bm+C)z+(Aa+Bb+D)=0,$$

直线与平面相交条件为　$Al+Bm+C\neq 0$；平行条件为　$Al+Bm+C=0$, $Aa+Bb+D\neq 0$；重合条件为 $Al+Bm+C=0, Aa+Bb+D=0$.

3. 证　两直线分别过点 $M_1(a_1, b_1, c_1)$, $M_2(a_2, b_2, c_2)$，有方向向量 $v_1=\{a_2, b_2, c_2\}$, $v_2=\{a_1, b_1, c_1\}$，由于

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

且$a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$，所以两直线相交。

令 $a_1+a_2t=a_2+a_1s,$

$b_1+b_2t=b_2+b_1s,$

$c_1+c_2t=c_2+c_1s,$

解得 $s=t=1$，由此得两直线交点坐标为$(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2)$。

4．**解** 因为通过 z 轴与点 $M_0(1,3,5)$ 的平面通过原点，且有方位向量 $\overrightarrow{OM_0}, \boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$，所以平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $$3x-y=0.$$

过点 M_0 与已知平面平行的平面方程为

$$3(x-1)+2(y-3)+(z-5)=0,$$

所以所求直线为

$$\begin{cases} 3x-y=0, \\ 3x+2y+z-14=0. \end{cases}$$

本题也可用待定系数法来解。

5．**解** 设原点O关于直线 l 的对称点为 M，那么直线 OM 与 l 垂直相交，且交点P为线段 OM 的中点，设点P的坐标为(x_0, y_0, z_0)，由于 $P \in l$，$\overrightarrow{OP} \perp l$，所以有

$$\frac{x_0-5}{4} = \frac{y_0-1}{3} = \frac{z_0+3}{-2} \tag{1}$$

$$4x_0+3y_0-2z_0=0 \tag{2}$$

由(1)、(2)解得

$$x_0=1, y_0=-2, z_0=-1,$$

再由中点公式(5.2-17)得所求对称点为$M(2,-4,-2)$。

6．**解法一** 直线 l_1和l_2 交于原点 O，分别有方向向量 $\boldsymbol{v}_1=\{0,1,1\}$，$\boldsymbol{v}_2=\{1,0,1\}$。由于分角线上任一点$M(x,y,z)$到两直线的距离相等，因此有

$$\frac{|\overrightarrow{OM}\times v_1|}{|v_1|}=\frac{|\overrightarrow{OM}\times v_2|}{|v_2|},$$

所以 $(y-z)^2+2x^2=(z-x)^2+2y^2$,

化简整理得 $(x-y)(x+y+2z)=0$.

又因为直线 l_1,l_2 的分角线在 l_1 和 l_2 决定的平面上,这平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $x+y-z=0$.

所以所求分角线方程为

$$\begin{cases}(x-y)(x+y+2z)=0,\\ x+y-z=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x-y=0,\\ x+y-z=0,\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x+y+2z=0,\\ x+y-z=0.\end{cases}$$

解法二 在直线l_1上任取一点$M_1(0,1,1)$,在直线l_2上取两点 $M_2(1,0,1)$ 和 $M_3(-1,0,-1)$,那么$|\overrightarrow{OM_2}|=|\overrightarrow{OM_3}|=|\overrightarrow{OM_1}|=\sqrt{2}$.

线段 M_1M_2 和 M_1M_3 的中点分别为 $M_0\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},1\right)$, $M_0'\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},0\right)$,

由平面几何知识可知直线 OM_0, OM_0' 就是所求的分角线,它们的方程为

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{1},\ 与\ \frac{x}{-\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{0}.$$

7. **解** 两异面直线的公垂线的方向向量为 $v=\{1,0,-1\}\times\{1,5,1\}=\{5,-2,5\}$,公垂线方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix} x+2 & y & z-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0,\\ \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-7 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0. \end{cases}$$

所求平面通过这公垂线，可设所求平面的方程为

$$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0,$$

即
$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0.$$

它的法向量为$n_1=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}$,而已知平面的法向量为$n_2=\{1,-4,-8\}$,由于两平面交角为$\frac{\pi}{4}$,所以有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\pm\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|},$$

即
$$\frac{9(\lambda-3)}{9\sqrt{2\lambda^2+27}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以
$$\lambda=-\frac{3}{4}.$$

于是所求平面方程为　$x+20y+7z-12=0.$

第　七　章

1. (1) 母线平行于 z 轴的椭圆柱面;母线平行于 y 轴的抛物柱面;母线平行于 z轴的双曲柱面;顶点在原点的二次锥面;两个分别平行于xOy和xOy坐标面的平面;过点$(0,2,2)$且平行于 x 轴的直线; xOy 坐标面上的双曲线;平行于 xOy 坐标面的平面 $z=5$ 上的双曲线。

(2) $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$;

(3) 圆心$(0,0,3)$,半径$R=4$;

(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2, \\ z=c; \end{cases}$　　$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2, \\ y=b; \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2, \\ (x-a)+2(y-b)+3(z-c)=0; \end{cases}$$

(5) $x^2-y^2+z^2=0$;　　$x^2+y^2-z^2=0.$

2. **解**　设球心坐标为$(0,b,0)$. 由于球心到球面上两已知点的距离相等,由此得

$$(b-2)^2+2^2=(b-4)^2,即\ b=2$$

所以球心坐标为$(0,2,0)$，球半径$r=2$. 所求球面方程为

$$x^2+(y-2)^2+z^2=4$$

3．**解** 曲线在yOz坐标面上的射影柱面的方程为$z=2y$，这是通过x轴的平面；从曲线方程分别消去y和z，得曲线在xOz和xOy坐标面上的射影柱面为$x^2+\frac{(z-2)^2}{4}=1$和$x^2+(y-1)^2=1$，它们分别为母线平行y轴的椭圆柱面和母线平行于z轴的圆柱面.

4．**证** 已知圆柱的轴过原点O，有方向向量$\boldsymbol{v}=\{l,m,n\}$，点$M(x,y,z)$在圆柱面上的充要条件是点M到轴的距离等于r，即

$$\frac{|\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=r,$$

即 $$(ny-mz)^2+(lz-nx)^2+(mx-ly)^2=r^2(l^2+m^2+n^2).$$

5．**解** 为方便起见，先把已知准线方程经过同解变形化为

$$\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ z^2=22,\end{cases}$$

即准线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ z=\sqrt{22}\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ z=-\sqrt{22},\end{cases}$$

根据例4的结论，以原点为顶点，曲线$\begin{cases}x^2+y^2=3\\ z=\sqrt{22}\end{cases}$为准线的锥面方程为

$$\left(\frac{\sqrt{22}\,x}{z}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{22}\,y}{z}\right)^2-3=0,$$

即 $$22x^2+22y^2-3z^2=0,$$

如果以曲线$\begin{cases}x^2+y^2=3\\ z=-\sqrt{22}\end{cases}$为准线，可以得到同样的锥面方程，因此所求锥面是圆锥面$22x^2+22y^2-3z^2=0$.

第 八 章

1．(1) 方程$x^2-2y^2+3z^2+6=0$表示双叶双曲面．方程$x^2+2y^2+3z^2-6=0$表示椭球面；方程$x^2-y^2-z^2+2=0$表示单叶双曲面；方程$x^2+4y^2+8z=0$表示椭圆抛物面，方程$z^2-6x^2-24y=0$表示双曲抛物面.

(2) 二次曲面$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$被$xOy$坐标面截得的曲线方程为

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1\\ z=0\end{cases}$，截线为双曲线；被$xOz$坐标面截得的曲线方程为

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\\ y=0\end{cases}$，截线为椭圆；被$yOz$坐标面截得的曲线方程为

$\begin{cases}\frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,\\ x=0,\end{cases}$ 截线为双曲线；被平面$y=3$截得的曲线方程为

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=\frac{25}{16}\\ y=3\end{cases}$，截线为椭圆；被平面$z=3$截得的曲线方程为

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=0\\ z=3\end{cases}$，截线为两相交直线。

(3) 曲面$y^2-\frac{z^2}{4}=2x$关于xOy坐标面，xOz坐标面以及x轴对称。

(4) 二次锥面$x^2+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$的直母线方程为

$$\begin{cases}\lambda\left(x+\frac{z}{2}\right)=\mu\cdot\frac{y}{3}\\ \mu\left(x-\frac{z}{2}\right)=-\lambda\cdot\frac{y}{3}\end{cases}，其中\lambda,\mu不全为零。$$

2. **证** 因为点P的坐标为$(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$，而$P$又在球面上，所以有

$$\frac{(p\cos\alpha)^2}{a^2}+\frac{(p\cos\beta)^2}{b^2}+\frac{(p\cos\gamma)^2}{c^2}=1,$$

或

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}=\frac{1}{p^2}.$$

3. **解** 因为所求抛物面关于xOy坐标面与xOz坐标面都对称，所以关于x轴也对称，设所求方程为

$$Ay^2+Bz^2=2x.$$

又因为所求抛物面通过点 $P(2,1,0)$ 与 $Q(1,\frac{1}{3},-1)$，所以有

$$\begin{cases} A=4, \\ \frac{1}{9}A+B=2. \end{cases}$$

解得

$$A=4, \qquad B=\frac{14}{9}.$$

于是所求方程为

$$4y^2+\frac{14}{9}z^2=2x,$$

即

$$\frac{y^2}{\frac{1}{4}}+\frac{z^2}{\frac{9}{14}}=2x,$$

这是一个椭圆抛物面。

4．解　用一族平行于 xOz 坐标面的平面 $y=t$（t 为参数）来截割椭圆抛物面的截线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=2z, \\ y=t, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2=2a^2\left(z-\frac{t^2}{2b^2}\right), \\ y=t, \end{cases}$$

这是一族抛物线，抛物线所在平面为 $y=t$，顶点为 $\left(0,t,\frac{t^2}{2b^2}\right)$，焦点参数为 a^2，对称轴平行于 z 轴，凹向与 z 轴的正方向一致。这一族抛物线顶点的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=0, \\ y=t, \\ z=\frac{t^2}{2b^2}, \end{cases}$$

消去参数 t 得

$$\begin{cases} x=0, \\ y^2=2b^2z. \end{cases}$$

这是一条在 yOz 坐标面上的抛物线．抛物线的顶点在原点，焦点参数为b^2，对称轴为 z 轴，凹向与 z 轴的正方向相同．

5． **解** 因为直纹面 $z=xy$ 的直母线族方程是

$$\begin{cases}\lambda x=z,\\ y=\lambda\end{cases}\quad (\lambda\text{ 为参数}),\tag{1}$$

或

$$\begin{cases}\mu y=z,\\ x=\mu,\end{cases}\quad (\mu\text{ 为参数})\tag{2}$$

把点(x_0,y_0,z_0)代入(1)或(2)得

$$y_0=\lambda=\frac{z_0}{x_0}$$

或

$$x_0=\mu=\frac{z_0}{y_0},$$

所以通过曲面上的点(x_0,y_0,z_0)的直母线为

$$\begin{cases}\dfrac{z_0}{x_0}x=z,\\ y=y_0\end{cases}\text{与}\begin{cases}\dfrac{z_0}{y_0}y=z,\\ x=x_0,\end{cases}$$

即

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z}{z_0}\text{与}\frac{x-x_0}{0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}.$$

6．**解** 1° 曲面被三坐标面截得的曲线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\\ z=0;\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{z^2}{4}=1,\\ y=0;\end{cases}\tag{4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=-1,\\ x=0,\end{cases}\tag{5}$$

(3)为 xOy 坐标面上的双曲线，(4)为 xOz 坐标面上的双曲线，(5)为虚轨迹(虚椭圆)．

2° 曲面被平行于 yOz 坐标面的一族平面 $x=t(|t|\geqslant 4)$ 截得的一族曲

线为：

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=\dfrac{t^2}{16}-1,\\ x=t.\end{cases}\tag{6}$$

这是一族椭圆，族中的椭圆的两双顶点$\left(t,\ \pm3\sqrt{\dfrac{t^2}{16}-1},0\right)$与$\left(t,\ 0,\ \pm2\sqrt{\dfrac{t^2}{16}-1}\ \right)$分别在双曲线(3)与(4)上。

画出双曲线(3)与(4)，以及椭圆(6)(取 $t=\pm8$)就得所求方程的大致图形如图 9。

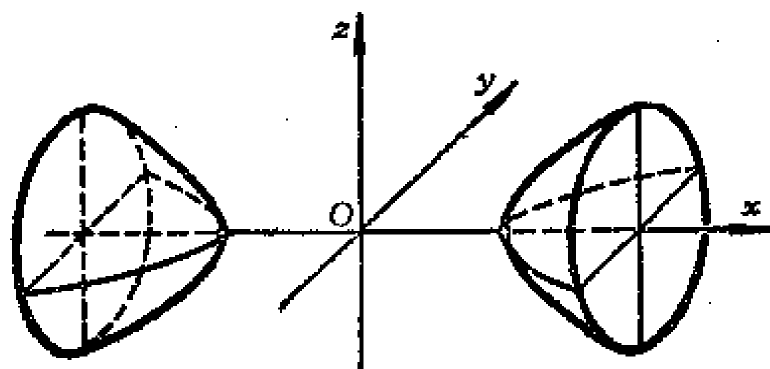


图 9

第 九 章

1. (1) $\begin{cases}x'=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{2}{3}z+1,\\ y'=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}y-\dfrac{1}{3}z+1,\\ z'=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{2}{3}z.\end{cases}$

(2) 特征方程是$-\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda=0$；特征根是$\lambda=3,-1,0$；非奇主方向是$1:(-2):1$与$-1:0:1$；奇向是$1:1:1$，主径面方程是$2x-4y+2z-1=0$与$2x-2z-5=0$。

(3) 特征方程是$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0$,特征根是 $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, 0,非奇主方向是1:0:0,0:1:0;主径面是 $x=0$, $y=0$;奇向是 0:0:1。

(4) 标准方程是$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{4}+\frac{z'^2}{2}=1$,坐标变换公式是 $\begin{cases} x=x'-1, \\ y=y'+2, \\ z=z'-1; \end{cases}$

标准方程是 $x'^2+\frac{y'^2}{\frac{1}{3}}=2z'$,坐标变换公式是$\begin{cases} x=x'-\frac{1}{2}, \\ y=y'-\frac{1}{2}, \\ z=z'-\frac{1}{2}, \end{cases}$ 标准方程是

$x'^2-y'^2=2z'$, 坐标变换公式是$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y', \\ z=z'. \end{cases}$

2. 解 已知直线的方向为 $X:Y:Z=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=$ 1:1:1,取直线的方向数 $X=1, Y=1, Z=1$,那么

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2a_{12}XY+2a_{13}XZ+2a_{23}YZ$$
$$=3X^2+Z^2-2XY-YZ=1,$$

所以和已知直线平行的直线都和二次曲面有两个交点,由于

$$a_{11}X+a_{12}Y+a_{13}Z=3X-Y=2,$$

$$a_{12}X+a_{22}Y+a_{23}Z=-X-\frac{1}{2}Z=-\frac{3}{2},$$

$$a_{13}X+a_{23}Y+a_{33}Z=-\frac{1}{2}Y+Z=\frac{1}{2},$$

$$a_{14}X+a_{24}Y+a_{34}Z=-\frac{1}{2}X=-\frac{1}{2},$$

所求平行弦中点轨迹为

$$2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0,$$

即

$$4x-3y+z-1=0.$$

3. **证** 二次曲面有两个非零特征根，一定存在两个互相垂直的非奇主方向和两个垂直的主径面，以这两个主径面作为新坐标系中的 $y'O'z'$和 $z'O'x'$的坐标面时，x'轴和y'轴的方向都是非奇主方向．另一特征根 $\lambda=0$ 确定的奇向一定垂直于 x'轴和 y'轴(见§9.2 习题 3)，所以 z'轴的方向是奇向．由于$y'O'z'$和 $z'O'x'$坐标面为主径面，所以有 $a'_{11}\neq0$，$a'_{22}\neq0$，但 $a'_{12}=a'_{13}=a'_{14}=a'_{23}=a'_{24}=0$。

在新坐标系里简化方程为

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{34}z'+a'_{44}=0,\quad a'_{11}a'_{22}\neq0.$$

4. **解** $I_1=8+5+5=18$，$I_2=\begin{vmatrix}5&-4\\-4&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8&2\\2&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}8&2\\2&5\end{vmatrix}=81$，

$I_3=\begin{vmatrix}8&2&2\\2&5&-4\\2&-4&5\end{vmatrix}=0$，特征方程为$-\lambda^3+18\lambda^2-81\lambda=0$，特征根是$\lambda=9,9,0$。

对应于 $\lambda=9$ 的主方向由方程组

$$\begin{cases}-X+2Y+2Z=0,\\2X-4Y-4Z=0,\\2X-4Y-4Z=0\end{cases}$$

确定，所以满足 $-X+2Y+2Z=0$ 也即垂直于方向 $-1:2:2$ 的一切方向都是主方向．在其中任取一个方向 $2:2:(-1)$，又由于$\{-1,2,2\}\times\{2,2,-1\}=-3\{2,-1,2\}$，所以 $2:2:(-1)$与 $2:(-1):2$ 是两个相互垂直的非奇主方向，共轭于它们的主径面是 $2x+2y-z+3=0$，$2x-y+2z=0$．再任取一个与它们都垂直的平面$x-2y-2z=0$，把这三平面依次作为 $y'O'z'$，$y'O'z'$，$z'O'x'$坐标面，于是直角坐标变换公式为

$$\begin{cases}x'=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z+1\\y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z,\\z'=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z,\end{cases}$$

解出 x,y,z 得到

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'-\frac{2}{3}, \\ y=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'-\frac{2}{3}, \\ z=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'+\frac{1}{3}, \end{cases} \tag{1}$$

代入原方程得

$$x'^2+y'^2-z'-1=0,$$

再作移轴

$$\begin{cases} x'=x'', \\ y'=y'' \\ z'=z''-1; \end{cases} \tag{2}$$

就得到简化方程

$$x''^2+y''^2-z''=0.$$

这方程的图形是旋转椭圆抛物面.

把(2)代入(1),得到

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}x''+\frac{2}{3}y''+\frac{1}{3}z''-1, \\ y=\frac{2}{3}x''-\frac{1}{3}y''-\frac{2}{3}z'', \\ z=-\frac{1}{3}x''+\frac{2}{3}y''-\frac{2}{3}z''+1. \end{cases}$$

这就是把原方程化为上面的简化方程的坐标变换公式.

5. **解法一** 由于方程中的变数乘积项只有 xy 项,把坐标系$O\text{-}xyz$ 绕 z 轴旋转$\frac{\pi}{4}$,其坐标变换公式为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), \\ z=z', \end{cases} \tag{3}$$

方程可以简化为

$$3x'^2+y'^2-5z'^2-3\sqrt{2}x'-\sqrt{2}y'=0,$$

即

$$3\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-5z'^2-2=0,$$

再作移轴

$$\begin{cases} x'=x''+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y'=y''+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ z'=z'', \end{cases} \tag{4}$$

就得到简化方程

$$3x''^2+y''^2-5z''^2=2,$$

这是单叶双曲面.

(4) 代入(3),得到从原方程到简化方程的坐标变换公式

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x''-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'', \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x''+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y''+1, \\ z=z''. \end{cases}$$

解法二 特征方程为

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

特征根为 $\lambda=3,1,-5,$

主方向由方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)X+Y=0, \\ X+(2-\lambda)Y=0, \\ \quad(-5-\lambda)Z=0, \end{cases}$$

确定,把$\lambda=3,1,-5$依次代入方程组,得到相应的主方向为$1:1:0$,$1:(-1):0$,$0:0:1$,共轭于这些主方向的主径面为$x+y-1=0$,$x-y+1=0$,$z=0$.

作直角坐标变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x+y-1}{\sqrt{2}}, \\ y' = \dfrac{x-y+1}{\sqrt{2}}, \\ z' = -z, \end{cases}$$

解出 x, y, z,得

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' + 1, \\ z = -z', \end{cases}$$

代入原方程得简化方程

$$3x'^2 + y'^2 - 5z'^2 = 2.$$